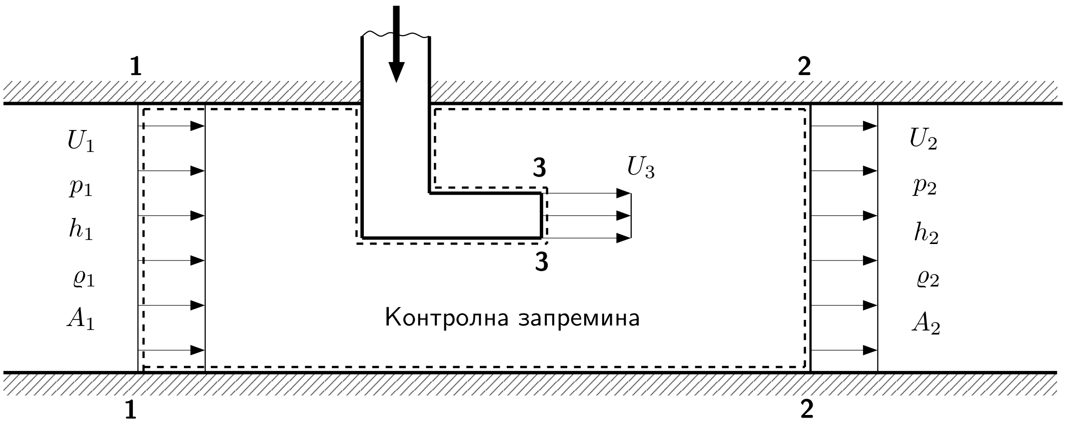
Машински факултет Београд
Катедра за механику флуида

МЕХАНИКА ФЛУИДА М

Примена интегралног облика основних једначина

1. У делу инсталације неке термоелектране приказане на слици обавља се хлађење прегрејане паре убризгавањем воде у њен ток. У пресецима 1-1, 2-2 и 3-3 може се сматрати да је струјање униформно и да све физичке величине имају константну вредност. До пресека 2-2 сва вода испарава, тако да је у њему прегрејана пара ниже температуре. Густина прегрејане паре у пресеку 2-2 је $\varrho_2 = 4{,}5\,\mathrm{kg/m^3}$. Познати су и следећи подаци: $A_1 = A_2 = 2{,}4 \cdot 10^5\,\mathrm{mm^2}$, $A_3 = 5{,}3 \cdot 10^2\,\mathrm{mm^2}$, $U_1 = 80\,\mathrm{m/s}$, $U_3 = 20\,\mathrm{m/s}$, $\varrho_1 = 3{,}26\,\mathrm{kg/m^3}$, $\varrho_3 = 916\,\mathrm{kg/m^3}$, $p_1 = 10\,\mathrm{bar}$, $h_1 = 3264\,\mathrm{kJ/kg}$, $h_3 = 632\,\mathrm{kJ/kg}$. Струјање се може сматрати стационарним, и сви ефекти вискозности се могу занемарити.



Слика 1. Први задатак.

(а) Применом једначине континуитета за контролну запремину одредити брзину струјања прегрејане паре у пресеку 2-2.

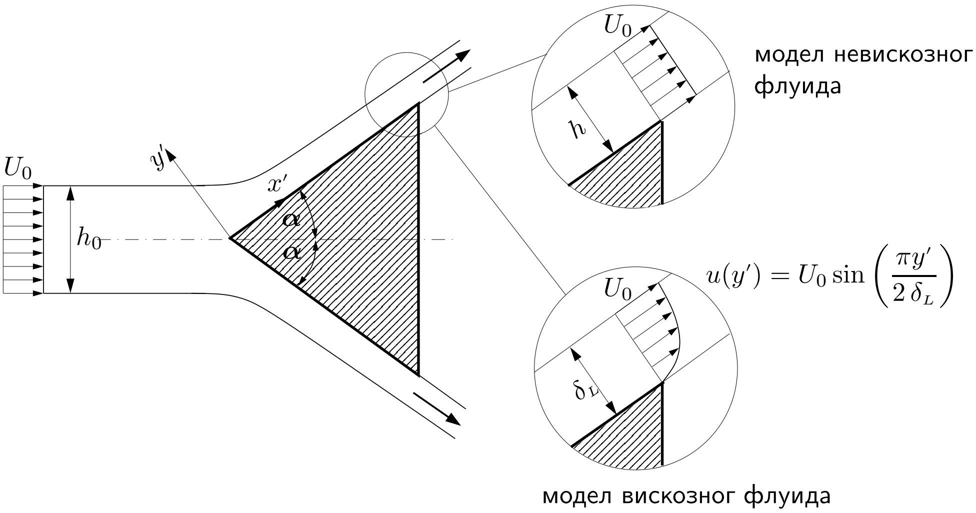
(б) Применом једначине количине кретања за контролну запремину, одредити притисак у пресеку 2-2. Сматрати да је притисак у пресеку 3-3 приближно једнак притиску у пресеку 1-1.

(в) Применом једначине укупне енергије за контролну запремину (стационарно струјање са занемаривањем ефеката вискозности),

$$\oiint_A \varrho\,(\vec{n}\cdot\vec{U})\left(e + \frac{U^2}{2}\right)\mathrm{d}A = -\oiint_A p\Big(\vec{n}\cdot\vec{U}\Big)\,\mathrm{d}A$$

одредити специфичну енталпију h_2 паре у пресеку 2-2.

2. Млаз воде удара у клин, угла 2α. У узводном пресеку, далеко од клина, брзина у свим тачкама млаза је U_0 ($U_0 = \mathrm{const}$), а његова ширина је h_0. Разматрају се два приступа проблему. У првом приступу (моделу) сматра се да је флуид невискозан, тј. да се ефекти вискозности могу занемарити. У другом приступу, ефекти вискозности се узимају у обзир и услед трења између зида клина и млаза, као и трења у самом флуиду, на крају клина се формира профил брзине дефинисан изразом датим на слици 2. Величине ρ, U_0, α и h_0 сматрати познатим.

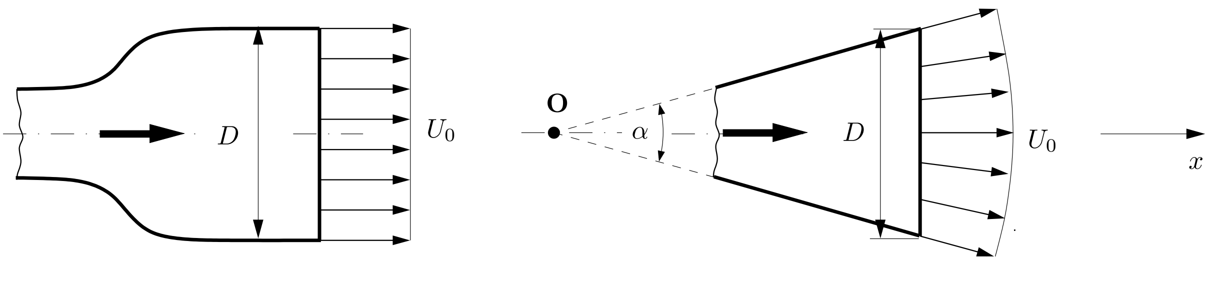


Слика 2. Удар раванског млаза у клин (други задатак).

(а) Одредити висине h (модел невискозног флуида) и δ_L (модел вискозног флуида).

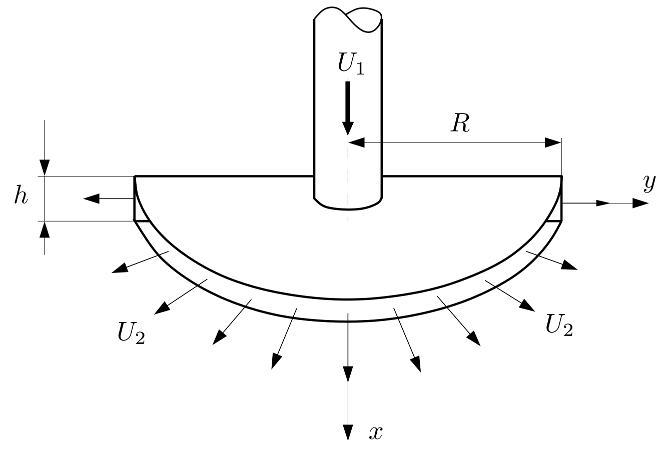
(б) Одредити силе по јединици ширине којима млаз делује на клин за случај: (1) модела невискозног флуида и (2) модела вискозног флуида. Израчунати разлику тих сила (модел 1 и модел 2) за случај $\alpha = \pi/2$.

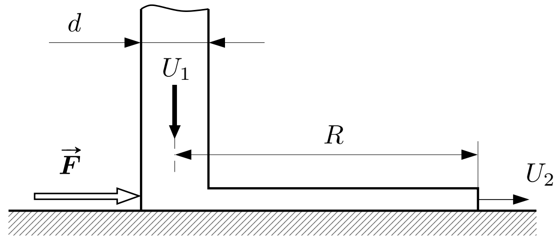
3. На слици су приказани млазници кроз које се истицањем гасова и продуката сагоревања ракетног горива ствара потисак на двема ракетама. Њиховим испитивањем у лабораторији одређује се сила потиска коју они стварају. Излазни пресеци оба млазника су једнаки - кружни попречни пресеци, познатог пречника D и из оба млазника истиче исти флуид (смеша продуката сагоревања и гасова) познате густине ρ, у виду слободног млаза у атмосферу. У првом случају, млазник је тако направљен да гас из њега излази константном, познатом брзином U_0, паралелном са x-осом. Код другог млазника брзина у излазном пресеку је такође истог интензитета U_0 у свакој тачки пресека, али је она тако усмерена да сви вектори брзине пролазе кроз тачку O. Угао α сматрати познатим. Колике су сила потиска које стварају ова два млазника?



Слика 3. Два типа млазника (трећи задатак)

4. Вода ($\rho = 1000\,\mathrm{kg/m^3}$) истиче радијално у атмосферу кроз процеп који се састоји из два полу-диска ширине $h = 2\,\mathrm{cm}$, и полупречника $R = 1\,\mathrm{m}$. Интензитет брзине у излазном пресеку је константан и износи $U_2 = 1.5\,\mathrm{m/s}$, док је пречник доводне цеви $d = 150\,\mathrm{mm}$. Одредити: **(а)** брзину U_1 у доводној цеви; **(б)** компоненте F_x и F_y силе $\vec{F}$ којом треба деловати са задње стране процепа тако да не дође до његовог померања по хоризонталној, идеално глаткој подлози.





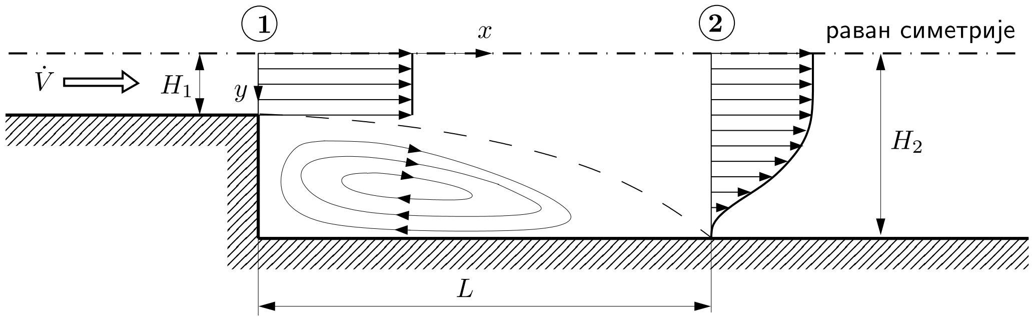
Слика 4. Четврти задатак.

Напомена уз 3. и 4. задатак: За рачунање одговарајућих флуксева кроз карактеристичне површи, водити рачуна да је векторско поље јединичних нормала тих површи нехомогено.

5. На слици је приказано турбулентно струјање кроз канал са наглом променом попречног пресека, или у литератури још и познато и као струјање преко степеника (енг. backward facing step). Услед нагле промене попречног пресека, долази до формирања повратног или рециркулационог струјања, тј. формирања макро-вртлога у зони приказаној на слици. Након дужине L која се назива и дужина спајања формира се профил брзине у коме нема повратног струјања (пресек 2). У пресеку 1 се може сматрати да је профил временски осредњене брзине униформан, док се зони повратног струјања, далеко од пресека 1, као и у пресеку 2 он може апроксимирати изразом

$$\overline{u}(x,y) = \sqrt{\frac{K}{x}}\frac{1}{\cosh^2\left(\sigma\frac{y}{x}\right)},$$

где су K и σ реалне, позитивне константе (K је димензијска константа, док је σ бездимензијска константа).



Слика 5. Дводимензијско струјање у наглом проширењу (пети задатак).

(а) Израчунати средњу брзину струјања у пресеку 1, и одредити константу K у изразу за профил брзине.

(б) Применом интегралног облика једначине количине кретања, одредити и израчунати колики је пораст притиска $\Delta p = p_2 - p_1$ између пресека 1 и 2. Сматрати да је у пресецима 1 и 2 расподела притиска униформна. Занемарити све утицаје вискозности и сматрати да на вертикалном зиду влада притисак једнак притиску у пресеку 1.

(в) Одредити израз за смицајни напон на доњем хоризонталном зиду у зони $0 \leq x \leq L$, и написати израз из кога се може одредити пораст притиска $\Delta p = p_2 - p_1$ ако се тај напон узме у обзир.

Дати подаци: $\sigma = 7{,}67$; $\dot{V}_l = 0{,}3\,\mathrm{m^2/s}$; $H_1 = 0{,}02\,\mathrm{m}$; $H_2 = 10H_1 = 0{,}2\,\mathrm{m}$; $L = 23H_1 = 0{,}46\,\mathrm{m}$; $\rho = 1000\,\mathrm{kg/m^3}$ и $\nu = 10^{-6}\,\mathrm{m^2/s}$.

МАТЕМАТИЧКА ДОПУНА: хиперболичке тригонометријске функције

Дефиниције : $\cosh(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \sinh(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \tanh(x) = \dfrac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$

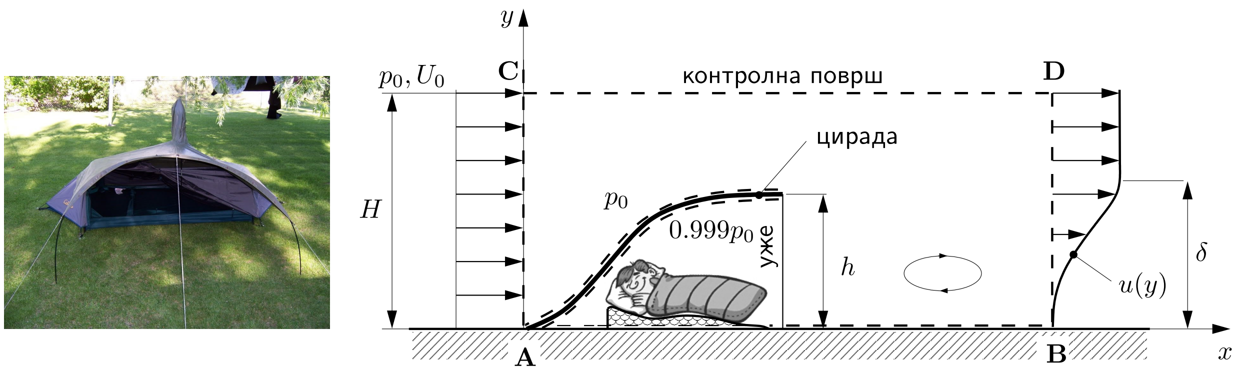
Неки изводи: $\sinh'(x) \equiv \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[\sinh(x)] = \cosh(x), \qquad \cosh'(\mathrm{x}) = \sinh(x)$

Решење интеграла: $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\cosh^{\mathrm{n}}(ax)} = \frac{\sinh(ax)}{a(n-1)\cosh^{n-1}(ax)} + \frac{n-2}{n-1}\int \frac{\mathrm{d}x}{\cosh^{n-2}(ax)}$

6. Пред надолазећу летњу кишу, алпиниста је подигао заклон, тј. натстрешницу или цираду - види слику 4. Цирада је изложена дејству ветра константне брзине U_0. Приликом опструјавања, долази до одвајања флуидне струје са врха цираде, и иза ње, на површи BD се формира профил брзине одређен изразом

$$u(y) = \begin{cases} \dfrac{U_0}{2}\left[1 - \cos\left(\pi \dfrac{y}{\delta}\right)\right], & \text{за} \quad 0 \leqslant y \leqslant \delta \\[2ex] U_0, & \text{за} \quad y > \delta \end{cases}$$

Следеће претпоставке су испуњене: струјање се разматра као раванско и нестишљиво, утицај силе гравитације на струјање се може занемарити, као и смицајни напон на целој површи AB. Такође, поље притиска је такво да је на свим контролним површима он једнак p_0, изузев на унутрашњој страни цираде где је он једнак $0.99p_0$.



Слика 6. Дејство ветра на импровизовани шатор (шести задатак).

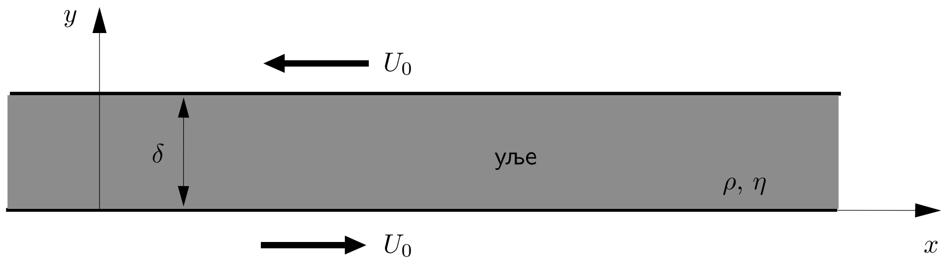
Познати су следећи подаци: $\rho = 1.2\,\mathrm{kg/m^3}$, $U_0 = 10\,\mathrm{m/s}$, $p_0 = 92\,\mathrm{kPa}$, $H = 2.5\,\mathrm{m}$, $\delta = 1.5\,\mathrm{m}$, $h = 1\,\mathrm{m}$.

(а) Израчунати масени проток по јединици ширине кроз површ CD.

(б) Израчунати хоризонталну компоненту вискозне силе по јединици ширине којом ваздух делује на цираду. Нормални напон услед вискозности τ_{xx} на површима AC и BD се могу занемарити. На површи CD је $u = U_0$. Сматрати да у ужету не постоји компонента силе у x - правцу.

Примена диференцијалних облика основних једначина

7. Посматра се раванско, стационарно ламинарно струјање уља између хоризонталних паралелних плоча које се налазе на растојању δ. Растојање δ је веома мало, тако да се утицај силе гравитације може занемарити, док је градијент притиска $\mathrm{d}p/\mathrm{d}x < 0$ (притисак опада у позитивном смеру x-осе).



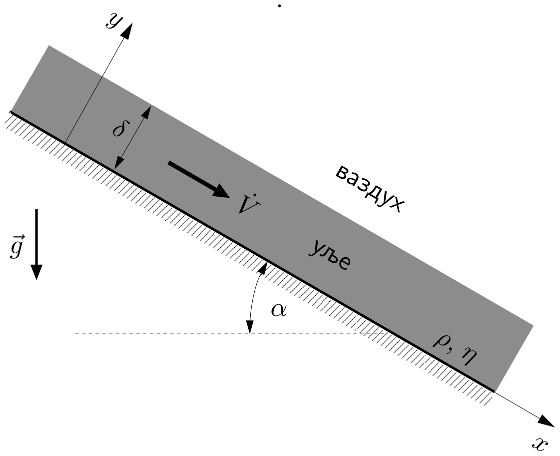
Обе плоче се померају у хоризонталној равни, на начин приказан на слици, константном брзином U_0.

(а) Одредити израз за профил брзине у простору између плоча.

(б) На ком растојању од доње плоче аксијална брзина има максималну вредност?

(в) Нацртати расподелу смицајног напона у простору између плоча. На ком месту он има максималну вредност?

8. Танак слој уља густине ρ и вискозности η клизи низ стрму раван, која је нагнута под углом α у односу на хоризонталу. Може се сматрати да је дебљина слоја константна и једнака δ.



Слика 7. Седми задатак

Такође, задовољени су и следећи услови:

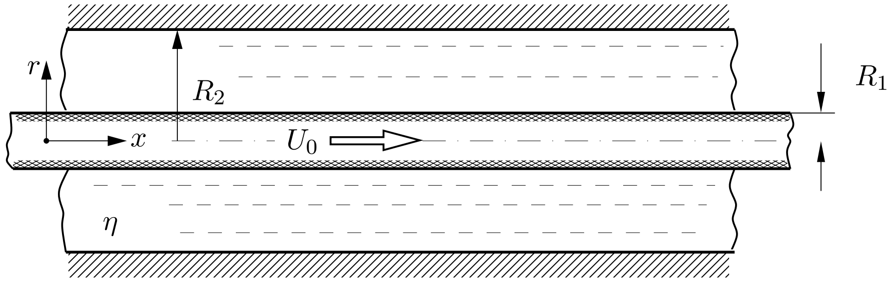
- струјање је раванско и ламинарно;
- струјање је стационарно;
- струјање је потпуно развијено;
- градијент поља притиска у правцу струјања се може занемарити, тј. струјање се одвија само под утицајем силе гравитације;
- на разделној површи између уља и ваздуха смицајни површински напон се може занемарити ($\tau = 0$ за $y = \delta$).

(а) Полазећи од општих облика једначине континуитета и пројекција Навије-Стоксове једначине на правце координатних оса x и y, коришћењем датих услова, извршити анализу одговарајућих чланова и написати на који систем једначина се своди полазни систем једначина у овом случају.

(б) Решити једначине добијене у тачки (а) уз одговарајуће граничне услове, и одредити израз за профил брзине у правцу x-осе (пројекција u). Одредити и израз за запремински проток у уљном филму.

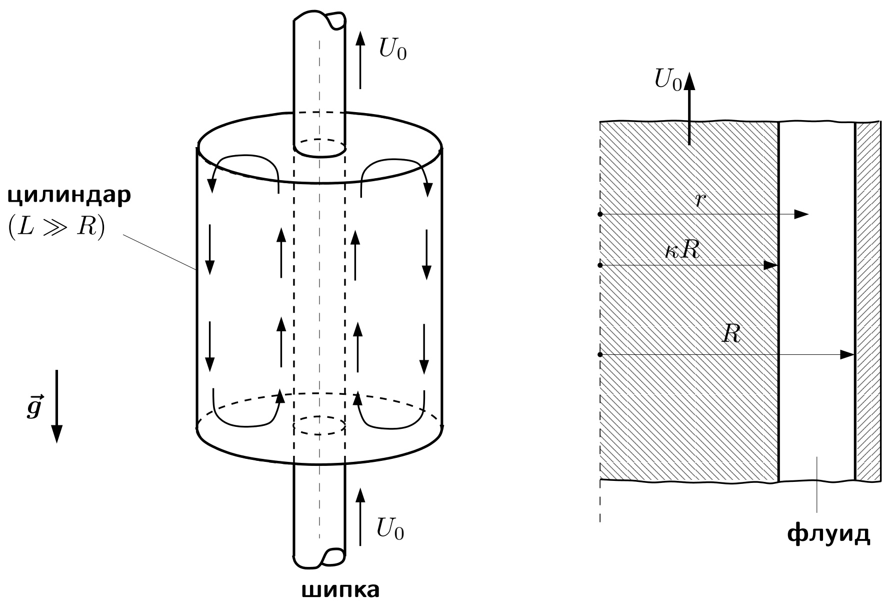
9. Одредити израз за спољашњим момент силе којом треба деловати на вертикални цилиндар, дужине L и полупречника R да би се обртао константном угаоном брзином ω у неограниченој течности динамичке вискозности η? Сматрати да је струјање течности ламинарно.

10. Канал прстенастог попречног пресека између два саосна цилиндра $R_1 = 0.02\,\mathrm{m}$ и $R_2 = 0.032\,\mathrm{m}$, испуњен је течношћу вискозности $\eta = 0.2\,\mathrm{Pa\,s}$. Унутрашњи цилиндар се креће константном брзином $U_0 = 0.5\,\mathrm{m/s}$ у хоризонталном правцу. Одредити закон промене аксијалне брзине $u = u(r)$, као и силу трења F_{tr} на површи унутрашњег цилиндра, на дужини $L = 1\,\mathrm{m}$. Занемарити утицај гравитације и сматрати да је поље притиска хомогено у читавом струјном пољу, као и да је струјање ламинарно.



Слика 8. Аксијално струјање између два саосна цилиндра (девети задатак).

11. Шипка полупречника $\varkappa R$ $(0 < \varkappa < 1)$ креће се вертикално навише константном брзином U_0 кроз дугачак цилиндрични суд полупречника R $(L \gg R)$ у коме се налази течност густине ρ и вискозности η. Течност се циркулише у цилиндру, тј. у близини шипке се креће вертикално навише, док се у близини непокретног зида цилиндра креће вертикално наниже. Струјања оваквог типа се одвијају у клипним струјним машинама или пак у клизним лежајевима.



Разматра се случај где је $\varkappa$ мало мање од јединице, тј. случај веома малог растојања између шипке и унутрашњег зида цилиндра. При томе се може сматрати да закривљеност геометрије нема утицаја, тј. проблем се може разматрати као равански (види слику десно) - као да се ради о струјању између једне покретне и једне непокретне плоче. Показати да је профил брзине у флуиду одређен изразом:

$$\frac{u}{U_0} = 3\left(\frac{\xi - \varkappa}{1 - \varkappa}\right)^2 - 4\left(\frac{\xi - \varkappa}{1 - \varkappa}\right) + 1$$

при чему је $\xi = r/R$.

Нека теоријска питања

11. Написати следеће изразе у индексном запису (индексној нотацији):

$$\nabla\cdot(p\vec{U}), \quad \vec{U}\cdot\nabla\vec{U}, \quad (\nabla\vec{U})\cdot\vec{U}, \quad \nabla(\vec{U}\cdot\vec{U}), \quad \nabla\cdot(\vec{U}\vec{U}), \quad \vec{U}\cdot\widetilde{T}\cdot\vec{U}, \quad \widetilde{T}\cdot\nabla\vec{U}, \quad \widetilde{T}:\widetilde{T}$$

где су p - притисак, $\vec{U}$ - брзина и $\widetilde{T}$ симетрични тензор другог реда.

12. Полазећи од индексног записа једначине количине кретања непрекидне средине

$$\rho\left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right) = \rho f_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}$$

извести индексни запис једначине кинетичке енергије (множењем дате једначине са u_i).

13. Један од облика једначине унутрашње енергије јее

$$\rho\frac{\mathrm{D}e}{\mathrm{D}t} = -p\,\frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \Phi - \frac{\partial q_i}{\partial x_i}$$

Доказати да се увођењем енталпије (дефинисане са $h = e + p/\rho$) једначина (13) своди на

$$\rho\frac{\mathrm{D}h}{\mathrm{D}t} = \frac{\mathrm{D}p}{\mathrm{D}t} + \Phi - \frac{\partial q_i}{\partial x_i}$$