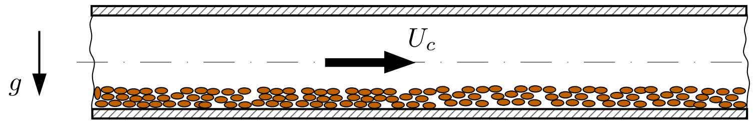
Машински факултет Београд
Катедра за механику флуида

МЕХАНИКА ФЛУИДА М

Димензијска анализа и теорија сличности

1. Танак слој честица лежи на дну хоризонталне цеви. При одређеној брзини струјања нестишљивог флуида, означеној са u_c (критична брзина), доћи ће до подизања честица и њиховог транспорта кроз цев флуидном струјом. Може се претпоставити да критична брзина U_c зависи од следећих параметара: $U_c = U_c\left(D, d, \rho, \rho_p, \eta, g\right)$, где су: D - пречник цеви, d - пречник честица, ρ - густина флуида, ρ_p - густина честица, η - динамичка вискозност флуида и g - убрзање силе Земљине теже.

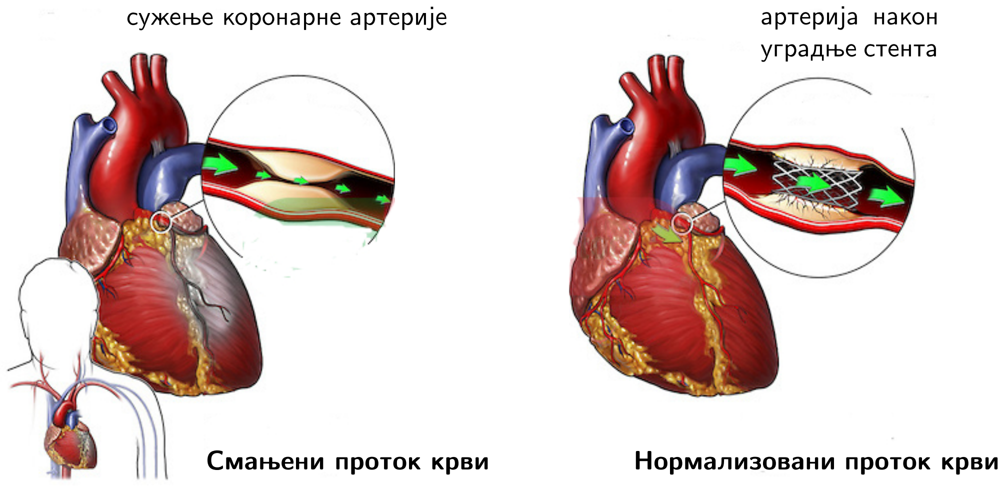


Слика 1. Први задатак.

(а) Поступком димензијске анализе (применом π-теореме) одредити карактеристичне бездимензијске величине (π-мономе).

(б) Одређивање критичне брзине на објекту (прототипу) се врши експериментално мерењем критичне брзине на одговарајућем моделу. Све димензије на моделу су умањене два пута, а обе густине (флуид и честице) су једнаке као и на објекту. Ако је на моделу измерена критична брзина $u_{c,m} = 5\,\mathrm{m/s}$, колика је критична брзина на објекту?

2. Циљ истраживања је одређивање смицајних напона на коронарном стенту унутрашњег пречника $2\,\mathrm{mm}$ који се уграђује у крвни суд пацијента оболелог од артеросклерозе. У телу пацијента, максимални запремински проток крви је $0{,}157\,\mathrm{ml/s}$, док његово срце „пумпа“ крв кроз крвне судове са фреквенцијом од $1{,}1\,\mathrm{Hz}$. Физичка својства крви су: густина $1100\,\mathrm{kg/m^3}$ и динамичка вискозност $0{,}005\,\mathrm{Pas}$. У овом проблему се може сматрати да се крв понаша као њутновски флуид. Одређивање смицајних напона се врши на моделу стента пречника $1\,\mathrm{cm}$ и користи се вода као радни флуид ($1000\,\mathrm{kg/m^3}$, $0{,}001\,\mathrm{Pas}$), док се рад срца моделира одговарајућом клипном пумпом. Одредити максимални запремински проток на моделу, како и фреквенцију рада клипне пумпе тако да услови хидродинамичке сличности на објекту и моделу буду задовољени.



Слика 2. Илустрација уз други задатак.

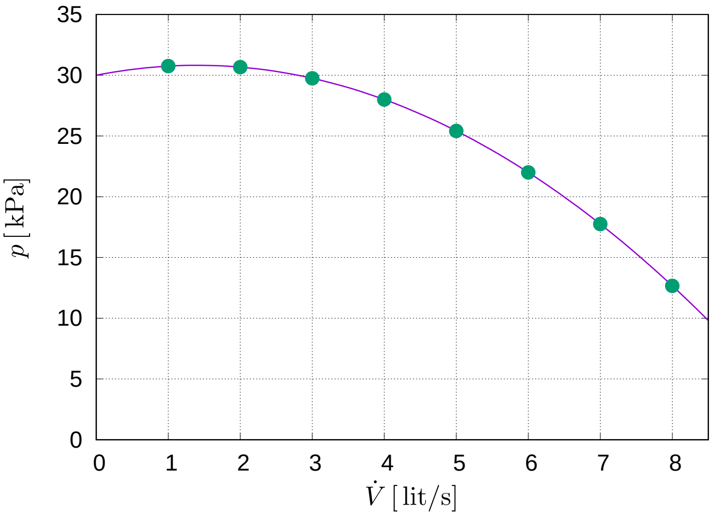
3. Пораст притиска Δp у центрифугалној пумпи се може представити генералном зависношћу

$$\Delta p = \Delta p\left(D, \omega, \rho, \dot{V}\right),$$

где је D пречник радног кола пумпе, ω угаона брзина обртања вратила радног кола, ρ густина флуида и $\dot{V}$ запремински проток кроз пумпу.

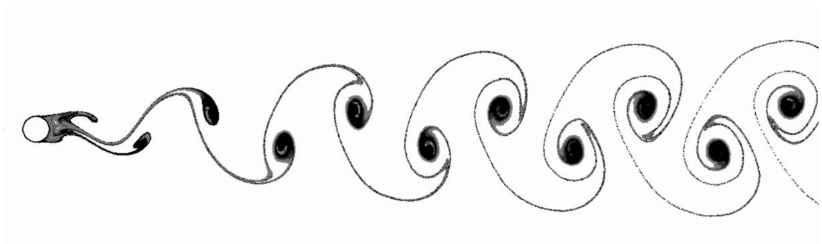
(а) Поступком димензијске анализе извести зависност између карактеристичних бездимензијских π - монома за овај случај.

(б) Модел пумпе има пречник радног кола $D_m = 200\,\mathrm{mm}$ и тестира се у лабораторији са водом као радним флуидом. Испитивањем тог модела пумпе у режиму рада са угаоном брзином $\omega_m = 40\pi\,\mathrm{rad/s}$, добијена је њена радна крива приказана на слици 3. Уз коришћење ове криве и резултата добијених под (а), потребно је одредити пораст притиска прототипа пумпе (објекат) која треба да ради са запреминским протоком $\dot{V} = 25.31\,\mathrm{lit/s}$, при броју обртаја $\omega = 60\pi\,\mathrm{rad/s}$. Димензија радног кола прототипа пумпе је $D = 300\,\mathrm{mm}$, и она, као и модел, ради са водом као радним флуидом.



Слика 3. Трећи задатак.

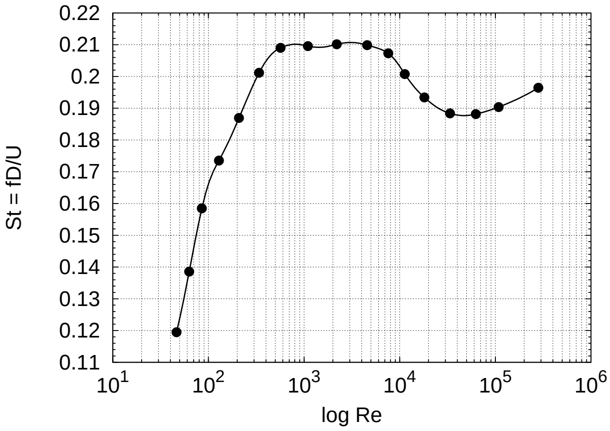
4. Приликом опструјавања цилиндра, може доћи до формирања вртлога и њихових периодичних одвајања од површи тела. На слици 2 је приказана чувена Карманова вртложна улица у којој је приказана периодична структура макровртлога у зони иза цилиндра (вртложни траг).



Слика 3. Карманова вртложна улица при опструјавању кружног цилиндра.

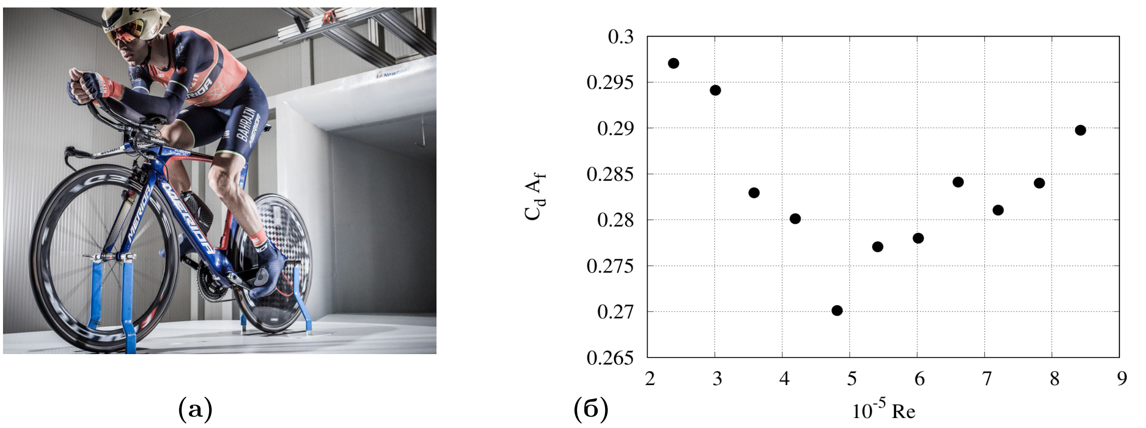
Периодично одвајање вртлога ствара осцилаторни карактер силе којом је цилиндар изложен. У случају да се фреквенција одвајања вртлога поклапа са сопственом фреквенцом цилиндра, онда може доћи до јако нежељене појаве резонанце, када се амплитуда силе која делује на цилиндар повећава директно пропорционално времену.

(а) Потребно је одредити зависност фреквенције одвајања вртлога од утицајних параметара применом димензијске анализе. Претпоставити да та фреквенција f зависи од пречника цилиндра D, брзине опструјавања U, густине флуида ρ, као и његове динамичке вискозности η. Применом π-теореме одредити карактеристичне бездимензијске мономе. **(б)** Резултати екперимената у којима је мерена фреквенција f су приказани на слици 3. На основу резултата добијенод под (а) објаснити да ли је ова крива универзална, тј. да ли се на основу ње може одредити фреквенција f за било који цилиндар који се опструјава било којим флуидом?



Слика 4. Резултати експерименталних испитивања.

5. У професионалном бициклизму одређивање силе отпора F_d којом је изложен бициклиста при свом кретању је један од најважнијих задатака у циљу постизања што бољих резултата (то се посебно односи на такмичења у вожњи на индивидуални хронометар). Њено тачно одређивање је прилично комплексан задатак, али уз помоћ димензијске анализе и експерименталним испитивањима у аеротунелу је могуће добити вредности са задовољавајућом тачношћу.



Слика 5. **(а)** Виђенцо Нибали из тима Бахреин Мерида у аеротунелу; **(б)** Карактеристични дијаграм добијен експерименталним испитивањем силе отпора у аеротунелу.

(а) Претпоставити да сила отпора F_d зависи од брзине кретања бициклисте (брзине опструјавања у аеротунелу) U, густине и вискозности ваздуха ρ и η, као и карактеристичне фронталне површине бицикла и бициклисте A_f. Поступком димензијске анализе доћи до карактеристичне зависности за силу отпора F_d.

(б) На слици је приказан дијаграм испитивања силе отпора у аеротунелу, где је приказана зависност производа коефицијента отпора и фронталне површине $C_d A_f$ и Рејнолдсовог броја, при чему су коефицијент отпора C_d и Рејнолдсов број дефинисани изразима:

$$C_d = \frac{F_d}{\frac{1}{2}\rho U^2 A_f} \quad \text{и} \quad \mathrm{Re} = \frac{\rho U \sqrt{A_f}}{\eta}$$

Израчунати колику снагу мора да генерише бициклиста да би се он у условима чеоног ветра од $4\,\mathrm{km/h}$ на равној деоници кретао брзином од $50\,\mathrm{km/h}$. Узети да је: $\rho = 1{,}25\,\mathrm{kg/m^3}$ и $\eta = 1{,}81 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{Pas}$, као и да је фронтална површина $A_f = 0{,}344\,\mathrm{m^2}$.

6. Разматра се пад притиска Δp_L по јединици дужине [Pa/m] при осцилаторном хармонијском кретању ($U = U_0 \sin \omega t$) нестишљивог флуида у цеви. Искуственом анализом проблема, може се доћи до следеће функционалне зависности

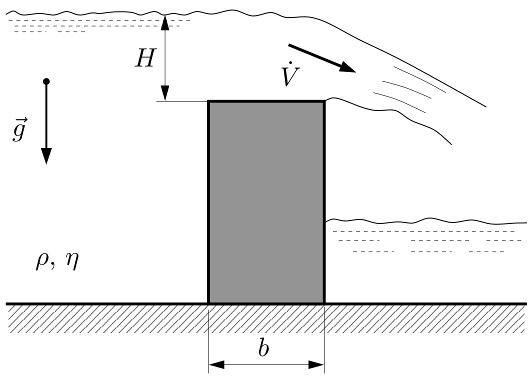
$$\Delta p_L = f(D,\, U_0,\, \omega,\, t,\, \eta,\, \rho),$$

где су: D - пречник цеви, U_0 - средња брзина струјања, ω - фреквенција, t - време, η - динамичка вискозност и ρ - густина флуида.

(а) Применом π-теореме одредити карактеристичне бездимензијске мономе у овом проблему и написати општу функционалну зависност између тих монома.

(б) У сврху експерименталног испитивања, направљен је модел на коме су све димензије умањене четири пута у односу на објекат, и приликом испитивања се користи исти флуид. На објекту фреквенција $\omega = 10\,\mathrm{rad/s}$, а пречник цеви $D = 10\,\mathrm{cm}$. Колика фреквенција треба да буде на моделу би услови динамичке сличности били задовољени?

7. Разматра се струјање воде преко преливне бране неке хидроелектране, при чему је потребно одредити зависност запреминског протока по јединици ширине $\dot{V}$ у функцији осталих карактеристичних величина. Претпоставити да проток $\dot{V}$ зависи од геодезијске висине H, ширине бране b, убрзања силе Земљине теже g, густине ρ и вискозности η. Применом π теореме, одредити бездимензијске π-мономе у овом проблему и приказати тражену зависност у виду зависности између добијених бездимензијских величина. Изабрати величине: b, g и ρ као основне величине приликом одређивања π-монома.



Слика 6. Преливна брана хидроелектране и карактеристичне физичке величине.