МЕХАНИКА ФЛУИДА М

Завршни испит, 3. септембар 2020. год.

Први задатак (15)

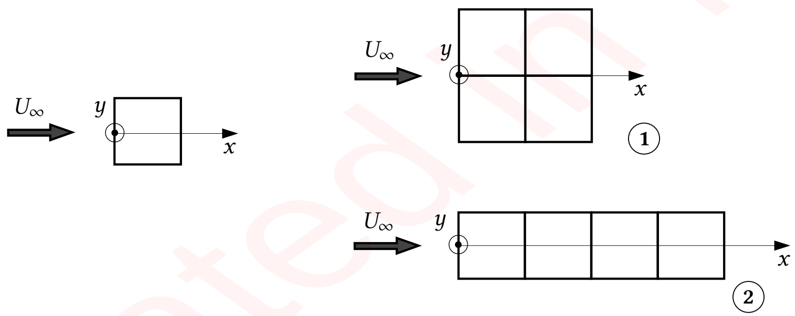
Анализира се уопштени облик једначине унутрашње енергије, записан у инваријантном облику увођењем енталпије h

$$\rho \frac{\mathrm{D}h}{\mathrm{D}t} = \frac{\mathrm{D}p}{\mathrm{D}t} + \widetilde{T} : \nabla\vec{U} - \nabla\cdot\vec{q}$$

(а) Написати леву страну једначине у развијеном облику, и у облику строге форме одржања. **(б)** Написати на који облик се једначина енталпије своди у случају стационарног струјања, и када је вектор топлотног флукса одређен Фуријеовим законом, тј. $\vec{q} = -\lambda\nabla T$, где λ топлотна проводљивост флуида, која се може сматрати константном. **(в)** Написати једначину за услове из претходне тачке у индексној нотацији.

Други задатак (15)

Разматра се опструјавање четири танке равне плоче квадратног облика истим флуидом (ρ, ν) и истом брзином U_∞. Плоче су постављене паралелно са флуидном струјом у две различите формације, означене на слици са 1 и 2.



Слика 1: Опструјавање плоча - **поглед одозго**! Оригинална плоча облика квадрата странице a. У првом случају такве четири плоче формирају нову плочу облика квадрата странице $2a$, док у другом случају оне формирају плочу облика правоугаоника димензија $4a \times a$.

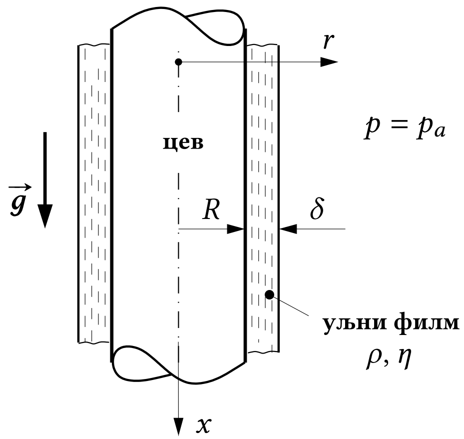
Сматрати да се у свим случајевима формира ламинарни гранични слој, те да је смицајни напон у свим случајевима дефинисан изразом (Блазијусово решење за ламинарни гранични слој на равној плочи):

$$\tau_w = \frac{0.332}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}}\,\rho U_\infty^2, \qquad \mathrm{Re}_x = \frac{U_\infty x}{\nu}$$

У поређењу са силом отпора на само једној квадратној плочи, колико су веће силе отпора у првој, а колико у другој формацији?

Трећи задатак (20)

Танак уљни филм, константне дебљине δ слива са спољашње стране непокретне цеви, спољашњег полупречника R под утицајем гравитације. Може се сматрати да је струјање у уљном филму ламинарно, стационарно, затим осносиметрично и потпуно развијено, као и да је поље притиска у њему хомогено ($p = p_a = \mathrm{const}$). Смицајни напон на разделној површи уљног филма и спољашњег атмосферског ваздуха се може занемарити, односно сматрати да је он једнак нули.



Слика 2: Уљни филм дебљине δ на цеви полупречника R.

(а) Полазећи од једначине континуитета и пројекција Навије-Стоксове једначине на аксијални и радијални правац (x, r) датих у прилогу, извршити њихову анализу за дате услове, и показати на коју обичну диференцијалну једначину се оне своде.

(б) Дефинисати граничне услове за дати проблем, и затим извршити интеграцију једначине добијене под (а) и одредити израз за профил брзине у уљном филму. Величине: R, δ, g, ρ и η сматрати познатим.

Четврти задатак (15)

(а) Написати на шта се своди израз за вискозну дисипацију $\widetilde{T} : \nabla\vec{U}$ за случај струјања њутновског нестишљивог флуида користећи индексну нотацију.

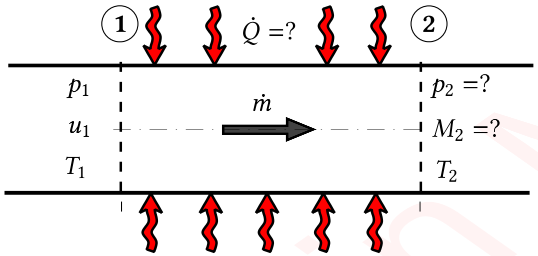
(б) Посматра се стационарно, ламинарно струјање загрејаног уља - нестишљивог, њутновског флуида, у танком процепу између паралелних плоча. Може се сматрати да је $h = c_p T$, где је $c_p = \mathrm{const}$, као и да је струјање потпуно развијено, тако да је поље брзине познато и одређено изразом

$$\vec{U} = u\,\vec{i}, \quad u = u_m\left(1 - \frac{y^2}{H^2}\right)$$

Даље се може сматрати и да су промене температуре у аксијалном x-правцу много мање од промене температуре у попречном, y-правцу, тј. $T = T(y)$. Показати на коју обичну диференцијалну једначину се своди једначина енталпије у овом случају.

Пети задатак (15)

Ваздух, чије је стање у пресеку 1 одређено са $p_1 = 95\,\mathrm{kPa}$, $t_1 = 27\,^\circ\mathrm{C}$ и $u_1 = 120\,\mathrm{m/s}$ струји кроз цев константног пречника $D = 50\,\mathrm{mm}$. Између пресека 1 и 2 ваздух се равномерно загрева константним топлотним флуксом.



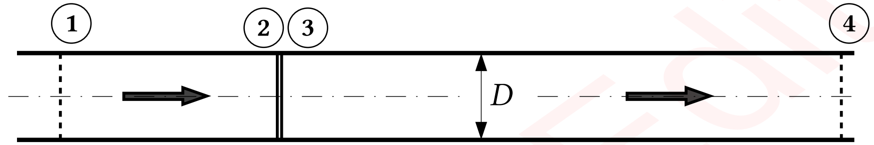
Слика 3: Струјање гаса са довођењем топлоте.

Израчунати колики мора бити вредност топлотног флукса $\dot{Q}$ да би се у пресеку 2 достигла температура $t_2 = 300\,^\circ\mathrm{C}$. Израчунати и притисак и Махов број у пресеку 2. Занемарити утицај трења.

Шести задатак (20)

Ваздух ($M_1 = 2.5$, $T_1 = 300\,\mathrm{K}$ и $p_1 = 70\,\mathrm{kPa}$) улази у адијабатски изоловану цев константног пречника $D = 2\,\mathrm{cm}$. На месту у цеви где је Махов број једнак 2 формира се прав ударни талас. Вредност Маховог броја на излазу из цеви износи $M_4 = 0.8$, а средњи коефицијент трења је $\lambda = 0.02$. Израчунати:

(а) дужину L_{12} од улаза цеви до места где се јавља прав ударни талас, укупну дужину цеви L_{14} и притисак у пресеку 4.



Слика 4: Струјање гаса кроз адијабатски изоловану цев са појавом ударног таласа.

(б) Скицирати расподелу Маховог броја и расподелу притиска дуж цеви.

(в) Скицирати промене стања ваздуха (1-2-3-4) при овом струјању у $T - s$ дијаграму (дуж Фанове криве).

Прилог

Трећи задатак. Векторско поље брзине дефинисано преко пројекција у поларно-цилиндричном координатном систему за случај осносиметричног струјања (обимска брзина $w = 0$, као и $\frac{\partial}{\partial\varphi} = 0$):

$$\vec{U} = u\,\vec{i} + v\vec{e}_r$$

где је u аксијална, а v радијална брзина. Уопштени систем једначина који описује струјање њутновског нестишљивог флуида под тим условима чине једначина континуитета облика

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv) = 0 \tag{1}$$

и пројекције Навије-Стоксове једначине на аксијални и радијални правац

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial r}\right) = \rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \eta\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)\right] \tag{2}$$

$$\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial r}\right) = \rho g_r - \frac{\partial p}{\partial r} + \eta\left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv)\right)\right] \tag{3}$$

- Испит траје 180 минута. Напуштање сале је могуће након 60 минута од почетка испита. Овај формулар се предаје заједно са радном свеском! Коначан број поена се добија множењем освојених поена са корекционим фактором 0.7.
- Резултати ће бити објављени у петак, 4. септембра у 16 часова на интернет страници предмета.

Предметни наставници:

Александар Ћоћић и Милан Лечић.

РЕШЕЊА

1. $\rho\frac{Dh}{Dt} = \frac{Dp}{Dt} + \tilde{T}:\nabla\vec{U} - \nabla\cdot\vec{q}$

(а) $\rho\frac{Dh}{Dt} = \rho\underbrace{\left(\frac{\partial h}{\partial t} + \vec{U}\cdot\nabla h\right)}_{\frac{Dh}{Dt}} = \rho\frac{\partial h}{\partial t} + \rho\vec{U}\cdot\nabla h =$

$$= \frac{\partial(\rho h)}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\vec{U}h) - h\underbrace{\left[\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\vec{U})\right]}_{=0\ (\text{јед. контин.})}$$

$$\rightarrow \boxed{\rho\frac{Dh}{Dt} = \frac{\partial(\rho h)}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\vec{U}h)}$$

(б) Развијени облик полазне једначине

$$\frac{\partial(\rho h)}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\vec{U}h) = \frac{\partial p}{\partial t} + \vec{U}\cdot\nabla p + \tilde{T}:\nabla\vec{U} - \nabla\cdot\vec{q}$$

За стационарно струјање: $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ и $\vec{q} = -\lambda\nabla T$

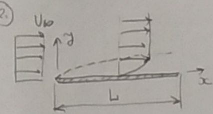
$$\Rightarrow \nabla\cdot(\rho\vec{U}h) = \vec{U}\cdot\nabla p + \tilde{T}:\nabla\vec{U} + \nabla\cdot(\lambda\nabla T)$$

$$\boxed{\nabla\cdot(\rho\vec{U}h) = \vec{U}\cdot\nabla p + \tilde{T}:\nabla\vec{U} + \lambda\nabla^2 T}$$

(в) Запис у индексној нотацији

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x_i}(\rho h u_i) = u_i\frac{\partial p}{\partial x_i} + \tau_{ij}\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \lambda\frac{\partial^2 T}{\partial x_i\partial x_i}}$$

2.



$$\tau_w = \frac{0{,}332}{\sqrt{Re_x}}\rho U_\infty^2$$

$$\tau_w = \frac{0{,}332}{\sqrt{\frac{U_\infty x}{\nu}}}\rho U_\infty^2$$

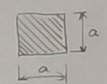
$$\tau_w = \underbrace{0{,}332\,\rho\,\nu^{1/2}\,U_\infty^{3/2}}_{k\text{ – димензиона константа}}\,x^{-1/2} = k\,x^{-1/2} = \frac{k}{\sqrt{x}}$$

Сила отпора која делује на плочу

$$F_D = \iint_A \tau_w\,dA = \int_0^L \tau_w(x)\underbrace{b\,dx}_{dA}, \quad b\text{ – ширина плоче}$$

$$F_D = b\int_0^L\frac{k}{\sqrt{x}}dx = bk\left.\frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}\right|_0^L = 2bk\sqrt{L}$$

$$\rightarrow \underbrace{F_D \propto b}_{\text{ширина плоче}} \qquad \underbrace{F_D\propto\sqrt{L}}_{\text{дужина плоче}}$$



$L = a,\ b = a$

$F_D = 2k\,a\sqrt{a}$

1. $L = 2a, \quad b = 2a$

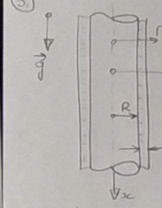
$F_{D,1} = 2k\,2a\sqrt{2a} = 4\sqrt{2}\,ka\sqrt{a}$

2. $L = 4a, \quad b = a$

$F_{D,2} = 2k\,a\sqrt{4a} = 4ka\sqrt{a}$

$$\boxed{\frac{F_{D1}}{F_D} = \frac{4\sqrt{2}\,k\,a\sqrt{a}}{2k\,a\sqrt{a}} = 2\sqrt{2}} \qquad \boxed{\frac{F_{D2}}{F_D} = 2}$$

3.



Ламинарно струјање
– струјнице паралелне

$\vec{U} = u\vec{i}, \quad \boxed{v = 0}$

Једначина континуитета

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\cancel{v}) = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \rightarrow \boxed{u = u(r)}$$

$$\rho\left(\underbrace{\cancel{\frac{\partial u}{\partial t}}}_{\text{стацион.}} + \underbrace{u\cancel{\frac{\partial u}{\partial x}}}_{\text{јед. конт.}} + \cancel{v}\frac{\partial u}{\partial r}\right) = \rho g_x - \cancel{\frac{\partial p}{\partial x}} + \eta\left[\cancel{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)\right], \quad g_x = g$$

$(p = \text{const})$

$$\Rightarrow \boxed{\rho g + \eta\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{du}{dr}\right) = 0}$$

Пројекција на r-правац даје идентитет $0 = 0$!

(б) Гранични услови

$\boxed{r = R:\quad u = 0}$

$\boxed{r = R+\delta}:\quad \tilde{\tau} = \eta\frac{du}{dy} = 0 \rightarrow \boxed{\frac{du}{dy} = 0}$

Диференцијална једначина

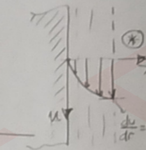
$$\frac{d}{dr}\left(r\frac{du}{dr}\right) = -\frac{\rho g}{\eta}r \Rightarrow r\frac{du}{dr} = -\frac{\rho g}{\eta}\frac{r^2}{2} + C_1$$

$$\rightarrow \frac{du}{dr} = -\frac{\rho g}{2\eta}r + \frac{C_1}{r}$$

$$u(r) = -\frac{\rho g}{2\eta}\int r\,dr + C_1\int\frac{dr}{r} + C_2$$

$$\rightarrow \boxed{u(r) = -\frac{\rho g}{4\eta}r^2 + C_1\ln r + C_2}$$

Константе C_1 и C_2 одређујемо из граничних услова



$$0 = -\frac{\rho g}{4\eta}R^2 + C_1\ln R + C_2$$

$$0 = -\frac{\rho g}{2\eta}(R+\delta) + \frac{C_1}{R+\delta}$$

$$\Rightarrow C_1 = \frac{\rho g}{2\eta}(R+\delta)^2$$

$$C_2 = \frac{\rho g}{4\eta}R^2 - \frac{\rho g}{2\eta}(R+\delta)^2\ln R$$

Коначно, израз за профил брзине

$$u(r) = -\frac{\rho g}{4\eta}r^2 + \frac{\rho g}{4\eta}R^2 + \frac{\rho g}{2\eta}(R+\delta)^2\ln r - \frac{\rho g}{2\eta}(R+\delta)^2\ln R$$

(*)

$$\rightarrow \boxed{u(r) = \frac{\rho g R^2}{4\eta}\left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right] + \frac{\rho g}{2\eta}(R+\delta)^2\ln\left(\frac{r}{R}\right)}$$

4. Њутновски нестишљиви флуид: $\tau_{ij} = 2\eta S_{ij}$

$$\tilde{T}:\nabla\vec{U} = \tau_{ij}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$$

Тензор $\tilde{T}$ је симетричан тензор: $\tau_{ij} = \tau_{ji}$

$$\tau_{ij}\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{1}{2}\tau_{ij}\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{1}{2}\underbrace{\tau_{ij}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}}_{\text{замена индекса}} =$$

$$= \frac{1}{2}\tau_{ij}\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \underbrace{\frac{1}{2}\tau_{ji}\frac{\partial u_j}{\partial x_i}}_{\text{симетричан тензор } \tau_{ij} = \tau_{ji}}$$

$$= \frac{1}{2}\tau_{ij}\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{1}{2}\tau_{ij}\frac{\partial u_j}{\partial x_i}$$

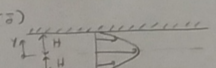
$$= \tau_{ij}\underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)}_{S_{ij}} \equiv \tau_{ij}S_{ij}$$

Даље користећи израз за вискозну дисипацију је:

$$\tilde{T}:\nabla\vec{U} = \tau_{ij}\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \tau_{ij}S_{ij}$$

За њутновски флуид, нестишљив: $\boxed{\tilde{T}:\nabla\vec{U} = 2\eta S_{ij}S_{ij}}$

(б)



$\vec{U} = u\vec{i}, \quad u = u_m\left(1 - \frac{y^2}{H^2}\right)$

Постоји само једна компонента тензора брзине деформације

$$S_{12} = \frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial y} = -u_m\frac{y}{H^2}$$

$$\tilde{T}:\nabla\vec{U} = 2\eta S_{12}S_{12} = 2\eta\frac{u_m}{H^4}y^2$$

Полазимо од једначине енталпије за стационарно струјање, флуид је нестишљив

$$\nabla\cdot(\rho\vec{U}h) = \vec{U}\cdot\nabla p + \tilde{T}:\nabla\vec{U} + \lambda\nabla^2 T$$

$$\rho\vec{U}\cdot\nabla h = \vec{U}\cdot\nabla p + \tilde{T}:\nabla\vec{U} + \lambda\nabla^2 T$$

Разматрамо проблем: $\vec{U} = u\vec{i}, \quad v = w = 0$

$$\rho u\frac{\partial h}{\partial x} = u\frac{\partial p}{\partial x} + 2\eta\frac{u_m}{H^4}y^2 + \lambda\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right)$$

$$h = c_p T, \quad T \approx T(y), \quad c_p = \text{const}$$

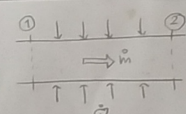
$$0 = u\frac{dp}{dx} + 2\eta\frac{u_m}{H^4}y^2 + \lambda\frac{d^2 T}{dy^2}$$

$$\frac{dp}{dx} = -k = \text{const} \quad (\text{јер потпуно развијено струјање})$$

$$0 = -ku_m\left(1 - \frac{y^2}{H^2}\right) + 2\eta\frac{u_m}{H^4}y^2 + \lambda\frac{d^2 T}{dy^2}$$

$$\frac{d^2 T}{dy^2} = \frac{ku_m}{\lambda}\left[1 - \left(\frac{y}{H}\right)^2\right] - \frac{2\eta u_m}{H^2}\left(\frac{y}{H}\right)^2$$

5.



Пресек 1

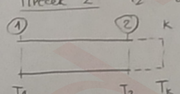
$$M_1 = \frac{u_1}{c_1} = \frac{u_1}{\sqrt{\varkappa RT_1}}$$

$$T_1 = t_1 + 273 = 27 + 273 = 300\,K$$

$$\boxed{M_1} = \frac{120}{\sqrt{1{,}4\cdot287\cdot300}} = \boxed{0{,}346}$$

$$\boxed{T_{a1}} = T_1 + \frac{u_1^2}{2c_p} = 300 + \frac{120^2}{2\cdot1004{,}5} = \boxed{307{,}2\,K}$$

Пресек 2: $T_2 = t_2 + 273 = 300 + 273 = 573\,K$



$$M_1 = 0{,}346: \quad \frac{T_1}{T_k} = 0{,}5058$$

$$\frac{T_2}{T_k} = \frac{T_2}{T_1}\frac{T_1}{T_k} = \frac{573}{300}\,0{,}5058$$

$$\frac{T_2}{T_k} = 0{,}9661 \xrightarrow[\text{дозвучна вредност}]{} \boxed{M_2 = 0{,}657}$$

$$M_2 = 0{,}657: \quad \frac{p_2}{p_k} = 1{,}4957$$

$$p_2 = \frac{p_2}{p_k}\frac{p_k}{p_1}p_1 = \frac{p_2/p_k}{p_1/p_k}p_1 = \frac{1{,}4957}{2{,}055}\,95\cdot10^3$$

$$\rightarrow \boxed{p_2 = 69{,}144\,kPa}$$

$$M_2 = 0{,}657: \quad \frac{T_{a2}}{T_2} = 1{,}0863 \rightarrow T_{a2} = 1{,}0863\,T_2$$

$$\boxed{T_{a2}} = 1{,}0863\cdot573 = \boxed{622{,}45\,K}$$

Топлотни флукс

$$\dot{Q} = \dot{m}c_p(T_{a2} - T_{a1})$$

$$\dot{m} = \rho_1 u_1\frac{D^2\pi}{4} = \rho_2 u_2\frac{D^2\pi}{4}$$

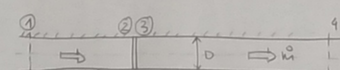
$$\dot{m} = \frac{p_1}{RT_1}u_1\frac{D^2\pi}{4} = \frac{95\cdot10^3}{287\cdot300}\cdot120\cdot\frac{0{,}05^2\pi}{4}$$

$$= 0{,}26\ kg/s$$

$$\dot{Q} = 0{,}26\cdot1004{,}5\cdot(622{,}45 - 307{,}2)$$

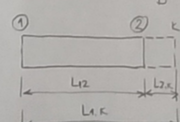
$$\Rightarrow \boxed{\dot{Q} = 82{,}333\,kW}$$

6.



$M_1 = 2{,}5: \quad \lambda\frac{L_{1,k}}{D} = 0{,}43198, \quad \frac{p_1}{p_k} = 0{,}2921$

$M_2 = 2: \quad \lambda\frac{L_{2,k}}{D} = 0{,}305, \quad \frac{p_2}{p_k} = 0{,}4082$



$$L_{12} = L_{1,k} - L_{2,k} \;/\; \frac{\lambda}{D}$$

$$\lambda\frac{L_{12}}{D} = \lambda\frac{L_{1,k}}{D} - \lambda\frac{L_{2,k}}{D}$$

$$L_{12} = \frac{D}{\lambda}\left(\lambda\frac{L_{1,k}}{D} - \lambda\frac{L_{2,k}}{D}\right)$$

$$L_{12} = \frac{0{,}02}{0{,}02}(0{,}43198 - 0{,}305) \rightarrow \boxed{L_{12} = 0{,}127\,m}$$

$$p_2 = \frac{p_2}{p_k}\frac{p_k}{p_1}p_1 = \frac{0{,}4082}{0{,}2921}\cdot70 \rightarrow \boxed{p_2 = 97{,}823\,kPa}$$

$M_2 \,\|\, M_3$

$p_2 \,\|\, p_3$

$M_2 = 2: \quad M_3 = 0{,}5774$

$\frac{p_3}{p_2} = 4{,}5$

$$\rightarrow p_3 = 4{,}5\cdot97{,}823 \rightarrow \boxed{p_3 = 440{,}2\,kPa}$$

Струјање 3-4: дозвучно адијабатско струјање

$M_3 = 0{,}5774: \quad \lambda\frac{L_{3,k}}{D} = 0{,}5876, \quad \frac{p_3}{p_k} = 1{,}8369$

$M_4 = 0{,}8: \quad \lambda\frac{L_{4,k}}{D} = 0{,}0729 \quad \frac{p_4}{p_k} = 1{,}2893$

$$L_{34} = \frac{D}{\lambda}\left(\lambda\frac{L_{3,k}}{D} - \lambda\frac{L_{4,k}}{D}\right) = \frac{0{,}02}{0{,}02}(0{,}5876 - 0{,}0729)$$

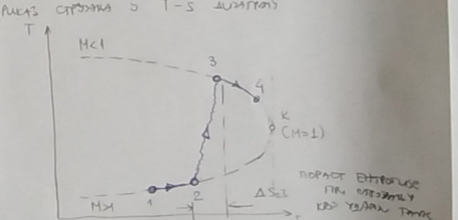
$$\Rightarrow \boxed{L_{34} = 0{,}515\,m}$$

Укупна дужина цеви

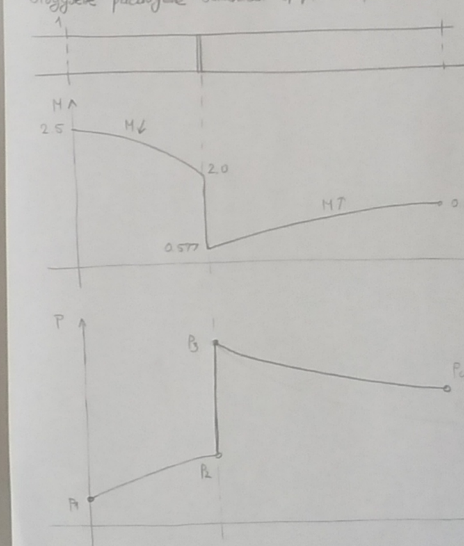
$$\boxed{L_{14}} = L_{12} + L_{34} = 0{,}127 + 0{,}515 = \boxed{0{,}642\,m}$$

$$\boxed{p_4} = \frac{p_4}{p_k}\frac{p_k}{p_3}p_3 = \frac{1{,}2893}{1{,}8369}\,440{,}2 = \boxed{308{,}97\,kPa}$$

Приказ струјања у T-s дијаграму



Подужне расподеле Маховог броја и притиска



А. Ћоћић
acocic@mas.bg.ac.rs