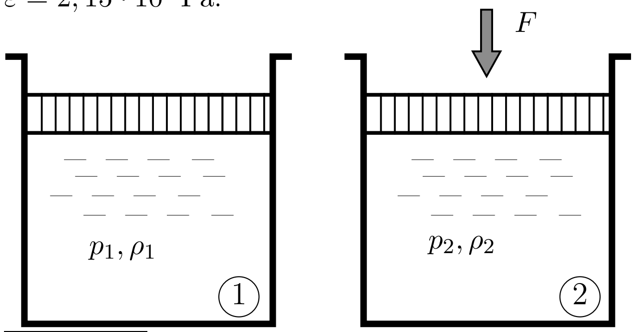
Вискозност и стишљивост флуида

1. Колики је притисак потребан да би се густина воде на $p_1 = 101325\,\mathrm{Pa}$ и $T_1 = 255\,\mathrm{K}$ повећала за 1%? Узети да је густина воде у почетном стању $\rho_1 = 1000\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$ и да модул стишљивости воде износи $\varepsilon = 2,15 \cdot 10^9\,\mathrm{Pa}$.



Решење

Први извод који се јавља у изразу за модул стишљивости ε, се може апроксимирати коначним разликама. Користећи апроксимацију првог реда тачности, израз постаје:

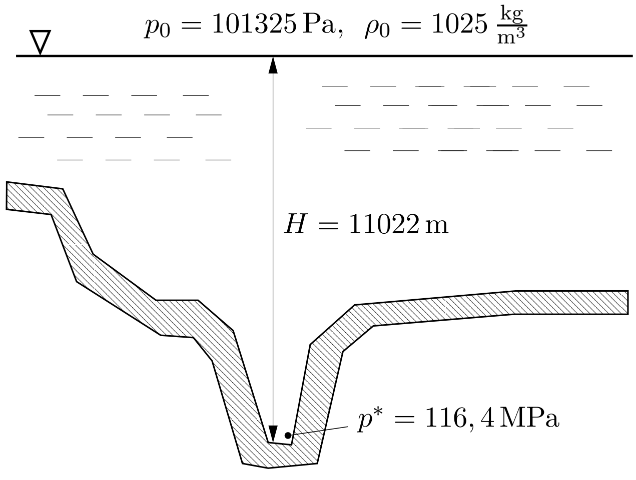
$$\varepsilon = \rho\frac{\partial p}{\partial \rho} \approx \rho_1\frac{\Delta p}{\Delta \rho} = \rho_1\frac{p_2 - p_1}{\rho_2 - \rho_1}$$

$$p_2 - p_1 = \varepsilon\frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1} = \varepsilon\frac{0.01\rho_1}{\rho_1} = 0.01\,\varepsilon = 2,15 \cdot 10^7\,\mathrm{Pa} = 215\,\mathrm{bar}$$

$$\boxed{p_2 = 21601325\,\mathrm{Pa} = 216,01325\,\mathrm{bar}}$$

---

2. Најдубља тачка у океанима је 11022 m, у Маријанској бразди у близини острва Гвам у Тихом океану. Хидростатички притисак на тој дубуни износи 116,4 MPa. Ако је густина воде на нивоу океана $\rho_0 = 1025\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$, колика је њена густина на дну Маријанске бразде? Узети да је коефицијент стишљивости морске воде $\beta_p = 0,5 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{Pa}^{-1}$.



Решење

Први начин:

Модул стишљивости представља реципрочну вредност коефицијента стишљивости: $\varepsilon = \frac{1}{\beta_p}$. Апроксимацијом првог извода коначним разликама добија се:

$$\varepsilon = \rho\frac{\partial p}{\partial \rho} \approx \rho_0\frac{\Delta p}{\Delta \rho} = \rho_0\frac{p^* - p_0}{\rho^* - \rho_0} \qquad \Longrightarrow \qquad \rho^* = \rho_0 + \rho_0\frac{p^* - p_0}{\varepsilon}$$

Приближно решење износи: $\boxed{\rho^* = 1084,6\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}}$

Други начин:

Напомена: у овом курсу биће разматрани баротропни флуиди, за које важи да је промена густине услед промене притиска много већа у односу на промену густине услед промене температуре: $\rho = \rho(p)$, па је исправно израз за коефицијент стишљивости написати као: $\beta_p = \frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}p}$, уместо: $\beta_p = \frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial p}$. Модул стишљивости је: $\varepsilon = \frac{1}{\beta_p}$.

Раздвајањем променљивих и интеграљењем почетне диференцијалне једначине добија се:

$$\varepsilon = \rho\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\rho} \quad \Longrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}\rho}{\rho} = \frac{\mathrm{d}p}{\varepsilon}$$

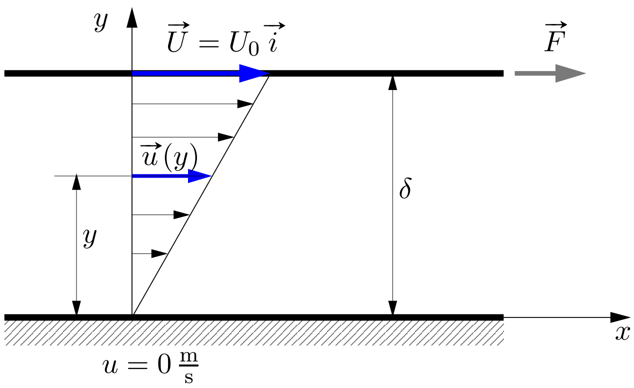
$$\int\limits_{\rho_0}^{\rho^*}\frac{\mathrm{d}\rho}{\rho} = \int\limits_{p_0}^{p^*}\frac{\mathrm{d}p}{\varepsilon} \quad \Longrightarrow \quad \ln(\rho)\Big|_{\rho_0}^{\rho^*} = \frac{p^* - p_0}{\varepsilon} \quad \Longrightarrow \quad \ln(\frac{\rho^*}{\rho_0}) = \frac{p^* - p_0}{\varepsilon} \quad \Big/ e$$

$$\frac{\rho^*}{\rho_0} = \exp\left(\frac{p^* - p_0}{\varepsilon}\right) \quad \Longrightarrow \quad \rho^* = \rho_0 \exp\left(\frac{p^* - p_0}{\varepsilon}\right)$$

Тачно решење гласи: $\boxed{\rho^* = 1086,37\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}}$

---

3. Одредити вредности смицајног напона на горњој и доњој плочи. Доња плоча је непокретна, а горња се креће брзином: $U_0 = 1\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. Познати су и следећи подаци: коефицијент динамичке вискозности флуида између плоча $\eta = 0,1\,\mathrm{Pa\,s}$, растојање између плоча: $\delta = 20\,\mathrm{mm}$. У простору између плоча се формира ламинарни профил брзине.



Решење

Према услову лепљења брзина флуида на доњој плочи износи $0\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, а на горњој плочи једнака је брзини саме плоче U_0. На растојању од плоче y брзина је једнака $u(y)$. Пошто је профил брзине линеаран, зависност $u = u(y)$ се може одредити на основу сличности проуглова:

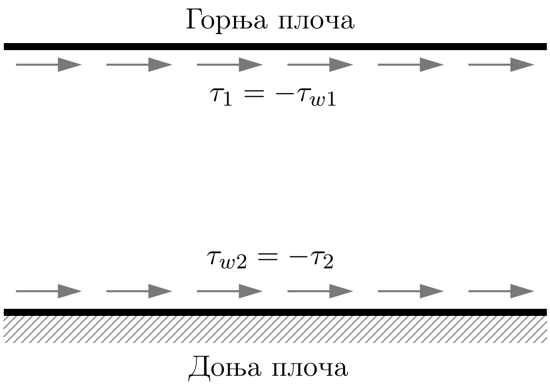
$$\frac{U_0}{\delta} = \frac{u(y)}{y} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{u(y) = U_0\frac{y}{\delta}}$$

Према дефиницији, смичући напон у флуиду је пропорционалан брзини деформисања флуида, а коефицијент пропорционалности је динамичка вискозност η.

$$\tau = \eta\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y} = \eta\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(U_0\frac{y}{\delta}\right) \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\tau = \eta\frac{U_0}{\delta}}$$

Вредност смичућег напона се не мења у струјном простору, не зависи од координате y: $\tau \neq \tau(y)$, па је вредност напона на плочама једнака и износи:

$$\boxed{\tau_1 = \tau_2 = \eta\frac{U_0}{\delta} = 0,1\,\mathrm{Pa\,s}\,\frac{1\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{0,02\,\mathrm{m}} = 5\,\mathrm{Pa}}$$



τ_1 - дејство горње плоче на флуид

τ_{w1} - дејство флуида на горњу плочу

τ_{w2} - дејство флуида на доњу плочу

τ_2 - дејство доње плоче на флуид

---

4. Посматра се случај струјања флуида између хоризонталних, непокретних плоча. Профил брзине је дат изразом:

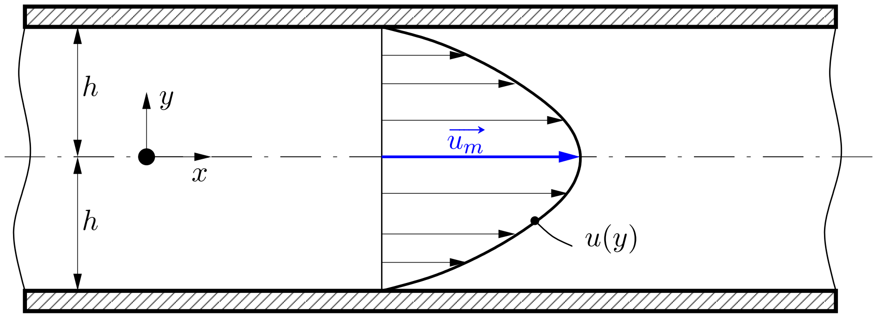
$$u = u_m \left[1 - \left(\frac{y}{h}\right)^2\right],$$

где је u_m брзина на половини растојања између плоча ($y = 0$).

Одредити:

(а) смицајни напон на доњој плочи,

(б) смицајни напон на половини растојања између плоча.



$$u_m = u(y)\Big|_{y=0} = 0,9\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

$$\eta = 2\,\mathrm{Pa\,s}$$

$$h = 5\,\mathrm{mm}$$

Решење

Пошто је позната расподела брзине између плоча и вредност коефицијента динамичке вискозности, могуће је одредити расподелу смицајног напона $\tau(y)$:

$$\tau = \eta\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y} = \eta\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left[u_m\left(1 - \left(\frac{y}{h}\right)^2\right)\right] = \eta\, u_m \left(-\frac{2y}{h^2}\right) \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{\tau = \tau(y) = -\eta\frac{2\,u_m}{h^2}y}$$

Смицајни напон на доњој плочи τ_1 се одређује из услова $y = -h$, а смицајни напон на половини растојања између плоча τ_2, из услова $y = 0$:

$$\tau_1 = \tau(y)\Big|_{y=-h} = \eta\frac{2\,u_m}{h^2}h \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{\tau_1 = \eta\frac{2u_m}{h} = 2\,\mathrm{Pa\,s}\frac{2\ 0,9\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{0,005\mathrm{m}} = 720\,\mathrm{Pa}}$$

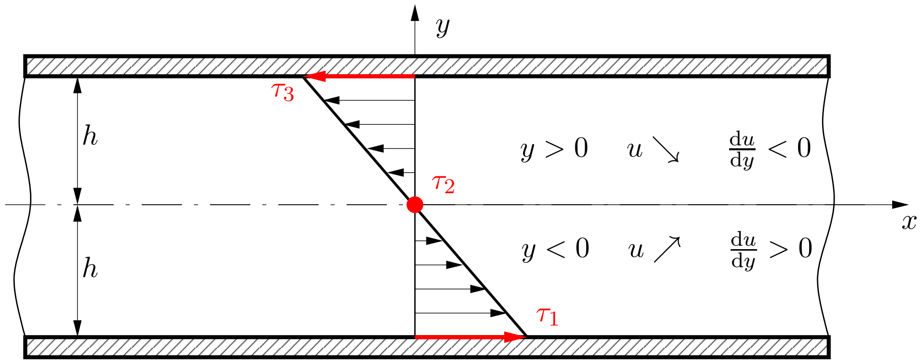
$$\tau_2 = \tau(y)\Big|_{y=0} = \eta\frac{2\,u_m}{h^2}0 \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{\tau_2 = 0\,\mathrm{Pa}}$$

Није тражено у задатку, али је илустративно посматрати расподелу смицајног напона. Напон на горњој плочи износи:

$$\tau_3 = \tau(y)\Big|_{y=h} = -\eta\frac{2\,u_m}{h^2}h \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{\tau_3 = -\eta\frac{2u_m}{h} = -720\,\mathrm{Pa}}$$

На основу одређеног израза $\tau = \tau(y)$, види се да τ линеарно зависи од y:

$$\tau = \tau(y) = -\eta \frac{2u_m}{h^2} y \Longrightarrow \begin{array}{l} y < 0 \ : \ \tau > 0 \\ y = 0 \ : \ \tau = 0 \\ y > 0 \ : \ \tau < 0 \end{array}$$



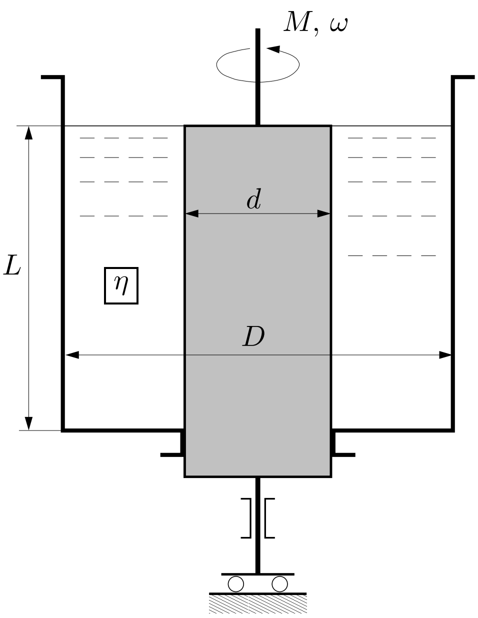
На основу израза $\tau = \eta \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}$ види се да знак напона зависи од знака првог извода (η је увек позитивна величина). У области $y < 0$, са порастом координате y брзина расте (позитиван градијент $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y} > 0$), па је и напон **позитиван**, док у уобласти $y > 0$, са порастом координате y брзина опада (негативан градијент $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y} < 0$), па је и напон **негативан**. За вредност координате $y = 0$, брзина има максималну вредност (екстрем), што представља нулу првог извода ($\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y} = 0$), па је и смицајни напон у тој тачки једнак нули $\tau_2 = 0$.

Смицајни напон $\tau = \eta \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}$, представља дејство горњих слојева флуида на доње.

Дејство флуида на доњу плочу представљено је смицајним напоном τ_1, а дејство горње плоче на флуид напоном τ_3.

---

5. Вискозност течности се може мерити тзв. обртним вискозиметром, чији је принцип рада приказан на слици. У непокретном цилиндру унутрашњег пречника D налази се течност чија се вискозност одређује. Саосно са њим, у течности се налази цилиндар пречника d који може да ротира око своје осе. Ако је за постизање угаоне брзине ω потребан обртни момент M, одредити релацију за одређивање вискозности течности η у функцији величина: M, ω, D, d и L. Сматрати да је у течности, у простору између цилиндара, профил брзине који се формира приликом обртања унутрашњег цилиндра линеаран.



Решење

Према услову лепљења на унутрашњој површини непокретног цилиндра, брзина флуида је једнака нули, док је на спољашњој површини покретног цилиндра брзина флуида једнака брзини цилиндра $u = \frac{d}{2}\omega$. Линеаран профил брзине омогућава да зависност $u(y)$ буде одређена из сличности троуглова, а на основу ње одређује се смичући напон:

$$\frac{u(y)}{y} = \frac{\frac{d}{2}\omega}{\frac{D-d}{2}} \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{u(y) = \frac{d\omega}{D-d}y}$$

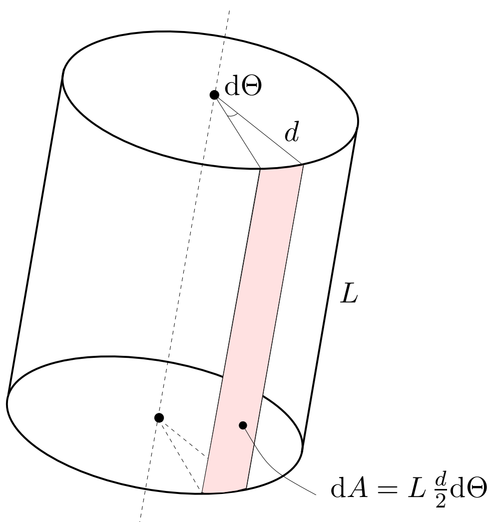
$$\tau = \eta\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y} \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{\tau = \eta\frac{d\omega}{D-d}} \qquad \tau \neq \tau(y), \quad \tau = \mathrm{const}$$

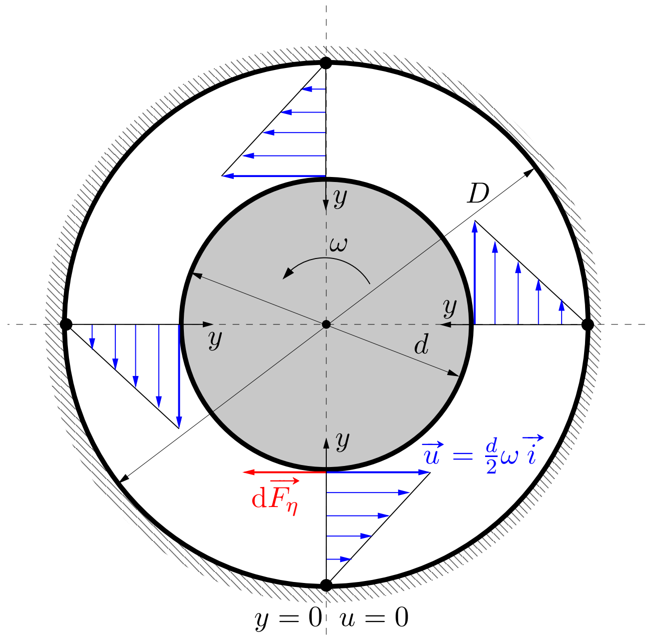
Вектор напона којим флуид делује на покретни цилиндар има правац брзине на спољашњој површи цилиндра (тангента на цилиндар), а смер супротан смеру вектора брзине. Елементарна сила трења која делује на елементарној површи цилиндра $\mathrm{d}A$ је једнака:

$$\mathrm{d}F_\eta = \tau\mathrm{d}A = \eta\frac{d\omega}{D-d}L\,\frac{d}{2}\,\mathrm{d}\Theta = \eta\frac{L\omega d^2}{2(D-d)}\mathrm{d}\Theta$$

Елементарни момент који сила $\mathrm{d}F_\eta$ прави око осе обртања износи:

$$\mathrm{d}M_\eta = \frac{d}{2}\mathrm{d}F_\eta = \eta\frac{L\omega d^3}{4(D-d)}\mathrm{d}\Theta$$





Укупни момент који сила трења између флуида и покретног цилиндра прави око осе обртања је:

$$M_\eta = \int_0^{2\pi} \eta\frac{L\omega d^3}{4(D-d)}\mathrm{d}\Theta = \eta\frac{L\omega d^3}{4(D-d)}2\pi \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{M_\eta = \eta\frac{L\omega d^3\pi}{2(D-d)}}$$

Брзина обртања цилиндра се не мења ($\omega = \mathrm{const}$), што значи да су момент M који се доводи вратилу и супротносмерни момент силе трења M_η међусобно једнаки: $\boxed{M = M_\eta}$. Следи да је израз за израчунавање коефицијента динамичке вискозноси флуида:

$$\boxed{\eta = \frac{2M(D-d)}{L\omega d^3\pi}}$$

6. Приликом струјања гасова може се увести претпоставка да је такво струјање нестишљиво ако је промена густине мања од 2%. Ако ваздух (**идеални гас**) струји кроз цев **изотермски**, и ако су притисци на улазу (пресек 1) и излазу из цеви (пресек 2) $p_1 = 2\,\mathrm{bar}$ и $p_2 = 1,85\,\mathrm{bar}$, да ли се овакво струјање може сматрати нестишљивим? Одговор потврдити неопходним, елементарним прорачуном!

Решење

За идеалан гас једначине стања за пресеке 1 и 2 гласе:

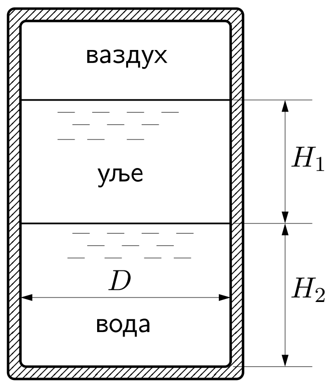
$$p_1 = \rho_1 \mathrm{R}T \qquad p_2 = \rho_2 \mathrm{R}T \qquad (T_1 = T_2 = T = \mathrm{const})$$

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{\rho_2 \mathrm{R}T}{\rho_1 \mathrm{R}T} \quad \Longrightarrow \quad \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{p_2}{p_1} = \frac{1,85\,\mathrm{bar}}{2\,\mathrm{bar}} = 0,925 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\rho_2 = 0,925\rho_1}$$

$$\Delta\rho = \rho_1 - \rho_2 = \rho_1 - 0,925\rho_1 = 0,075\rho_1 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\Delta\rho = \rho_1\, 7,5\%}$$

Струјање се **не може** сматрати нестишљивим јер је промена густине флуида већа од 2%.

7. У челичном, цилиндричном резервоару се налазе ваздух, уље и вода. На слици је приказан случај када је притисак у ваздуху једнак атмосферском, тј. $p_a = 1\,\mathrm{bar}$. Ако се додавањем компримованог ваздуха натпритисак повећа на $p_M = 1\,\mathrm{MPa}$, за колико ће се померити разделна површ између ваздуха и уља? Узети да су модули стишљивости уља и воде: $\varepsilon_{ulja} = 2050\,\mathrm{MPa}$ и $\varepsilon_{vode} = 2075\,\mathrm{MPa}$. Остали подаци су: $H_1 = 500\,\mathrm{mm}$, $H_2 = 800\,\mathrm{mm}$, $D = 300\,\mathrm{mm}$. Занемарити хидростатичку промену притиска.
Није неопходан податак о пречнику резервоара



Решење

Напомена: $\quad 1\,\mathrm{bar} = 10^5\,\mathrm{Pa} \qquad 1\,\mathrm{MPa} = 10^6\,\mathrm{Pa}$

Занемаривањем хидростатичког притиска добија се униформно поље притиска у целом резервоару. У почетном стању притисак износи: $p = 1\,\mathrm{bar}$, а у крајњем: $p^* = p + p_M = 11\,\mathrm{bar}$, па разлика притисака за сва три флуида износи: $\Delta p = 10\,\mathrm{bar} = 1\,\mathrm{MPa}$.

Коришћењем приближног израза за модул стишљивости добија се:

$$\varepsilon_{ulja} \approx \rho\frac{\Delta p}{\Delta\rho} = \rho\frac{\Delta p}{\rho^* - \rho} \quad \Longrightarrow \quad \frac{\rho^* - \rho}{\rho} = \frac{\Delta p}{\varepsilon_{ulja}} = \frac{1\,\mathrm{MPa}}{2050\,\mathrm{MPa}} = 4,88 \cdot 10^{-4}$$

$$\frac{\rho^*}{\rho} - 1 = 4,88 \cdot 10^{-4} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\rho^*_{ulja} = \rho_{ulja} 1,000488}$$

Уврстивши у претходни израз једначине $\rho = \frac{m}{V}$ и $V = AH$, следи:

$$\frac{m}{AH_1^*} = \frac{m}{AH_1}1,000488 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{H_1^* = \frac{H_1}{1,000488} = \frac{500\,\mathrm{mm}}{1,000488} = 499,76\,\mathrm{mm}}$$

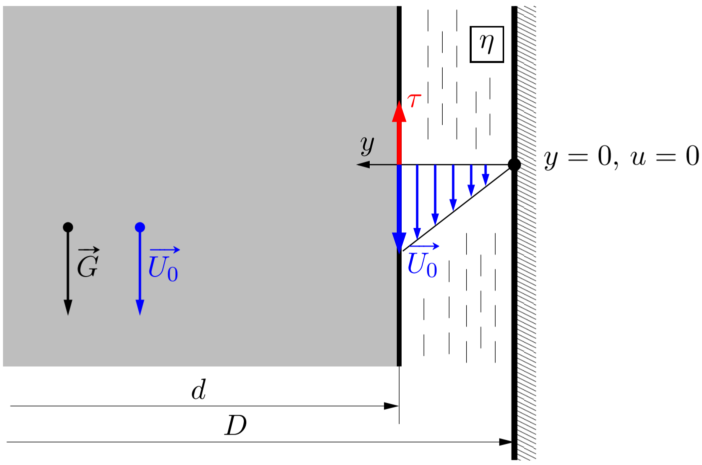
Истим поступком се одређује нови ниво воде у резервоару, који износи: $\boxed{H_2^* = 799,62\,\mathrm{mm}}$. Ниво воде се померио на доле за $H_2 - H_2^* = 0,38\,\mathrm{mm}$, а разделна површ између ваздуха и уља се спустила за $H_2 - H_2^* + H_1 - H_1^* = 0,38 + 0,24 = 0,62\,\mathrm{mm}$. И овим примером је показана оправданост претпоставке да су вода и уље нестишљиви флуиди.

8. Клип ($d = 149\,\mathrm{mm}$, $h = 150\,\mathrm{mm}$, $m = 1,5\,\mathrm{kg}$) пропада константном брзином $U_0 = 0,046\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ кроз вертикални саосни цилиндар ($D = 150\,\mathrm{mm}$) у коме се налази уље вискозности η. Између клипа и цилиндра се формира уљни филм у коме се брзина уља мења по линеарном закону. Одредити вискотност уља η.

Решење

Линеаран профил брзине омогућава да зависност $u = u(y)$ буде одређена коришћењем сличности троуглова. Према услову лепљења, брзина флуида на непокретном цилиндру је једнака нули, а на површини покретног клипа је једнака U_0. На основу одређене зависности $u = u(y)$ одређује се смицајни напон у флуиду:

Вредност смицајног напона не зависи од координате y, у флуиду и на чврстима границама има непроменљиву, приказану вредност.



$$\frac{u(u)}{y} = \frac{U_0}{\frac{D-d}{2}} = \frac{2U_0}{D-d}$$

$$\boxed{u(y) = \frac{2U_0}{D-d}y}$$

$$\tau = \eta\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y} = \eta\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(\frac{2U_0}{D-d}y\right)$$

$$\boxed{\tau = \eta\frac{2U_0}{D-d}}$$

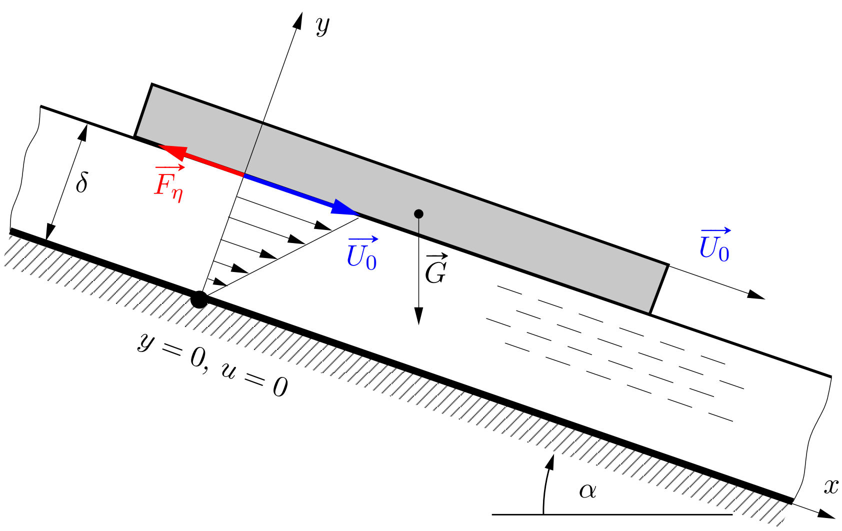
Клип се креће константном брзином, што значи да је убрзање једнако нули, па су, према другом Њутновом закону, силе које делују на клип уравнотежене. На клип делује сила тежине $\vec{G}$ и сила трења између флуида и клипа која проузрокује смицајни напон τ. Изједначавањем ових сила могуће је одредити вредност смичућег напона, а на основу ње и тражену вредност коефицијента динамичке вискозности флуида η:

$$G = mg = 9,81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}1,5\mathrm{kg} = 14,715\,\mathrm{N} \qquad \boxed{F_\eta = G = 14,715\,\mathrm{N}}$$

$$\tau = \frac{F_\eta}{A} = \frac{F_\eta}{d\pi h} = 209,62\,\mathrm{Pa} \qquad \eta = \frac{\tau(D-d)}{2U_0} \implies \boxed{\eta = 2,278\mathrm{Pa\,s}}$$

---

9. Израчунати динамичку вискозност уља у случају да је позната брзина клизања плоче на слоју уља низ стрму раван. Сматрати да је промена брзине између стрме равни и доње површи плоче линеарна. Познати су следећи подаци: $A = 9\,\mathrm{dm}^2$, $G = 100\,\mathrm{N}$, $\delta = 1,2\,\mathrm{mm}$, $U_0 = 0,18\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, и $\alpha = 15°$.



Решење

Профил брзине се одређује из сличности троуглова, након чега се одређује смицајни напон у флуиду:

$$\frac{u(y)}{y} = \frac{U_0}{\delta} \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{u(y) = \frac{U_0}{\delta} y}$$

$$\tau = \eta \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y} \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{\tau = \eta \frac{U_0}{\delta}}$$

Смицајни напон не мења вредност са променом координате y, па и на доњој површи плоче има приказану вредност. За одређивање коефицијента динамичке вискозности потребно је одредити вредност смицајног напона.

Плоча се креће сталном брзином ($U_0 = \mathrm{const}$), па је њено убрзање једнако нули. Пројектовањем једначине другог Њутновог закона за плочу на x осу, закључује се да су уравнотежене сила трења између флуида и плоче и пројекција силе тежине на x осу:

$$m\vec{a} = \vec{G} + \vec{F_\eta} + \vec{F}_N \qquad \Longrightarrow \qquad x: \quad 0 = G \sin\alpha - F_\eta \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{F_\eta = G \sin\alpha}$$

Сила трења проузрокује смицајни напон који делује на доњој површи плоче и који износи:

$$\tau = \frac{F_\eta}{A} = \frac{G \sin\alpha}{A}$$

Након одређивања смицајног напона, динамичка вискозност се може изразити као:

$$\eta = \tau \frac{\delta}{U_0} = \frac{G \sin\alpha \, \delta}{A U_0} \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{\eta = 1,917 \, \mathrm{Pa\,s}}$$