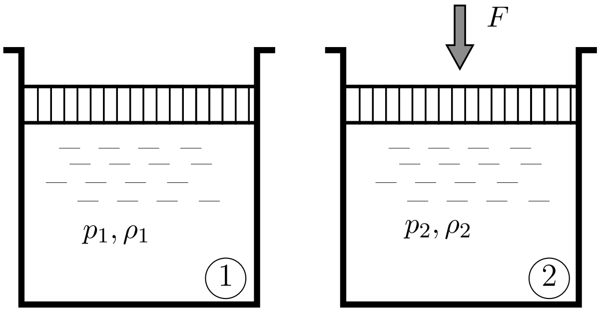
Машински факултет Универзитет у Београду

Механика флуида Б

додатни задаци за вежбу

1 Основна својства флуида

1. Колики је притисак потребан да би се густина воде на $p_1 = 101325\,\mathrm{Pa}$ и $T_1 = 255\,\mathrm{K}$ повећала за 1%? Узети да је густина воде у почетном стању $\rho_1 = 1000\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$ и да модул стишљивости воде износи $\varepsilon = 2,15 \cdot 10^9\,\mathrm{Pa}$.



Решење

Први извод који се јавља у изразу за модул стишљивости ε, се може апроксимирати коначним разликама. Користећи апроксимацију првог реда тачности, израз постаје:

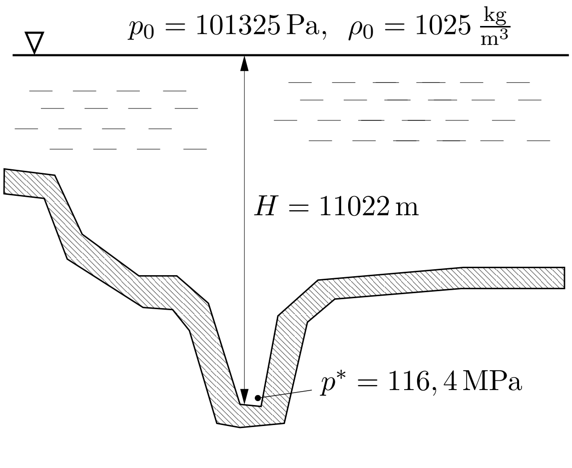
$$\varepsilon = \rho\frac{\partial p}{\partial \rho} \approx \rho_1\frac{\Delta p}{\Delta \rho} = \rho_1\frac{p_2 - p_1}{\rho_2 - \rho_1}$$

$$p_2 - p_1 = \varepsilon\frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1} = \varepsilon\frac{0.01\rho_1}{\rho_1} = 0.01\,\varepsilon = 2,15 \cdot 10^7\,\mathrm{Pa} = 215\,\mathrm{bar}$$

$$\boxed{p_2 = 21601325\,\mathrm{Pa} = 216,01325\,\mathrm{bar}}$$

---

2. Најдубља тачка у океанима је 11022 m, у Маријанској бразди у близини острва Гвам у Тихом океану. Хидростатички притисак на тој дубуни износи 116,4 MPa. Ако је густина воде на нивоу океана $\rho_0 = 1025\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$, колика је њена густина на дну Маријанске бразде? Узети да је коефицијент стишљивости морске воде $\beta_p = 0,5 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{Pa}^{-1}$.



Решење

Први начин:

Модул стишљивости представља реципрочну вредност коефицијента стишљивости: $\varepsilon = \frac{1}{\beta_p}$. Апроксимацијом првог извода коначним разликама добија се:

$$\varepsilon = \rho\frac{\partial p}{\partial \rho} \approx \rho_0\frac{\Delta p}{\Delta \rho} = \rho_0\frac{p^* - p_0}{\rho^* - \rho_0} \qquad \Longrightarrow \qquad \rho^* = \rho_0 + \rho_0\frac{p^* - p_0}{\varepsilon}$$

Приближно решење износи: $\boxed{\rho^* = 1084,6\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}}$

Други начин:

<u>*Напомена:*</u> у овом курсу биће разматрани баротропни флуиди, за које важи да је промена густине услед промене притиска много већа у односу на промену густине услед промене температуре: $\rho = \rho(p)$, па је исправно израз за коефицијент стишљивости написати као: $\beta_p = \frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}p}$, уместо: $\beta_p = \frac{1}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial p}$. Модул стишљивости је: $\varepsilon = \frac{1}{\beta_p}$.

Раздвајањем промењљивих и интеграљењем почетне диференцијалне једначине добија се:

$$\varepsilon = \rho\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\rho} \quad\Longrightarrow\quad \frac{\mathrm{d}\rho}{\rho} = \frac{\mathrm{d}p}{\varepsilon}$$

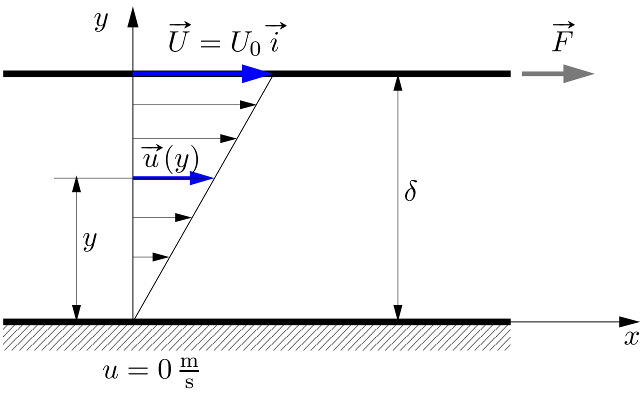
$$\int\limits_{\rho_0}^{\rho^*}\frac{\mathrm{d}\rho}{\rho} = \int\limits_{p_0}^{p^*}\frac{\mathrm{d}p}{\varepsilon} \quad\Longrightarrow\quad \ln(\rho)\Big|_{\rho_0}^{\rho^*} = \frac{p^*-p_0}{\varepsilon} \quad\Longrightarrow\quad \ln(\frac{\rho^*}{\rho_0}) = \frac{p^*-p_0}{\varepsilon} \quad \Big/ e$$

$$\frac{\rho^*}{\rho_0} = \exp\left(\frac{p^*-p_0}{\varepsilon}\right) \quad\Longrightarrow\quad \rho^* = \rho_0\exp\left(\frac{p^*-p_0}{\varepsilon}\right)$$

Тачно решење гласи: $\boxed{\rho^* = 1086,37\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}}$

---

3. Одредити вредности смицајног напона на горњој и доњој плочи. Доња плоча је непокретна, а горња се креће брзином: $U_0 = 1\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. Познати су и следећи подаци: коефицијент динамичке вискозности флуида између плоча $\eta = 0,1\,\mathrm{Pa\,s}$, растојање између плоча: $\delta = 20\,\mathrm{mm}$. У простору између плоча се формира ламинарни профил брзине.



Решење

Према услову лепљења брзина флуида на доњој плочи износи $0\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, а на горњој плочи једнака је брзини саме плоче U_0. На растојању од плоче y брзина је једнака $u(y)$. Пошто је профил брзине линеаран, зависност $u = u(y)$ се може одредити на основу сличности проуглова:

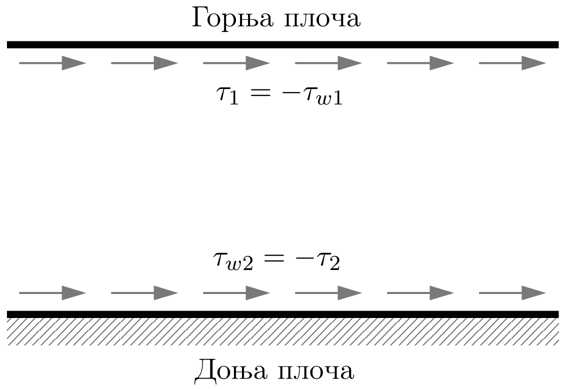
$$\frac{U_0}{\delta} = \frac{u(y)}{y} \quad\Longrightarrow\quad \boxed{u(y) = U_0\frac{y}{\delta}}$$

Према дефиницији, смичући напон у флуиду је пропорционалан брзини деформисања флуида, а коефицијент пропорционалности је динамичка вискозност η.

$$\tau = \eta\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y} = \eta\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(U_0\frac{y}{\delta}\right) \quad\Longrightarrow\quad \boxed{\tau = \eta\frac{U_0}{\delta}}$$

Вредност смичућег напона се не мења у струјном простору, не зависи од координате y: $\tau \neq \tau(y)$, па је вредност напона на плочама једнака и износи:

$$\boxed{\tau_1 = \tau_2 = \eta\frac{U_0}{\delta} = 0,1\,\mathrm{Pa\,s}\,\frac{1\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{0,02\,\mathrm{m}} = 5\,\mathrm{Pa}}$$



τ_1 - дејство горње плоче на флуид

τ_{w1} - дејство флуида на горњу плочу

τ_{w2} - дејство флуида на доњу плочу

τ_2 - дејство доње плоче на флуид

---

4. Посматра се случај струјања флуида између хоризонталних, непокретних плоча. Профил брзине је дат изразом:

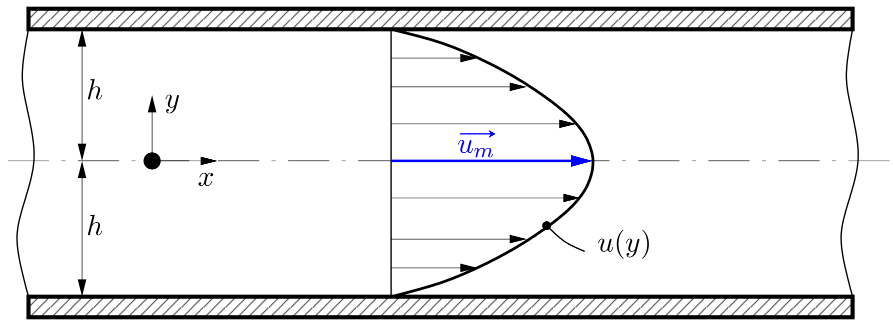
$$u = u_m \left[1 - \left(\frac{y}{h} \right)^2 \right],$$

где је u_m брзина на половини растојања између плоча ($y = 0$).

Одредити:

(а)смицајни напон на доњој плочи,

(б)смицајни напон на половини растојања између плоча.



$$u_m = u(y)\Big|_{y=0} = 0,9\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

$$\eta = 2\,\mathrm{Pa\,s}$$

$$h = 5\,\mathrm{mm}$$

Решење

Пошто је позната расподела брзине између плоча и вредност коефицијента динамичке вискозности, могуће је одредити расподелу смицајног напона $\tau(y)$:

$$\tau = \eta \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y} = \eta \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} \left[u_m \left(1 - \left(\frac{y}{h} \right)^2 \right) \right] = \eta\, u_m \left(-\frac{2y}{h^2} \right) \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{\tau = \tau(y) = -\eta \frac{2\,u_m}{h^2} y}$$

Смицајни напон на доњој плочи τ_1 се одређује из услова $y = -h$, а смицајни напон на половини растојања између плоча τ_2, из услова $y = 0$:

$$\tau_1 = \tau(y)\Big|_{y=-h} = \eta \frac{2\,u_m}{h^2} h \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{\tau_1 = \eta \frac{2u_m}{h} = 2\,\mathrm{Pa\,s} \frac{2\;0,9\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{0,005\mathrm{m}} = 720\,\mathrm{Pa}}$$

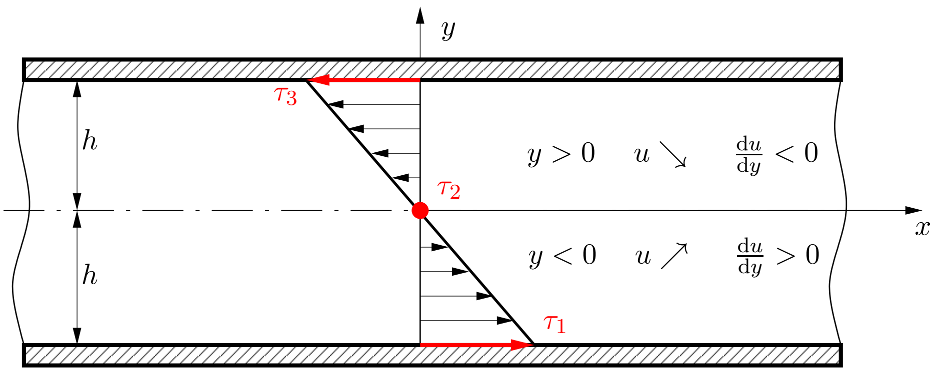
$$\tau_2 = \tau(y)\Big|_{y=0} = \eta \frac{2\,u_m}{h^2} 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{\tau_2 = 0\,\mathrm{Pa}}$$

Није тражено у задатку, али је илустративно посматрати расподелу смицајног напона. Напон на горњој плочи износи:

$$\tau_3 = \tau(y)\Big|_{y=h} = -\eta \frac{2\,u_m}{h^2} h \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{\tau_3 = -\eta \frac{2u_m}{h} = -720\,\mathrm{Pa}}$$

На основу одређеног израза $\tau = \tau(y)$, види се да τ линеарно зависи од y:

$$\tau = \tau(y) = -\eta \frac{2\,u_m}{h^2} y \Longrightarrow \begin{array}{l} y<0\ :\ \tau>0 \\ y=0\ :\ \tau=0 \\ y>0\ :\ \tau<0 \end{array}$$



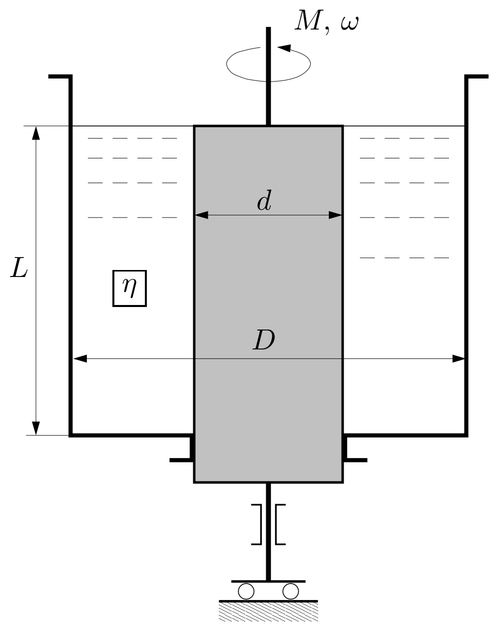
На основу израза $\tau = \eta \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}$ види се да знак напона зависи од знака првог извода (η је увек позитивна величина). У области $y < 0$, са порастом координате y брзина расте (позитиван градијент $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y} > 0$), па је и напон **позитиван**, док у ублсти $y > 0$, са порастом координате y брзина опада (негативан градијент $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y} < 0$), па је и напон **негативан**. За вредност координате $y = 0$, брзина има максималну вредност (екстрем), што представља нулу првог извода ($\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y} = 0$), па је и смицајни напон у тој тачки једнак нули $\tau_2 = 0$.

Смицајни напон $\tau = \eta \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}$, представља дејство горњих слојева флуида на доње.

Дејство флуида на доњу плочу представљено је смицајним напоном τ_1, а дејство горње плоче на флуид напоном τ_3.

---

5. Вискозност течности се може мерити тзв. обртним вискозиметром, чији је принцип рада приказан на слици. У непокретном цилиндру унутрашњег пречника D налази се течност чија се вискозност одређује. Саосно са њим, у течности се налази цилиндар пречника d који може да ротира око своје осе. Ако је за постизање угаоне брзине ω потребан обртни момент M, одредити релацију за одређивање вискозности течности η у функцији величина: M, ω, D, d и L. Сматрати да је у течности, у простору између цилиндара, профил брзине који се формира приликом обртања унутрашњег цилиндра линеаран.



Решење

Према услову лепљења на унутрашњој површини непокретног цилиндра, брзина флуида је једнака нули, док је на спољашњој површини покретног цилиндра брзина флуида једнака брзини цилиндра $u = \frac{d}{2}\omega$. Линеаран профил брзине омогућава да зависност $u(y)$ буде одређена из сличности троуглова, а на основу ње одређује се смичући напон:

$$\frac{u(y)}{y} = \frac{\frac{d}{2}\omega}{\frac{D-d}{2}} \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{u(y) = \frac{d\omega}{D-d}y}$$

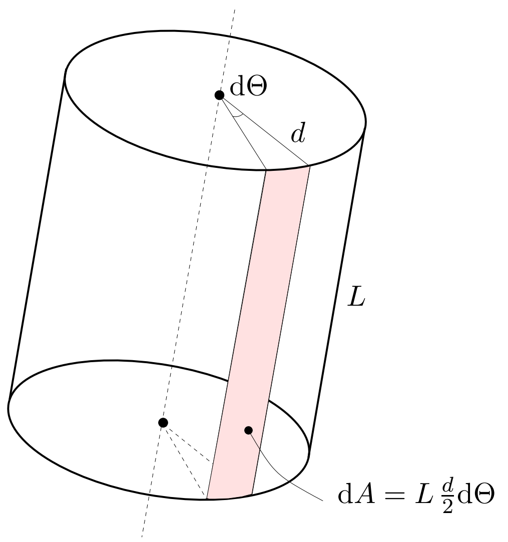
$$\tau = \eta\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y} \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{\tau = \eta\frac{d\omega}{D-d}} \qquad \tau \neq \tau(y), \quad \tau = \mathrm{const}$$

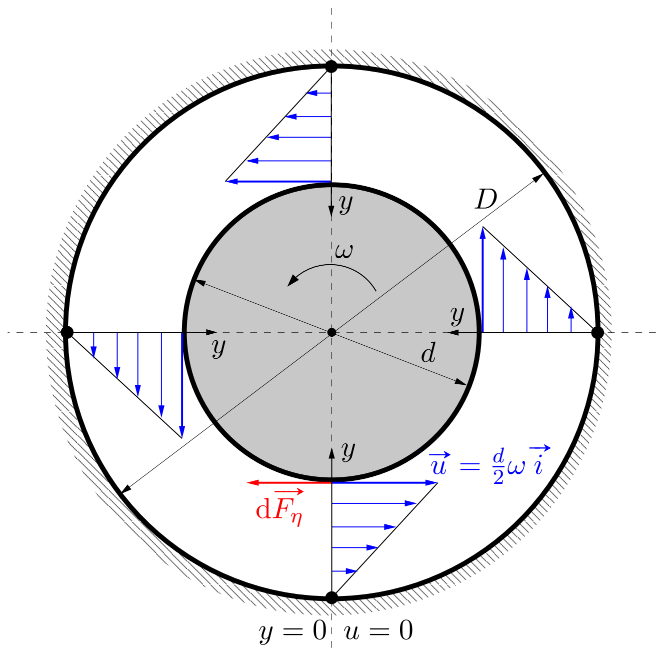
Вектор напона којим флуид делује на покретни цилиндар има правац брзине на спољашњој површи цилиндра (тангента на цилиндар), а смер супротан смеру вектора брзине. Елементарна сила трења која делује на елементарној површи цилиндра $\mathrm{d}A$ је једнака:

$$\mathrm{d}F_\eta = \tau \mathrm{d}A = \eta\frac{d\omega}{D-d}L\,\frac{d}{2}\,\mathrm{d}\Theta = \eta\frac{L\omega d^2}{2(D-d)}\mathrm{d}\Theta$$

Елементарни момент који сила $\mathrm{d}F_\eta$ прави око осе обртања износи:

$$\mathrm{d}M_\eta = \frac{d}{2}\mathrm{d}F_\eta = \eta\frac{L\omega d^3}{4(D-d)}\mathrm{d}\Theta$$





Укупни момент који сила трења између флуида и покретног цилиндра прави око осе обртања је:

$$M_\eta = \int_0^{2\pi} \eta\frac{L\omega d^3}{4(D-d)}\mathrm{d}\Theta = \eta\frac{L\omega d^3}{4(D-d)}2\pi \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{M_\eta = \eta\frac{L\omega d^3\pi}{2(D-d)}}$$

Брзина обртања цилиндра се не мења ($\omega = \mathrm{const}$), што значи да су момент M који се доводи вратилу и супротносмерни момент силе трења M_η међусобно једнаки: $\boxed{M = M_\eta}$. Следи да је израз за израчунавање коефицијента динамичке вискозноси флуида:

$$\boxed{\eta = \frac{2M(D-d)}{L\omega d^3\pi}}$$

6. Приликом струјања гасова може се увести претпоставка да је такво струјање нестишљиво ако је промена густине мања од 2%. Ако ваздух (**идеални гас**) струји кроз цев **изотермски**, и ако су притисци на улазу (пресек 1) и излазу из цеви (пресек 2) $p_1 = 2\,\mathrm{bar}$ и $p_2 = 1{,}85\,\mathrm{bar}$, да ли се овакво струјање може сматрати нестишљивим? Одговор потврдити неопходним, елементарним прорачуном!

Решење

За идеалан гас једначине стања за пресеке 1 и 2 гласе:

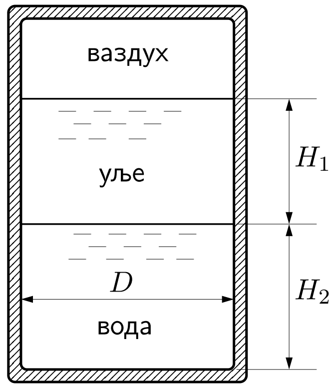
$$p_1 = \rho_1 \mathrm{R}T \qquad p_2 = \rho_2 \mathrm{R}T \qquad (T_1 = T_2 = T = \mathrm{const})$$

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{\rho_2 \mathrm{R}T}{\rho_1 \mathrm{R}T} \quad \Longrightarrow \quad \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{p_2}{p_1} = \frac{1{,}85\,\mathrm{bar}}{2\,\mathrm{bar}} = 0{,}925 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\rho_2 = 0{,}925\rho_1}$$

$$\Delta\rho = \rho_1 - \rho_2 = \rho_1 - 0{,}925\rho_1 = 0{,}075\rho_1 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\Delta\rho = \rho_1\, 7{,}5\%}$$

Струјање се **не може** сматрати нестишљивим јер је промена густине флуида већа од 2%.

7. У челичном, цилиндричном резервоару се налазе ваздух, уље и вода. На слици је приказан случај када је притисак у ваздуху једнак атмосферском, тј. $p_a = 1\,\mathrm{bar}$. Ако се додавањем компримованог ваздуха натпритисак повећа на $p_M = 1\,\mathrm{MPa}$, за колико ће се померити разделна површ између ваздуха и уља? Узети да су модули стишљивости уља и воде: $\varepsilon_{ulja} = 2050\,\mathrm{MPa}$ и $\varepsilon_{vode} = 2075\,\mathrm{MPa}$. Остали подаци су: $H_1 = 500\,\mathrm{mm}$, $H_2 = 800\,\mathrm{mm}$, $D = 300\,\mathrm{mm}$. Занемарити хидростатичку промену притиска.
Није неопходан податак о пречнику резервоара



Решење

Напомена: $1\,\mathrm{bar} = 10^5\,\mathrm{Pa} \qquad 1\,\mathrm{MPa} = 10^6\,\mathrm{Pa}$

Занемаривањем хидростатичког притиска добија се униформно поље притиска у целом резервоару. У почетном стању притисак износи: $p = 1\,\mathrm{bar}$, а у крајњем: $p^* = p + p_M = 11\,\mathrm{bar}$, па разлика притисака за сва три флуида износи: $\Delta p = 10\,\mathrm{bar} = 1\,\mathrm{MPa}$.

Коришћењем приближног израза за модул стишљивости добија се:

$$\varepsilon_{ulja} \approx \rho\frac{\Delta p}{\Delta\rho} = \rho\frac{\Delta p}{\rho^* - \rho} \quad \Longrightarrow \quad \frac{\rho^* - \rho}{\rho} = \frac{\Delta p}{\varepsilon_{ulja}} = \frac{1\,\mathrm{MPa}}{2050\,\mathrm{MPa}} = 4{,}88 \cdot 10^{-4}$$

$$\frac{\rho^*}{\rho} - 1 = 4{,}88 \cdot 10^{-4} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\rho^*_{ulja} = \rho_{ulja} 1{,}000488}$$

Уврстивши у претходни израз једначине $\rho = \frac{m}{V}$ и $V = AH$, следи:

$$\frac{m}{AH_1^*} = \frac{m}{AH_1}1{,}000488 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{H_1^* = \frac{H_1}{1{,}000488} = \frac{500\,\mathrm{mm}}{1{,}000488} = 499{,}76\,\mathrm{mm}}$$

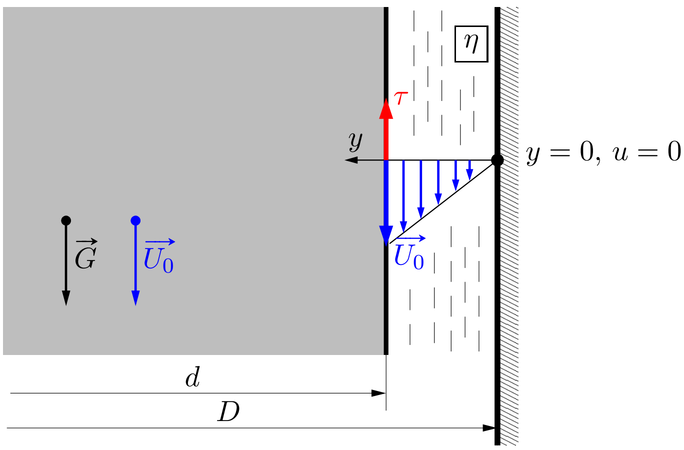
Истим поступком се одређује нови ниво воде у резервоару, који износи: $\boxed{H_2^* = 799{,}62\,\mathrm{mm}}$. Ниво воде се померио на доле за $H_2 - H_2^* = 0{,}38\,\mathrm{mm}$, а разделна површ између ваздуха и уља се спустила за $H_2 - H_2^* + H_1 - H_1^* = 0{,}38 + 0{,}24 = 0{,}62\,\mathrm{mm}$. И овим примером је показана оправданост претпоставке да су вода и уље нестишљиви флуиди.

8. Клип ($d = 149\,\mathrm{mm}$, $h = 150\,\mathrm{mm}$, $m = 1,5\,\mathrm{kg}$) пропада константном брзином $U_0 = 0,046\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ кроз вертикални саосни цилиндар ($D = 150\,\mathrm{mm}$) у коме се налази уље вискозности η. Између клипа и цилиндра се формира уљни филм у коме се брзина уља мења по линеарном закону. Одредити вискотност уља η.

Решење

Линеаран профил брзине омогућава да зависност $u = u(y)$ буде одређена коришћењем сличности троуглова. Према услову лепљења, брзина флуида на непокретном цилиндру је једнака нули, а на површини покретног клипа је једнака U_0. На основу одређене зависности $u = u(y)$ одређује се смицајни напон у флуиду:

Вредност смицајног напона не зависи од координате y, у флуиду и на чврстима границама има непромењиву, приказану вредност.



$$\frac{u(u)}{y} = \frac{U_0}{\frac{D-d}{2}} = \frac{2U_0}{D-d}$$

$$\boxed{u(y) = \frac{2U_0}{D-d}y}$$

$$\tau = \eta\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y} = \eta\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(\frac{2U_0}{D-d}y\right)$$

$$\boxed{\tau = \eta\frac{2U_0}{D-d}}$$

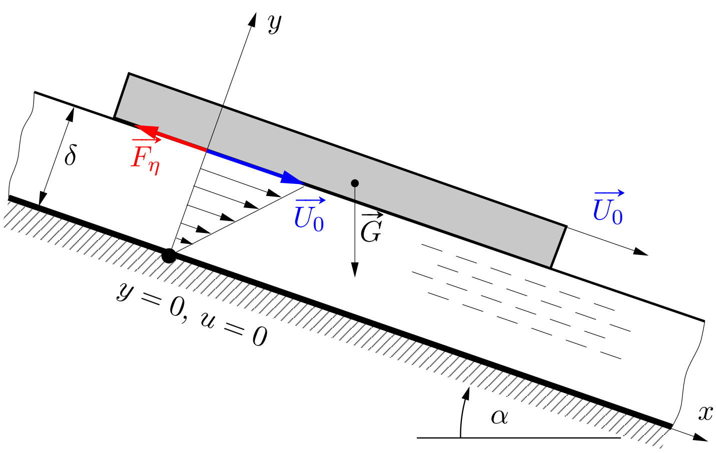
Клип се креће константном брзином, што значи да је убрзање једнако нули, па су, према другом Њутновом закону, силе које делују на клип уравнотежене. На клип делује сила тежине $\vec{G}$ и сила трења између флуида и клипа која проузрокује смицајни напон τ. Изједначавањем ових сила могуће је одредити вредност смичућег напона, а на основу ње и тражену вредност коефицијента динамичке вискозности флуида η:

$$G = mg = 9,81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}1,5\mathrm{kg} = 14,715\,\mathrm{N} \qquad \boxed{F_\eta = G = 14,715\,\mathrm{N}}$$

$$\tau = \frac{F_\eta}{A} = \frac{F_\eta}{d\pi h} = 209,62\,\mathrm{Pa} \qquad \eta = \frac{\tau(D-d)}{2U_0} \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{\eta = 2,278\mathrm{Pa\,s}}$$

---

9. Израчунати динамичку вискозност уља у случају да је позната брзина клизања плоче на слоју уља низ стрму раван. Сматрати да је промена брзине између стрме равни и доње површи плоче линеарна. Познати су следећи подаци: $A = 9\,\mathrm{dm}^2$, $G = 100\,\mathrm{N}$, $\delta = 1,2\,\mathrm{mm}$, $U_0 = 0,18\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, и $\alpha = 15°$.



Решење

Профил брзине се одређује из сличности троуглова, након чега се одређује смицајни напон у флуиду:

$$\frac{u(y)}{y} = \frac{U_0}{\delta} \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{u(y) = \frac{U_0}{\delta} y}$$

$$\tau = \eta \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y} \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{\tau = \eta \frac{U_0}{\delta}}$$

Смицајни напон не мења вредност са променом координате y, па и на доњој површи плоче има приказану вредност. За одређивање коефицијента динамичке вискозности потребно је одредити вредност смицајног напона.

Плоча се креће сталном брзином ($U_0 = \mathrm{const}$), па је њено убрзање једнако нули. Пројектовањем једначине другог Њутновог закона за плочу на x осу, закључује се да су уравнотежене сила трења између флуида и плоче и пројекција силе тежине на x осу:

$$m\vec{a} = \vec{G} + \vec{F_\eta} + \vec{F_N} \qquad \Longrightarrow \qquad x: \quad 0 = G \sin\alpha - F_\eta \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{F_\eta = G \sin\alpha}$$

Сила трења проузрокује смицајни напон који делује на доњој површи плоче и који износи:

$$\tau = \frac{F_\eta}{A} = \frac{G \sin\alpha}{A}$$

Након одређивања смицајног напона, динамичка вискозност се може изразити као:

$$\eta = \tau \frac{\delta}{U_0} = \frac{G \sin\alpha\, \delta}{A U_0} \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{\eta = 1,917\,\mathrm{Pa\,s}}$$

2 Сила притиска на равне површи

Може бити одређена следећим равноправним изразима:

$$\boxed{F_N = \rho g z_c A} \qquad \boxed{F_N = (p_c - p_a)A}$$

При чему су:

- ρ - густина флуида чије се дејство на равну површ одређује
- z_c - координата **тежишта** равне површи мерена од **нивоа слободне површи** течности
- A - површина равне површи на коју се одређује сила притиска
- p_c - **апсолутни** притисак у тежишту равне површи
- p_a - атмосферски притисак

Дакле, сила притиска делује у центру притиска D, а њен интензитет одређује се на основу натпритиска у тежишту C, који је одређен или као: $\rho g z_c$, или као: $p_c - p_a$. Положај центра притиска у односу на тежиште одређен је координатом $\Delta\upsilon_c$.

Правац силе притиска на равне површи је увек правац нормале на површ. Један од начина решавања задатака овог типа је: увек смер силе притиска претпоставити од течности ка равној површи, и положај центра притиска увек претпоставити испод тежишта површи. Уколико претпоставка није тачна, то ће бити показано негативном вредношћу интензитета силе притиска, онндосно негативном вредношћу координате $\Delta\upsilon_c$. У том случају препоручује се задржавање претпостављеног смера силе и негативне вредности интензитета силе, што ће довести до тачног решења. Исто се односи на претпоставку о позицији центра притиска и вредности координате $\Delta\upsilon_c$.

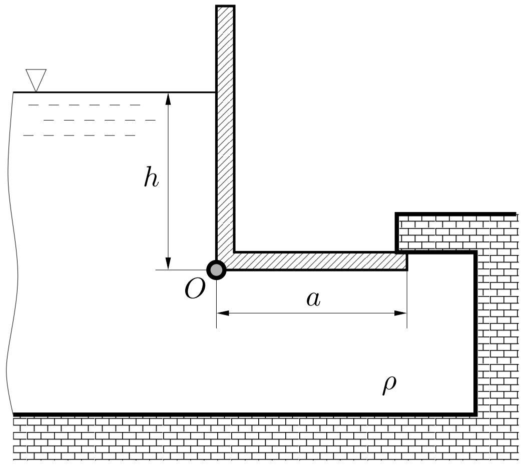
Координата $\Delta\upsilon_c$ се може одредити следећим изразима:

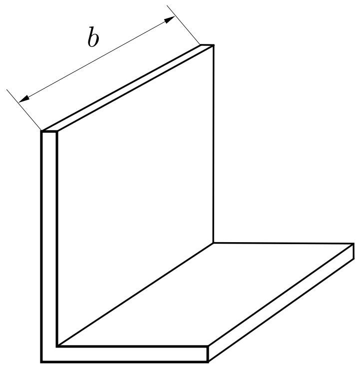
$$\Delta\upsilon_c = \frac{I_{c\xi}}{\upsilon_c A} = \frac{I_{c\xi \sin\alpha}}{z_c\, A} = \frac{I_{c\xi}\, \rho g \sin\alpha}{F_N}$$

где је $I_{c\xi}$ момент инерције површине A за тежишну осу ξ.

Често се у задацима посматра затварач који се налази на резервоару и поставља се питање под којим условима ће доћи до његовог отварања, или под којим условима ће он остати у затвореном положају. Препоручује се најпре посматрати затварач у затвореном положају, и извршити ослобађање од веза, тј. све везе затварача са околином заменити одговарајућим силама (посматра се затварач у затвореном положају, па постоји и сила реакције $\vec{N}$). Пошто се затварач посматра у стању мировања, важи да је сума свих сила које делују на њега једнака нули, и да је сума свих момената око изабране тачке једнака нули. Из ових услова добија се једначина у којој фигурише и сила реакције $\vec{N}$. Ако је у задатку постављен услов да затварач буде у затвореном положају, то значи да мора постојати сила реакције, па је услов $\boxed{N > 0}$, а ако је постављен услов да дође до отварања затварача, у једначину се уводи услов $\boxed{N = 0}$. Овакав начин решавања биће примењен на наредне задатке.

10. Угласти затварач приказан на слици, ширине b (управно на раван цртежа) затвара отвор у резервоару у коме се налази течност густине ρ, и може да се обрће без трења око осовине O. Ако је $a = 0,5\,\mathrm{m}$, одредити минималну вредност висине h при којој ће доћи до отварања затварача. Занемарити његову тежину.

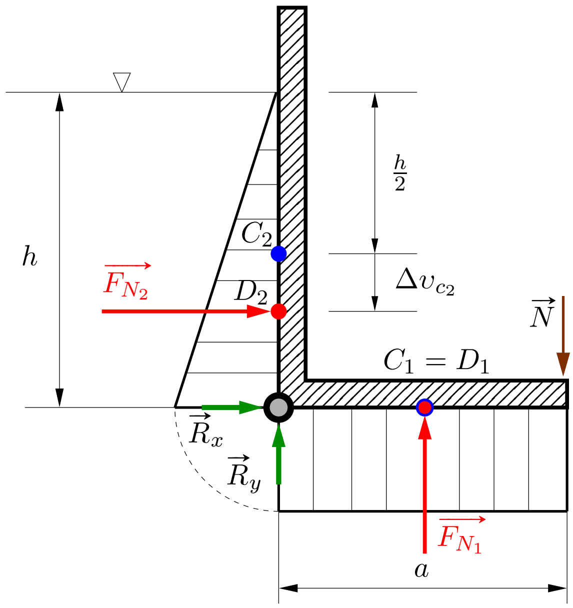




Решење

Посматра се затварач у затвореном положају. Врши се ослобађање од веза, на затварач делују силе у ослонцу (осовина O), сила $\overrightarrow{N}$ којом зид делује на затварач, и силе притиска којима флуид делује на затварач. Окважене су две равне површине затварача, за сваку од њих се посебно одређује сила притиска.

На хоризонталну оквашену површ делује непрекидно, **равномерно** оптерећење ($z = \mathrm{const} \rightarrow p = \mathrm{const}$), па резултујућа сила притиска $\overrightarrow{F_{N_1}}$ која представља то оптерећење делује у тежишту површи, односно, центар притиска се налази у тежишту ($C_1 = D_1$, $\Delta v_{c_1} = 0$). На вертикалној оквашеној површи оптерећење је непрекидно, **неравномерно**, па резултујућа сила притиска $\overrightarrow{F_{N_2}}$ делује у центру притиска који је измештен у односу на тежиште за Δv_{c_2} (слика). Сила $\overrightarrow{N}$ је усмерена од флуида ка затварачу.



Да би се неутралисале непознате силе у ослонцу, користи се услов да је сума свих момената око осовине O једнака нули. За позитиван смер момента усваја се позитиван математички смер (супротно од смера казаљке на сату). Крак сила које делују у оснонцу је једнак нули, па и момент који оне праве око осовине O. Следи једначина:

$$\sum M_0 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad F_{N_1} k_1 - F_{N_2} k_2 - N k_N = 0$$

Са k_i су означени краци одговарајућих сила. Са слике се види да је $k_1 = \frac{a}{2}$ и $k_2 = \frac{a}{2} - \Delta v_c$. Услов да дође до отварања је $\boxed{N = 0}$. Из претходне једначине тада следи:

$$F_{N_1}\frac{a}{2} - F_{N_2}\left(\frac{h}{2} - \Delta v_{c_2}\right) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{F_{N_1}\frac{a}{2} = F_{N_2}\left(\frac{h}{2} - \Delta v_{C_2}\right)} \tag{1}$$

Силе притиска су:

$$F_{N_1} = (p_{c_1} - p_a)A_1 = (p_a + \rho g h - p_a)ab = \rho g h a b$$

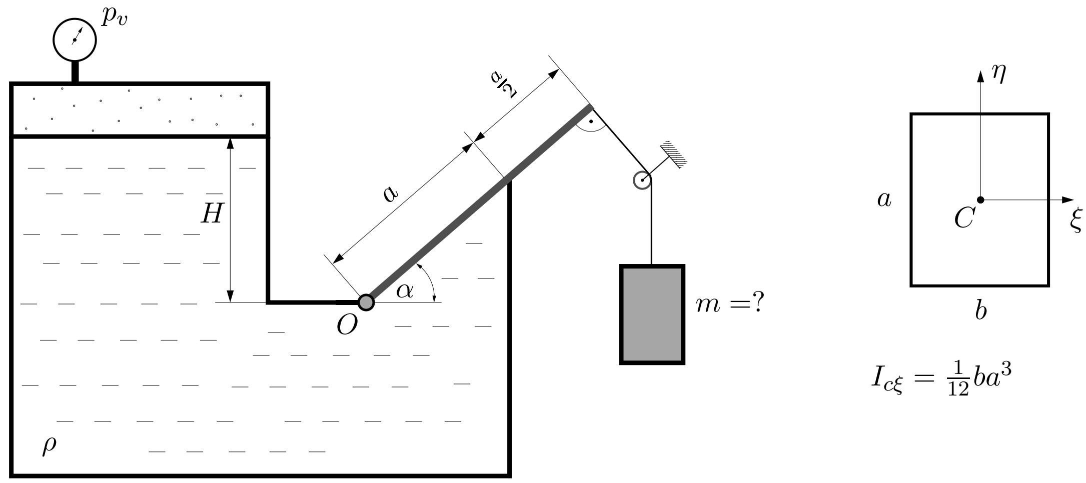
$$F_{N_2} = (p_{c_2} - p_a)A_2 = (p_a + \rho g \frac{h}{2} - p_a)bh = \rho g \frac{h^2}{2} b$$

Положај центра притиска у односу на тежиште C_2 се може одредити на основу следећег израза:

$$\Delta v_{c_2} = \frac{I_{c\xi} \rho g \sin\alpha}{F_{N_2}}\,; \qquad I_{c\xi} = \frac{1}{12} b h^3\,; \qquad \alpha = 90^\circ; \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{\Delta v_{c_2} = \frac{h}{6}}$$

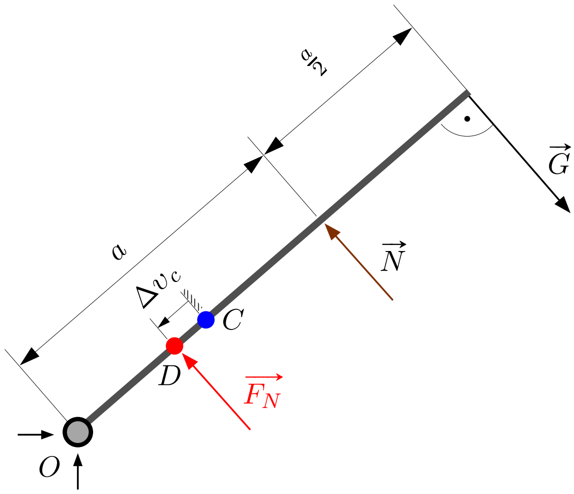
Када се добијени изрази за F_{N_1}, F_{N_2} и Δv_{C_2} уврсте у израз (1), добија се вредност висине h при којој долази до отварања $h = a\sqrt{3}$. Најмања вредност висине при којој ће доћи до отварања је $\boxed{h = a\sqrt{3} = 0{,}866\,\mathrm{m}}$. Резервоар ће бити отворен ако висина h испњава услов $h \geq 0,866\,\mathrm{m}$.

$\boxed{11.}$ Резервоар приказан на слици затворен је правоугаоним затварачем димензија $b = 0{,}8\,\mathrm{m}$ (управно на раван цртежа) и $\frac{3}{2}a$ ($a = 1\,\mathrm{m}$), који може без трења да се обрће око осовине O. У затвореном положају затварач се налази под углом $\alpha = 45^\circ$ у односу на хоризонталу. На једном крају затварача, преко лаког канапа, прикачен је тег. Одредити масу тега која је довољна да отвор буде затворен. Познати су и следећи подаци: $H = 1{,}2\,\mathrm{m}$, $\rho = 1000\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$ и потпритисак у гасу $p_v = 5\,\mathrm{kPa}$.



Решење

Посматра се затварач у затвореном положају, затим се ослобађа од веза, а силе које делују на њега су: силе у ослонцу (осовина O), сила притиска флуида $\overrightarrow{F_N}$, сила реакције $\overrightarrow{N}$ и сила којом тег делује преко лаког ужета (сила тежине тега $\overrightarrow{G}$). Затварач се налази у стању мировања. Због непознатих сила у ослонцу, користи се услов да је сума момената око осовине O једнака нули (тиме су елиминисане силе у ослонцу, јер је њихов крак једнак нули). За позитиван смер момента се користи смер супротан од смера кретања казаљке на сату.



$$\sum M_0 = F_N k_F + N k_N - G k_G = 0 \qquad \Rightarrow \qquad N k_N = G k_G - F_N k_F$$

Услов да отвор буде затворен је $\boxed{N > 0}$, па претходни израз постаје:

$$Gk_G - F_N k_F > 0 \qquad \Rightarrow \qquad Gk_G > F_N k_F.$$

Са слике се види да кракови сила имају следеће вредности: $k_G = \frac{3}{2}a$ и $k_F = \frac{a}{2} - \Delta v_c$. Следи:

$$\boxed{m > \frac{2}{3ag} F_N \left(\frac{a}{2} - \Delta v_c\right)} \qquad (2)$$

Непознате величине у претходном изразу су сила притиска F_N и релативни положај центра притиска у односу на тежиште Δv_c.

Апсолутни притисак у гасу износи $p_a - p_v$, па се може одредити вредности апсолутног притиска у тежишту оквашеног дела равне површи, а на основу ње и интензитет силе притиска:

$$p_c = p_a - p_v + \rho g H - \rho g \tfrac{a}{2} \sin\alpha$$
$$F_N = (p_c - p_a)A = \left[-p_v + \rho g \left(H - \tfrac{a}{2}\sin\alpha\right)\right] ab = \boxed{2642{,}9\,\mathrm{N}}$$

Релативни положај центра притиска у односу на тежиште је:

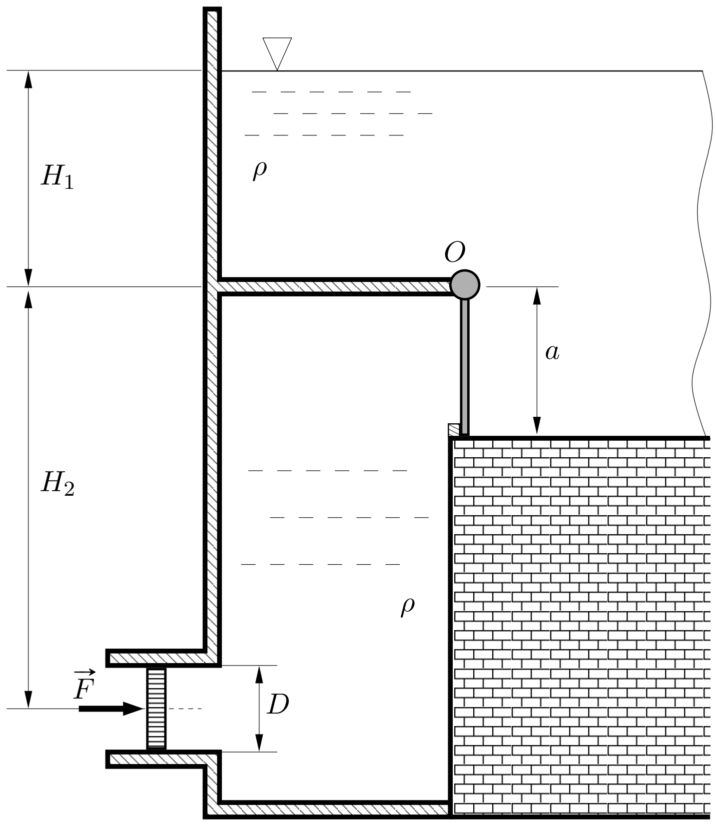
$$\Delta v_c = \frac{I_{c\xi} \sin\alpha\, \rho g}{F_N} = \frac{\frac{1}{12} b a^3 \sin\alpha\, \rho g}{F_N} = \boxed{0{,}17498\,\mathrm{m}}$$

Коначно, из израза (2) следи услов за масу тега који обезбеђује да затварач буде у затвореном положају:

$$\boxed{m > 58{,}376\,\mathrm{kg}.}$$

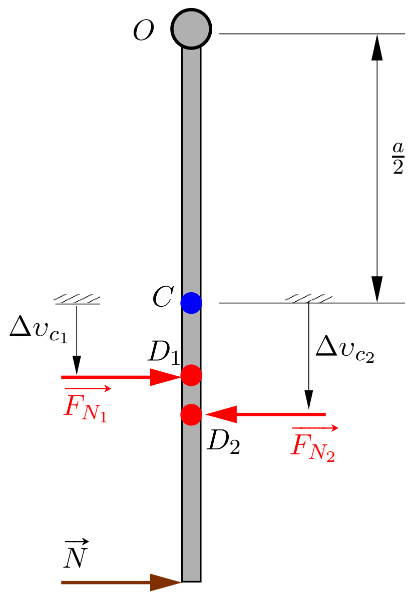
---

12. У преграђеном зиду између два резервоара са водом густине $\rho = 1000\mathrm{kg/m^3}$, налази се затварач облика квадрата странице $a = 0{,}5\,\mathrm{m}$. Затварач је обртан око осовине која пролази кроз тачку O. У доњем резервоару се обезбеђује натпритисак деловањем силе $F = 140\,\mathrm{N}$ на клип пречника $D = 50\,\mathrm{mm}$. Одредити висину H_1 потребну да затварач остане у затвореном положају. Позната је висина $H_2 = 5\,\mathrm{m}$. Атмосферски притисак износи $p_a = 10^5\,\mathrm{Pa}$. Тежишни момент инерције за квадрат гласи: $I_{c,\xi} = \frac{1}{12}a^4$.



Решење

Затварач који се налази у затвореном положају се ослобађа од веза. На њега делују силе у ослонцу O, сила реакције граничника $\vec{N}$, и силе притиска воде са обе стране.



Моментна једначина за тачку O гласи:

$$Nk_N + F_{N_1}k_{F_{N_1}} - F_{N_2}k_{F_{N_2}} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad Nk_N = F_{N_2}k_{F_{N_2}} - F_{N_1}k_{F_{N_1}}.$$

Услов да затварач остане у затвореном положају је постојање силе реакције $\boxed{N > 0}$, па из претходног израза следи:

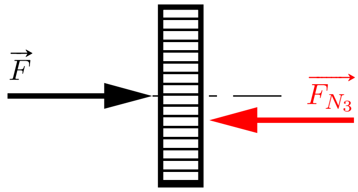
$$F_{N_2}k_{F_{N_2}} > F_{N_1}k_{F_{N_1}}.$$

Са слике се види да је $k_{F_{N_1}} = \frac{a}{2} + \Delta v_{c1}$ и $k_{F_{N_2}} = \frac{a}{2} + \Delta v_{c2}$.

$$\boxed{F_{N_2}\left(\frac{a}{2} + \Delta v_{c2}\right) > F_{N_1}\left(\frac{a}{2} + \Delta v_{c1}\right)} \qquad (3)$$

У претходном изразу су непознати интезитети сила притиска и растојања центара притиска од тежишта. Обе силе притиска ће се одредити тако као да се са друге стране затварача налази ваздух на атмосферском притиску, тј. према изразу $F_N = (p_c - p_a)A$. У тежишту затварача, са две стране владају различите вредности притиска, па се користе ознаке p_{c1} и p_{c2}.

Најпре се одређује сила притиска $F_{N_1} = (p_{c1} - p_a)A$. Поље притиска у доњем резервоару се одређује из услова мировања клипа. Сума свих сила које делују на клип у хоризонталном правцу је једнака нули, а то су сила F и сила притиска флуида F_{N_3}, па следи да су ове супротносмерне силе једнаке по интензитету $F = F_{N_3}$.



$$F = (p_{c3} - p_a)A_k = (p_{c3} - p_a)\frac{D^2\pi}{4} \qquad \Rightarrow \qquad p_{c3} = p_a + \frac{4F}{D^2\pi} = \boxed{171301,4\,\mathrm{Pa}}$$

Након одређивања притиска у тежишту клипа (p_{c3}), могуће је одредити притисак у тежишту затварача, са његове леве стране:

$$p_{c1} = p_{c3} - \rho g H_2 + \rho g \frac{a}{2} = \boxed{124703,9\,\mathrm{Pa}.}$$

Сила притиска којом вода из доњег резервоара делује на затварач износи:

$$F_{N_1} = (p_{c1} - p_a)a^2 = \boxed{6175,98\,\mathrm{N}},$$

а положај центра притиска D_1 у односу на тежиште C одређен је координатом:

$$\Delta v_{c_1} = \frac{I_{c\xi}\sin 90^\circ \rho g}{F_{N_1}} = \frac{\frac{1}{12}a^4\rho g}{F_{N_1}} = \boxed{0,008273\,\mathrm{m}.}$$

Сила притиска коју ствара вода из горњег резервоара је:

$$F_{N_2} = (p_{c2} - p_a)A = \left(p_a + \rho g H_1 + \rho g \frac{a}{2} - p_a\right)A \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{F_{N_2} = \rho g\left(H_1 + \frac{a}{2}\right)a^2}. \qquad (4)$$

Растојање центра притиска D_2 од тежишта C је:

$$\Delta v_{c_2} = \frac{I_{c\xi}\sin 90^\circ \rho g}{F_{N_2}} = \frac{\frac{1}{12}a^4\rho g}{\rho g\left(H_1+\frac{a}{2}\right)a^2} = \boxed{\frac{a^2}{12\left(H_1+\frac{a}{2}\right)}}. \tag{5}$$

Када се изрази (4), (5) врате у израз (3) следи:

$$\rho g\left(H_1+\frac{a}{2}\right)a^2\left[\frac{a}{2}+\frac{a^2}{12\left(H_1+\frac{a}{2}\right)}\right] > F_{N_1}\left(\frac{a}{2}+\Delta v_{c_1}\right)$$

Након сређивања израза добија се:

$$H_1 > \frac{2F_{N_1}}{a^3\rho g}\left(\frac{a}{2}+\Delta v_{c_1}\right) - \frac{a}{6} - \frac{a}{2} > \boxed{2{,}268\,\mathrm{m}}.$$

Задатак се могао довести до краја и у општим бројевима:

$$p_{c3} = p_a + \frac{4F}{D^2\pi}$$

$$p_{c1} = p_a + \frac{4F}{D^2\pi} - \rho g H_2 + \rho g\frac{a}{2}$$

$$\boxed{F_{N_1} = \left(\frac{4F}{D^2\pi} - \rho g H_2 + \rho g\frac{a}{2}\right)a^2} \qquad \boxed{\Delta v_{c_1} = \frac{I_{c\xi}\rho g\sin\alpha}{F_{N_1}}}$$

$$p_{c2} = p_a + \rho g H_1 + rhog\frac{a}{2}$$

$$\boxed{F_{N_2} = \left(\rho g H_1 + \rho g\frac{a}{2}\right)a^2} \qquad \boxed{\Delta v_{c_2} = \frac{I_{c\xi}\rho g\sin\alpha}{F_{N_2}}}$$

Када се ове једначине уврсте у моментну једначину (3) следи:

$$F_{N_2}\frac{a}{2} + F_{N_2}\frac{I_{c\xi}\rho g\sin\alpha}{F_{N_2}} > F_{N_1}\frac{a}{2} + F_{N_1}\frac{I_{c\xi}\rho g\sin\alpha}{F_{N_1}}$$

$$F_{N_2}\frac{a}{2} > F_{N_1}\frac{a}{2}$$

$$\left(\rho g H_1 + \rho g\frac{a}{2}\right)a^2 > \left(\frac{4F}{D^2\pi} - \rho g H_2 + \rho g\frac{a}{2}\right)a^2$$

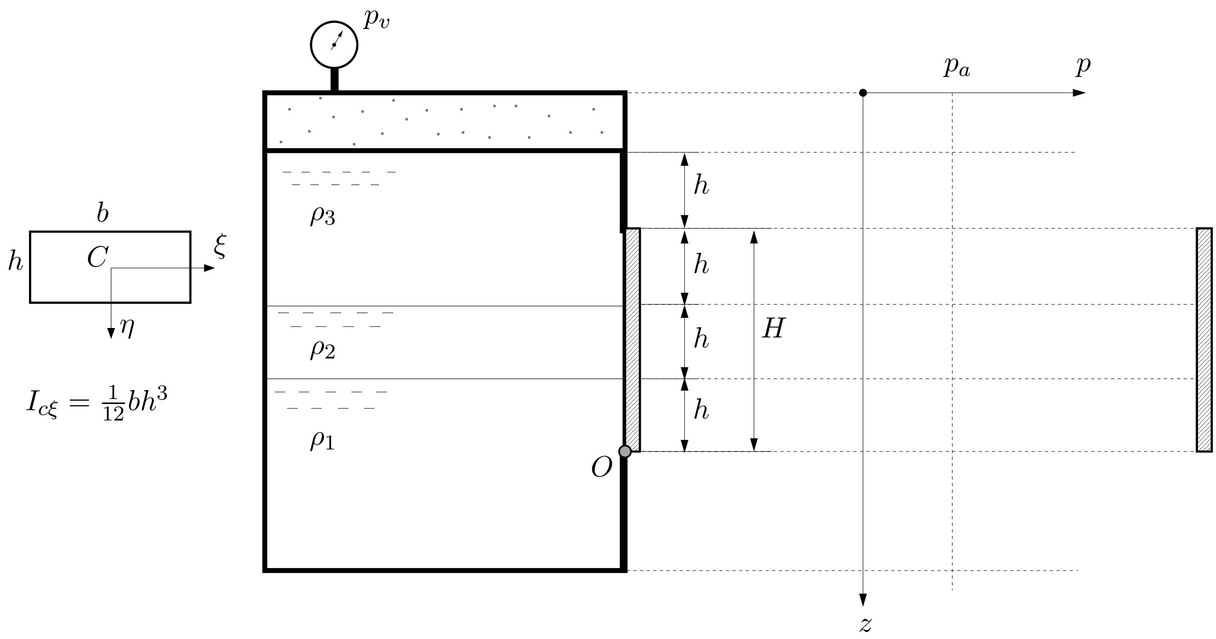
$$\rho g H_1 + \cancel{\rho g\frac{a}{2}} > \frac{4F}{D^2\pi} - \rho g H_2 + \cancel{\rho g\frac{a}{2}}$$

$$H_1 > \frac{4F}{D^2\pi\rho g} - H_2$$

$$\boxed{H_1 > 2{,}268\,\mathrm{m}} \tag{6}$$

---

13. Одредити силу притиска којом течности делују на поклопац који затвара правоугаони отвор димензија $H = 3\,\mathrm{m}$, $b = 2\,\mathrm{m}$ (управно на раван цртежа), ако су познати следећи подаци: $h = 1\,\mathrm{m}$, $\rho_1 = 1200\,\mathrm{kg/m^3}$, $\rho_2 = 1000\,\mathrm{kg/m^3}$, $\rho_3 = 900\,\mathrm{kg/m^3}$ и вредност потпритиска у гасу мерена вакуумметром $p_v = 0{,}2\,\mathrm{bar}$. Поклопац може да се обрће око осовине O, да ли ће у овом случају доћи до отварања поклопца? Доказати. Одредити ниво слободне површи течности густине ρ_2. На дијаграму десно од слике скицирати промену апсолутног притиска од врха до дна резервоара. На основу скициране расподеле притиска означити на поклопцу (скроз десно) стварни смер сила притиска и стварни положај центара притиска за све три течности.

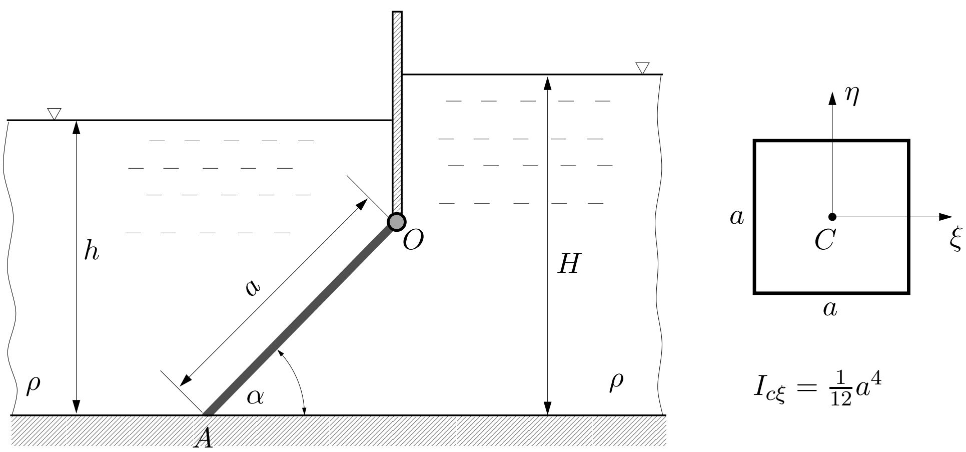


Решење

Силе имају следеће вредности: $F_{N_3} = -13513\,\mathrm{N}$, $F_{N_2} = 5126\,\mathrm{N}$, $F_{N_1} = 26708\,\mathrm{N}$, па укупна сила има вредност $F_N = 18321\,\mathrm{N}$ и усмерена је од течности ка поклопцу, али до његовог отварања неће доћи, што се може доказати коришћењем моментне једначине за тачку O.

---

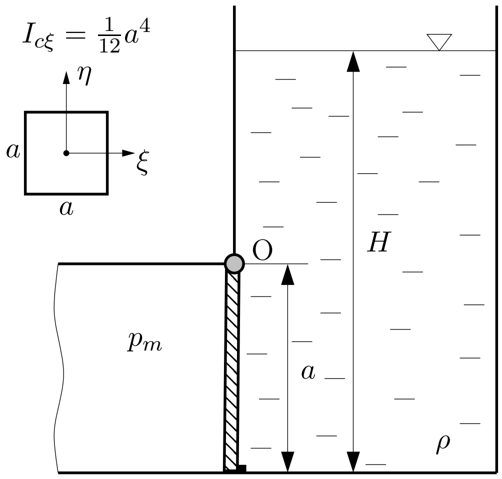
14. Отвор при дну преградног зида између два велика резервоара затворен је затварачем облика квадрата странице $a = 1\,\mathrm{m}$ и масе $m = 25\,\mathrm{kg}$, на начин приказан на слици. Затварач се у тачки A ослања на дно суда, и он може без трења да се обрће око осовине O. Одредити минималну вредност висине H при којој ће доћи до обртања затварача. Дати су и следећи подаци: $\rho = 1000\,\mathrm{kg\ m^3}$, $h = 1{,}5\,\mathrm{m}$ и $\alpha = 45°$.

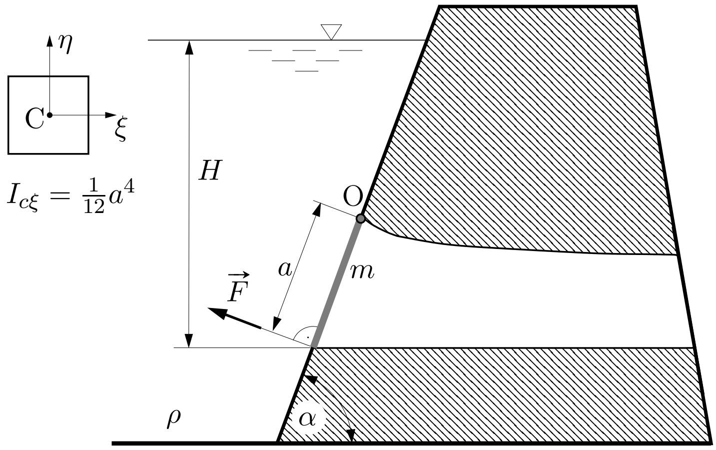


Решење: $H = 1{,}518\,\mathrm{m}$.

15. Поклопац квадратног попречног пресека затвара излаз из резервоара у коме се налази вода. Са друге стране поклопца налази се ваздух под натпритиском p_m. Поклопац може да се обрће око осовине O. Одредити услов за вредност натпритиска у ваздуху p_m тако да отвор буде затворен. Познате су вредности $H = 3\,\mathrm{m}$, $a = 1\,\mathrm{m}$, $\rho = 1000\,\mathrm{kg/m^3}$.

Решење: $p_m > 26160\mathrm{Pa}$





16. На слици је приказана брана која задржава воду ($\rho = 1000\,\mathrm{kg/m^3}$) у акумулационом језеру. На брани се налази затварач облика квадрата странице $a = 1\,\mathrm{m}$, који може да се обрће око осовине O. Оквашена страна бране се налази под углом $\alpha = 70°$ у односу на хоризонталу. **(а)** Ако је дубина $H = 2{,}5\mathrm{m}$, одредити силу којом вода делује на затварач. **(б)** Одредити минималну вредност интензитета силе $\vec{F}$ којом треба деловати на затварач тако да дође до његовог отварања (обртања око осовине O). Маса затварача је $m = 120\,\mathrm{kg}$.

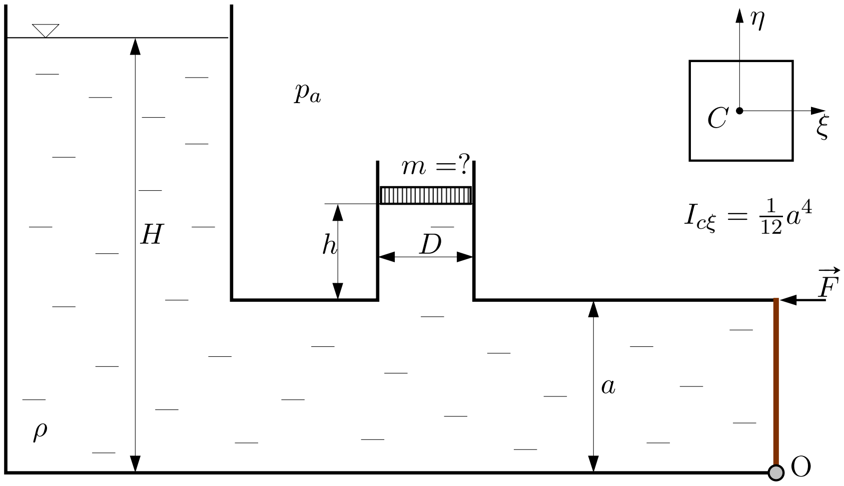
Решење: $F = 10927{,}4\,\mathrm{N}$

---

17. На слици је приказан резервоар у коме вода мирује ($\rho = 1000\,\mathrm{kg/m^3}$). Леви део резервоара је отворен ка атмосфери и ниво воде у њему износи $H = 1{,}5\,\mathrm{m}$. У цилиндричном делу резервоара пречника $D = 200\,\mathrm{mm}$ се налази клип масе m, на висини $h = 200\,\mathrm{mm}$.

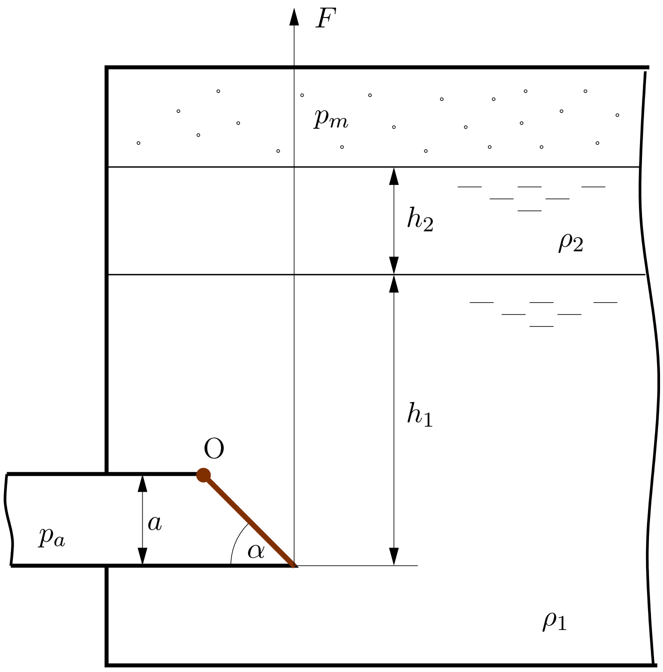
(а) Одредити масу клипа који се налази у стању мировања.

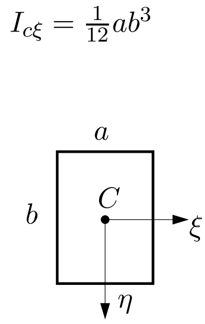
(б) Резервоар има и бочни отвор који је затворен квадратним затваречем странице $a = 500\,\mathrm{mm}$. Затварач може да се обрће око осовине O. Одредити интензитет силе F којом је потребно деловати да би отвор био затворен.



Решење: $m = 25{,}13\,\mathrm{kg}$, $F > 1430{,}6\,\mathrm{N}$

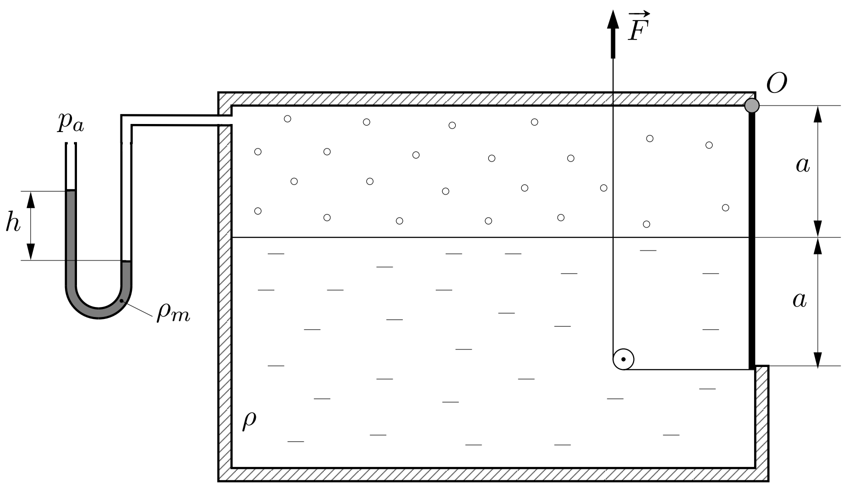
18. Поклопац занемарљиво мале тежине затвара излаз из великог резервоара у одводни канал квадратног попречног пресека $a = 0{,}2\,\mathrm{m}$. Поклопац са хоризонталом заклапа угао $\alpha = 45°$. Он се може обртати око осовине O без трења. У резервоару се налазе две течности које се не мешају, густина: $\rho_1 = 1000\,\mathrm{kg/m^3}$, $\rho_2 = 900\,\mathrm{kg/m^3}$. У гасу изнад течности влада натпритисак $p_m = 5\,\mathrm{kPa}$. Ако су познате висине $h_1 = 2\,\mathrm{m}$ и $h_2 = 0{,}5\,\mathrm{m}$ израчунати најмању силу у ужету $\vec{F}$ којом је потребно деловати да би дошло до отварања поклопца.

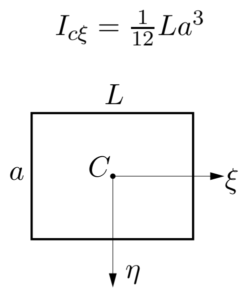




Решење: $F = 1133{,}9\,\mathrm{N}$

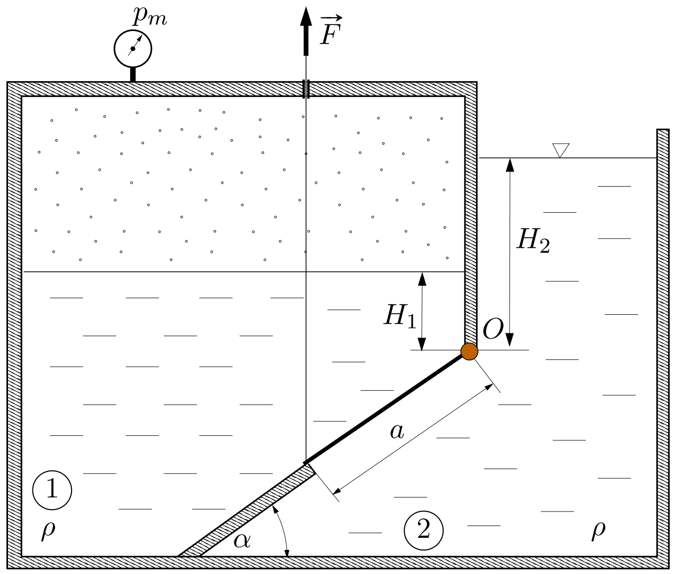
19. На слици је приказан резервоар у коме се налазе гас и вода густине $\rho = 1000\,\mathrm{kg/m^3}$. Притисак у гасу се мери помоћу диференцијалног манометра („У”-цеви) чије је показивање $h = 0{,}2\,\mathrm{m}$. Манометарска течност је жива густине $\rho_m = 13600\,\mathrm{kg/m^3}$. Затварач облика правоугаоника димензија $2a = 2\,\mathrm{m}$ и $L = 1{,}5\,\mathrm{m}$ (управно на раван цртежа), може да се обрће око осовине O. Одредити најмању вредност силе $\vec{F}$ којом треба деловати на уже да би дошло до отварања разервоара.

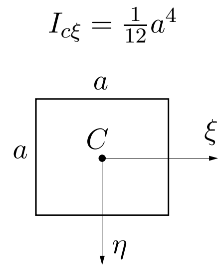




Решење: $F = 46156\,\mathrm{N}$

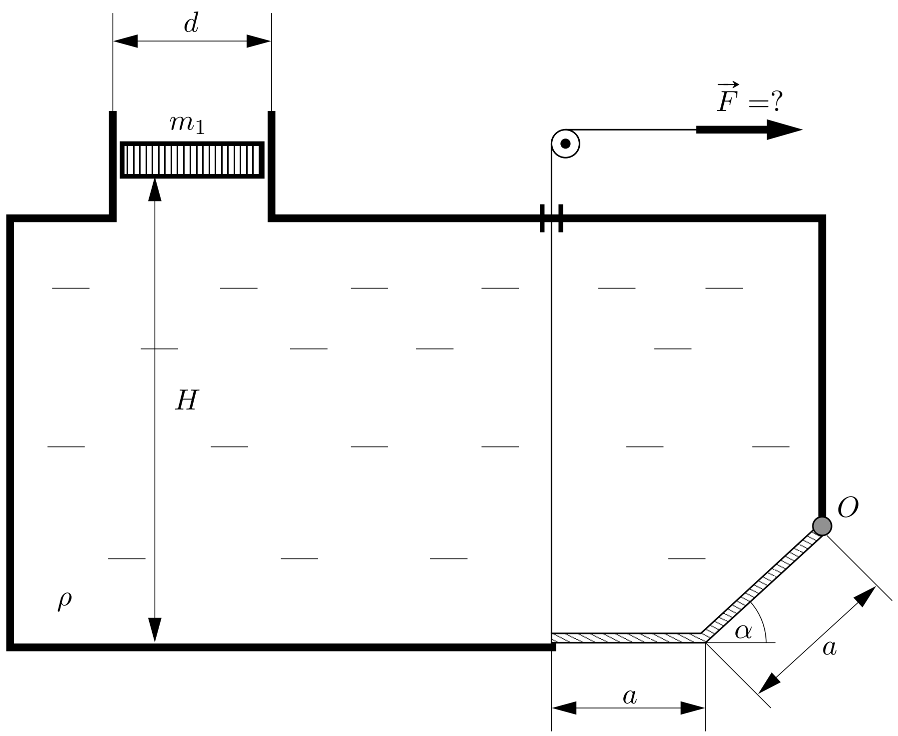
20. У преградном зиду резервоара се налази квадратни затварач странице $a = 1\,\mathrm{m}$ који може да се обрће око осовине O. Са обе стране преградног зида се налази вода ($\rho = 1000\,\mathrm{kg/m^3}$). Одредити најмањи интензитет силе F која је потребна да дође до отварања затварача ако су познати следећи подаци: $H_1 = 0{,}3\,\mathrm{m}$, $H_2 = 1\,\mathrm{m}$, $\alpha = 60^\circ$, $p_m = 10\,\mathrm{kPa}$.

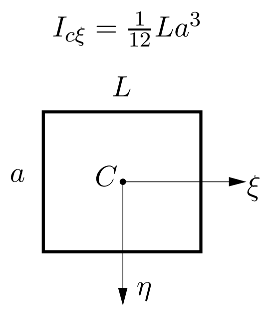




Решење: $F = 3133\,\mathrm{N}$

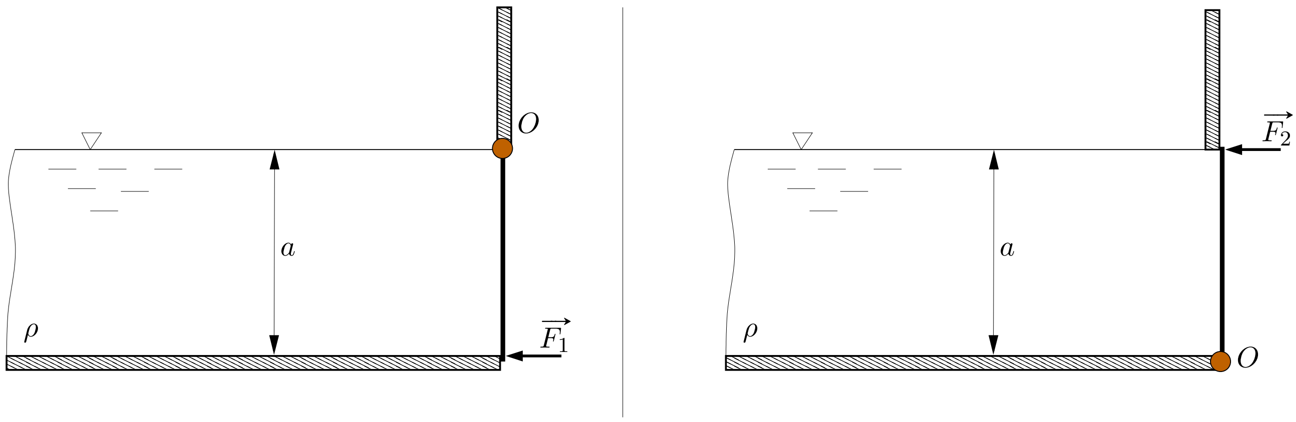
21. На слици је приказан резервоар испуњен водом густине $\rho = 1000\,\mathrm{kg/m^3}$. На врху резервоара се налази клип масе $m_1 = 20\,\mathrm{kg}$ и пречника $d = 0{,}5\,\mathrm{m}$, који мирује. Одредити услов за вредност силе $\vec{F}$ којом је потребно деловати на канап да би дошло до отварања угластог затварача, који може да се обрће око осовине O. Тежину затварача занемарити. Димензија затварача управно на раван цртежа је $L = 2\,\mathrm{m}$. Познати су и следећи подаци: $a = 1\,\mathrm{m}$, $H = 2{,}5\,\mathrm{m}$, $\alpha = 45^\circ$. Одредити ниво слободне површи воде.





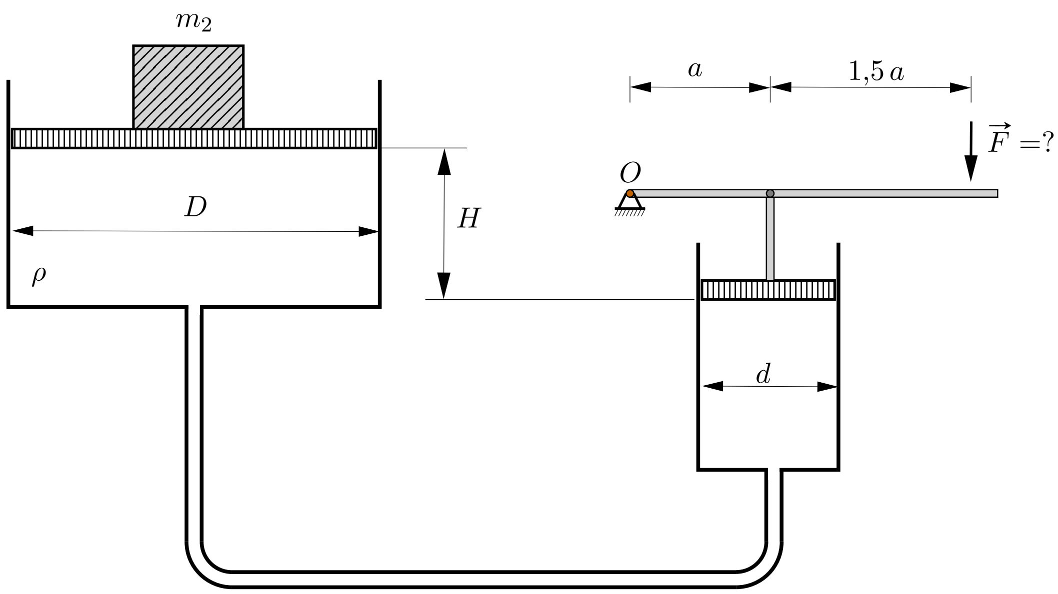
Решење: $F > 49693{,}7\,\mathrm{N}$

22. На резервоару у којем се налази вода постоји отвор квадратног попречног пресека, странице a. Затварач, који онемогућава води да изађе из резервоара, може да се обрће око осовине O, која може бити постављена на горњој или на доњој ивици затварача, као што је приказано на слици. Ако се са $\vec{F_1}$ и $\vec{F_2}$ означе силе којима је потребно деловати на поклопац да би он био у затвореном положају, одредити њихов однос.



Решење: $F_1/F_2 = 2$

23. На слици је приказан хидраулични систем који је испуњен уљем густине $\rho = 900\,\mathrm{kg/m^3}$. У цилиндру пречника $D = 700\,\mathrm{mm}$ се налази клип са теретом масе $m_2 = 1000\,\mathrm{kg}$. У мањем цилиндру пречника $d = 300\,\mathrm{mm}$ се налази клип који је спојен са полугом. Ако се тежине клипова могу занемарити, одредити вредност силе F при којој ће систем бити у стању равнотеже. Висинка разлика износи $H = 500\,\mathrm{mm}$.



Решење: $F = 845,6\,\mathrm{N}$, то је сила тежине тега масе $m_1 \approx 86\,\mathrm{kg}$.

3 Сила притиска на криве површи

Најпре се уочи и издвоји крива површ за коју је потребно одредити силу притиска. Затим се крива површ затвара додавањем једне или више равних површи, чиме се добија издвојена запремина V. Ако се флуид, чије дејство на криву површ је потребно одредити, налази изван запремине V користи се метода потиска, а ако се флуид налази унутар запремине V за решавање се користи метода равнотеже течности.

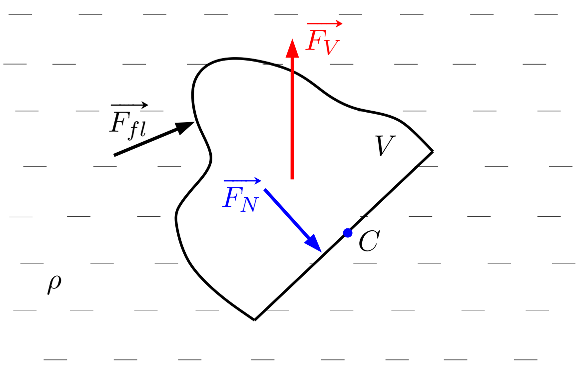
Метода потиска

Запремина V која је добијена додавањем равних површи, представља тело које је потпуно потопљено у флуид чије дејство на криву површ треба одредити. Посматрају се: Архимедова сила потиска $\overrightarrow{F_V}$, тражена сила притиска на криву површ $\overrightarrow{F_{fl}}$, и силе притиска на уведеним равним површима $\overrightarrow{F_N}$ које су усмерене из унутрашњости запремине V ка спољашњости. Може се показати да важи:

$$\boxed{\overrightarrow{F_{fl}} = \overrightarrow{F_N} + \overrightarrow{F_V}}$$

Ако је за затварање криве површи коришћено више равних површи, претходни израз гласи:

$$\boxed{\overrightarrow{F_{fl}} = \sum \overrightarrow{F_N} + \overrightarrow{F_V}}$$



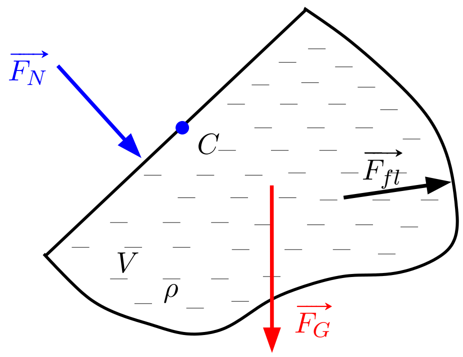
Метода равнотеже течности

Издвајају се запремина V, која је добијена додавањем равних површи, и флуид који се налази унутар ње. Посматрају се: сила тежине флуида који се налази унутар запремине $\overrightarrow{F_G}$, тражена сила притиска на криву површ $\overrightarrow{F_{fl}}$, и силе притиска којима одбачени део флуида делује на уведеним равним површима $\overrightarrow{F_N}$ (усменерне су од спољашњости ка запремини V). Може се показати да важи:

$$\boxed{\overrightarrow{F_{fl}} = \overrightarrow{F_N} + \overrightarrow{F_G}}$$

Ако је за затварање криве површи коришћено више равних површи, претходни израз гласи:

$$\boxed{\overrightarrow{F_{fl}} = \sum \overrightarrow{F_N} + \overrightarrow{F_G}}$$

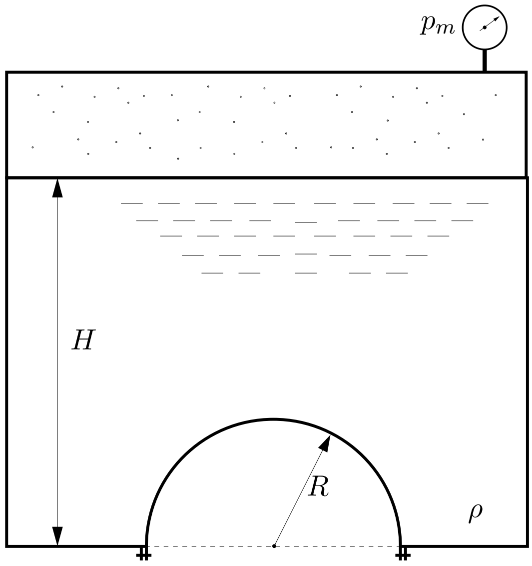


Интензитет силе потиска је $F_V = \rho g V$, а интензитет силе тежине флуида је $F_G = \rho g V$, па се закључује да је **значај приказаних метода** у следећем: одређивање силе притиска на неправилне криве површи је сведено на одређивање, једне или више, сила притиска на равне површи и на одређивање запремине V.

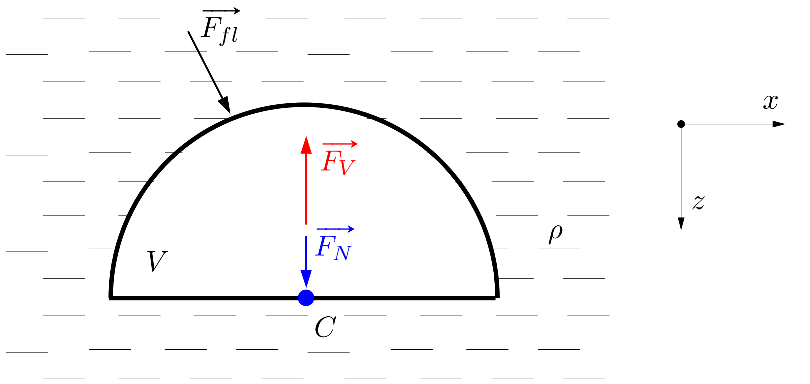
24. На слици 1 је приказан резервоар који на доњем делу има затварач облика полуцилиндра (полупречника $R = 0,5\,\mathrm{m}$ и дужине $L = 2\,\mathrm{m}$). У резервоару се налази течност густине $\rho = 1000\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$ до нивоа $H = 1,5\,\mathrm{m}$. Ако је натпритисак у гасу $p_m = 5\,\mathrm{kPa}$, одредити интензитет силе притиска која делује на полуцилиндрични затварач.

Решење

Потребно је одредити силу притиска на криву површ која представља половину омотача цилиндра. Издваја се крива површ и затвара се додавањем једне равне површи, која је у овом случају правоугаоник страница $2R$ и L. На тај начин формирана је запремина V. Флуид чије дејство на криву површ је потребно одредити, се налази **изван** запремине V, па се за решавање овог задатка користи **метода потиска**.



Слика 1



Према методи потиска, векторски израз за силу притиска на криву површ гласи:

$$\boxed{\overrightarrow{F_{fl}} = \overrightarrow{F_N} + \overrightarrow{F_V}} \tag{7}$$

Сила потиска и сила притиска на равну површ имају следеће вредности:

$$\begin{aligned} F_V &= \rho g V = \rho g \frac{1}{2} R^2 \pi L = \boxed{7704,76\,N}, \\ F_N &= (p_c - p_a)A = (p_a + p_m + \rho g H - p_a)2RL = \boxed{39430\,\mathrm{N}}. \end{aligned}$$

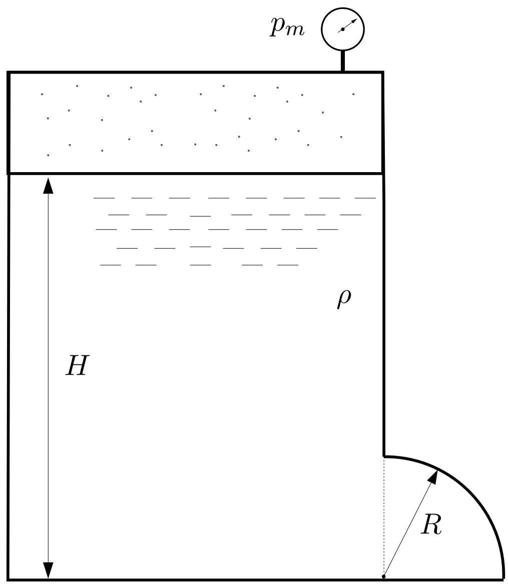
Пројектовањем векторске једначине (7) на осе координатног система, добијају се компоненте силе притиска на криву површ:

$$\begin{aligned} x: \quad & F_{fl_x} = 0 + 0 = 0\,\mathrm{N} \\ z: \quad & F_{fl_z} = -F_V + F_N = 31725,24\,\mathrm{N} \end{aligned}$$

Укупна сила притиска која делује на полуцилиндрични затварач је вертикалног правца, усмерена као и оса z и износи:

$$\boxed{F_{fl} = \sqrt{F_{fl_x}^2 + F_{fl_z}^2} = 31725,24\,\mathrm{N}.}$$

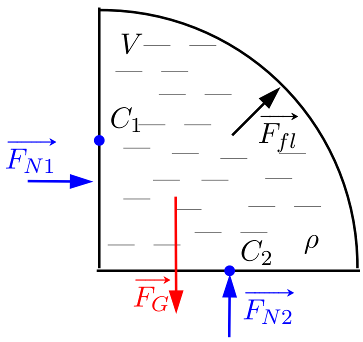
25. Одредити правац, смер и интензитет силе притиска која делује на затварач облика четвртине омотача цилиндра полупречника $R = 0{,}2\,\mathrm{m}$ (слика 2). Димензија затварача и целог резервоара управна на раван цртежа је $L = 1{,}5\,\mathrm{m}$. Познати су и следећи подаци: $p_m = 0{,}1\,\mathrm{bar}$, $H = 1{,}5\,\mathrm{m}$ и $\rho = 1000\mathrm{kg\ m}^3$.

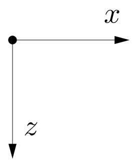


Слика 2

Решење

Издваја се затварач који је облика четвртине омотача цилиндра. Крива површ се затвара додавањем две равне површи облика правоугаоника страница R и L. Флуид чије дејство на криву површ треба одредити се налази унутар добијене запремине V, па се за решавање примењује метода равнотеже течности.





Према методи равнотеже течности сила притиска на криву површ гласи:

$$\overrightarrow{F_{fl}} = \overrightarrow{F_{N1}} + \overrightarrow{F_{N2}} + \overrightarrow{F_G}. \tag{8}$$

Интензитети сила притиска на равне површи су:

$$\begin{aligned} F_{N1} &= (p_{c1} - p_a)A_1 = \left[p_a + p_m + \rho g\left(H - \frac{R}{2}\right) - p_a\right] RL = \boxed{7120{,}2\,\mathrm{N}}, \\ F_{N2} &= (p_{c2} - p_a)A_2 = (p_a + p_m + \rho g H - p_a)RL = \boxed{7414{,}5\,\mathrm{N}}. \end{aligned}$$

Интензитет силе тежине флуида унутар запремине V је:

$$F_G = \rho g V = \rho g \frac{1}{4} R^2 \pi L = \boxed{462{,}29\,\mathrm{N}}.$$

Пројектовањем једначине (8) на осе x и z добијају се пројекције укупне силе притиска на ркриву површ:

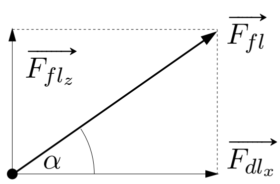
$$\begin{aligned} x:\quad & F_{fl_x} = F_{N1} + 0 + 0 = \boxed{7120{,}2\,\mathrm{N}}, \\ z:\quad & F_{fl_z} = 0 - F_{N2} + F_G = \boxed{-6952{,}21\,\mathrm{N}}. \end{aligned}$$

Интензитет укупне силе притиска на криву површ износи:

$$F_{fl} = \sqrt{F_{fl_x}^2 + F_{fl_z}^2} = \boxed{9951{,}41\,\mathrm{N}}.$$

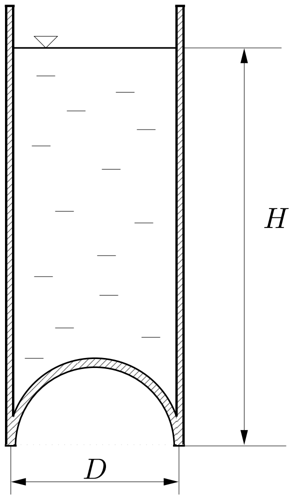
Правац и смер силе притиска одређен је углом α чија вредност износи:

$$\tan\alpha = \frac{F_{fl_z}}{F_{fl_x}} \qquad \Rightarrow \qquad \alpha = \arctan\frac{F_{fl_z}}{F_{fl_x}} = \boxed{44{,}284^\circ}.$$

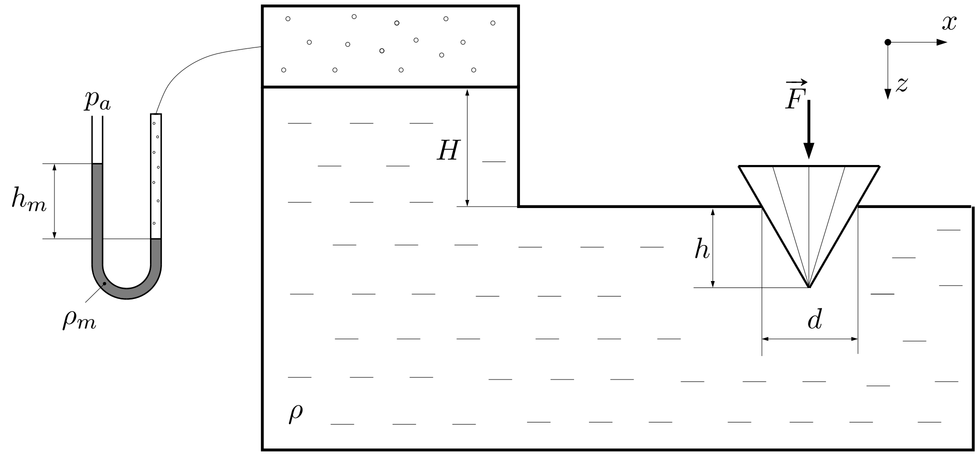


26. Цилиндрични резервоар (слика 3) који је напуњен водом $\rho = 1000\,\mathrm{kg/m^3}$ има дно облика плусфере. Ако је $H = 8\,\mathrm{m}$ и $D = 3\,\mathrm{m}$ одредити силу притиска која делује на дно резервоара.

Решење: $F_{fl_z} = 485400\,\mathrm{N}$, смер силе $\downarrow$



Слика 3



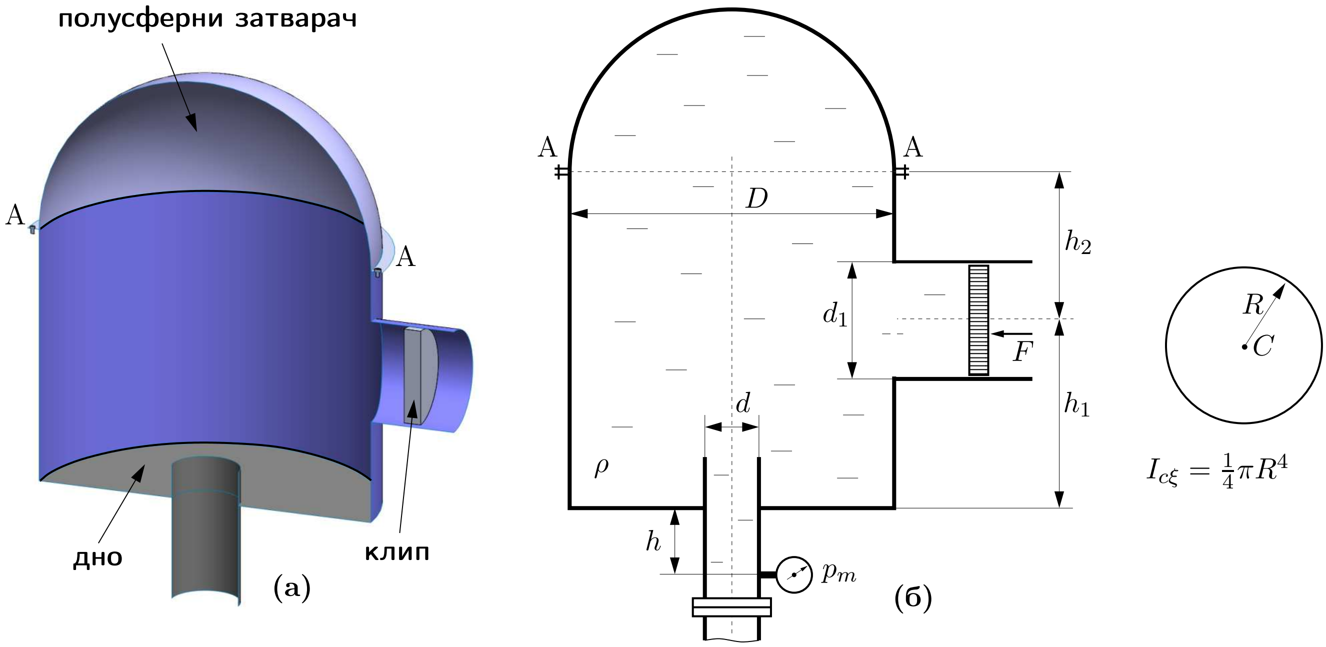
Слика 4

27. Хоризонтални кружни отвор у резервоару приказаном на слици 4, затворен је конусним затварачем занемарљиве тежине. Одредити силу F којом треба деловати на затварач тако да отвор буде затворен. Познати су следећи подаци: $\rho_m = 13600\,\mathrm{kg/m^3}$, $h_m = 50\,\mathrm{mm}$, $H = 1\,\mathrm{m}$, $\rho = 1000\,\mathrm{kg/m^3}$, $d = h = 100\,\mathrm{mm}$.

Решење: $F > 132\,\mathrm{N}$

---

28. На слици 5 **(а)** и **(б)** је приказан попречни пресек цилиндричног резервоара пречника $D = 1\,\mathrm{m}$, у коме вода мирује ($\rho = 1000\,\mathrm{kg/m^3}$). Показивање манометра, који се налази на вертикалној цеви пречника $d = 150\,\mathrm{mm}$, је $p_m = 30\,\mathrm{kPa}$. Са бочне стране резервоара се налази цев са клипом пречника $d_1 = 400\,\mathrm{mm}$. Познате су и висине $h = 200\,\mathrm{mm}$, $h_1 = 500\,\mathrm{mm}$ и $h_2 = 250\,\mathrm{mm}$.



Слика 5

(а) Одредити силу којом вода делује на дно цилиндричног резервоара облика кружног прстена.

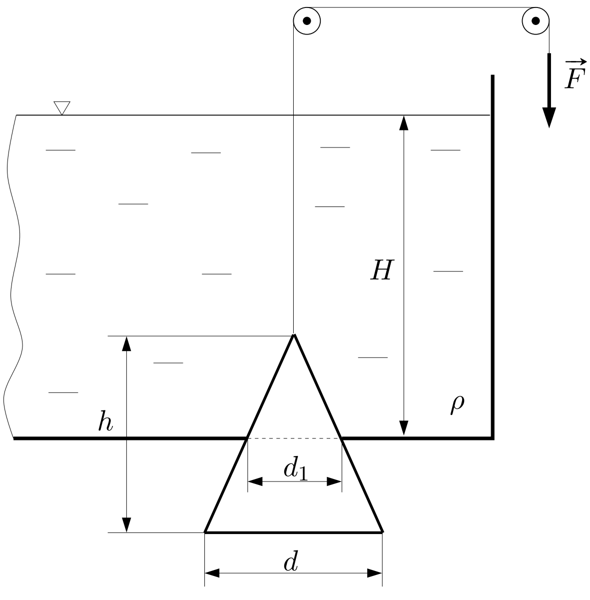
(б) Одредити интензитет силе $\vec{F}$ којом је потребно деловати на клип да би он био у стању мировања. Одредити правац деловања силе $\vec{F}$ у односу на осу симетрије клипа, тако да спрег сила које делују на клип буде једнак нули.

(б) Полусферни затварач је причвршћен за цилиндрични суд завртањском везом A-A. Ако је маса поклопца $m = 30\,\mathrm{kg}$ одредити оптерећење завртањске везе A-A. Да би завртањска веза била неоптерећена, да ли је потребно повећати или смањити вредност натпритиска p_m? Кратко образложити.

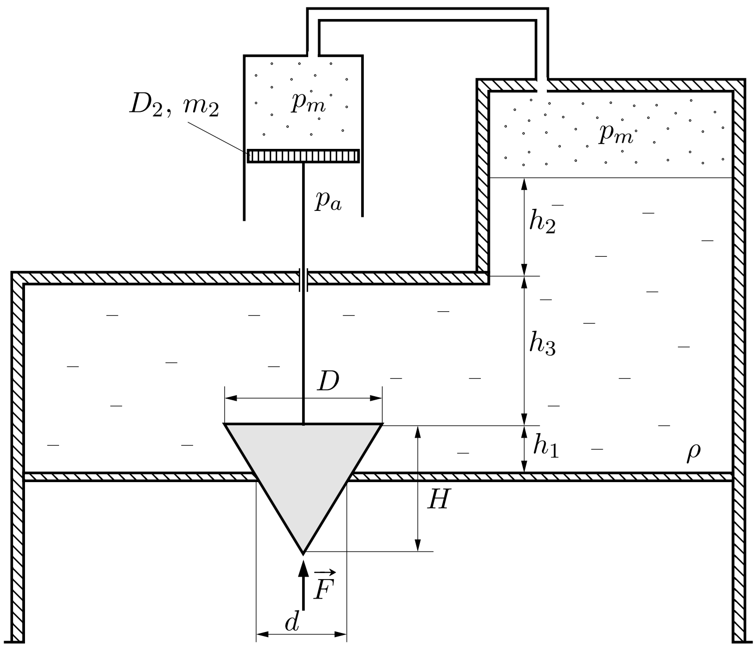
Решење:
(а) $F_d = 21525{,}5\,\mathrm{N}$,
(б) $F = 2907\,\mathrm{N}$, $\Delta v_c = 4{,}2\,\mathrm{mm}$
(в) $F_{\mathrm{AA}} = 13379{,}9\,\mathrm{N}$ смер силе $\uparrow$. Треба смањити вредност притиска да би се смањила сила притиска на додату равну површ F_N. У тренутку када се она уравнотежи са збиром сила F_g и G, завртањска веза ће бити неоптерећена.

29. Конусни затварач, димензија $d = 1000\,\mathrm{mm}$ и $h = 1200\,\mathrm{mm}$ затвара кружни отвор пречника $d_1 = d/2$ на дну резервоара, као што је приказано на слици 6. Маса затварача је $m = 80\,\mathrm{kg}$, и он затвара отвор захваљујући дејству силе $F = 2500\,\mathrm{N}$. У суду се налази вода густине $\rho = 1000\,\mathrm{kg/m^3}$. Одредити услов који мора да задовољи висина H тако да отвор сигурно буде затворен.

Решење: $H < 1{,}0905\,\mathrm{m}$.



Слика 6



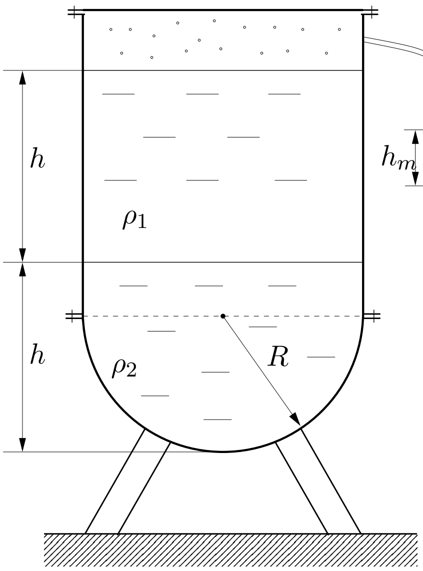
Слика 7

30. У резервоару, приказаном на слици 7, налаза се вода и ваздух под натпритиском p_m. На дну резервоара се налази кружни отвор који је затворен конусним затварачем масе $m_1 = 20\,\mathrm{kg}$. На затварач делује спољашња сила $F = 1500\,\mathrm{N}$. Затварач је помоћу круте везе повезан са клипом који се налази у цилиндру изнад резервоара. Маса и пречник клипа износе $m_2 = 10\,\mathrm{kg}$, $D_2 = 150\,\mathrm{mm}$. Одредити услов за вредност натпритиска у гасу p_m тако да отвор буде затворен. Познати су следећи подаци: $h_1 = 100\,\mathrm{mm}$, $h_2 = 200\,\mathrm{mm}$, $h_3 = 300\,\mathrm{mm}$, $H = 200\,\mathrm{mm}$, $D = 200\,\mathrm{mm}$, $d = 100\,\mathrm{mm}$, $\rho = 1000\,\mathrm{kg/m^3}$.

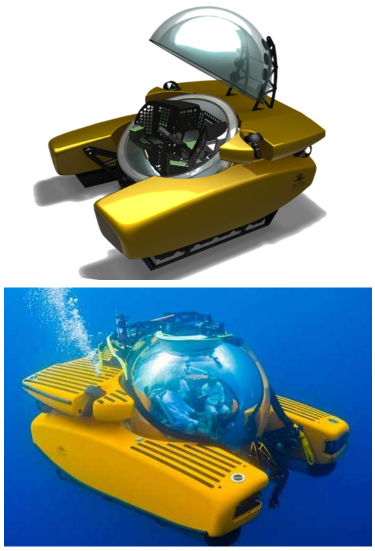
Решење: $p_m > 46128{,}5\,\mathrm{Pa}$

$\boxed{31.}$ У резервоару приказаном на слици 8 налазе се ваздух и течности густина $\rho_1 = 700\,\mathrm{kg/m^3}$, $\rho_2 = 900\,\mathrm{kg/m^3}$. Одредити силу којом флуид делује на дно резервоара облика **полусфере**. Познати су подаци: $h = 1{,}5\,\mathrm{m}$, $h_m = 100\,\mathrm{mm}$, $R = 1\,\mathrm{m}$, густина манометарске течности (живе) $\rho_m = 13600\,\mathrm{kg/m^3}$.

$\boxed{\text{Решење } F = 106634\,\mathrm{N}}$



Слика 8



Слика 9

$\boxed{32.}$ Мала подморница (слика 9) се може користити за непосредно разгледање подводног света. На њеном врху се налази купола - провидни **полусферни** затварач, чији је полупречник $R = 0{,}75\,\mathrm{m}$.

(а) Колико износи хидростатички притисак на дубини од $H = 30\,\mathrm{m}$?

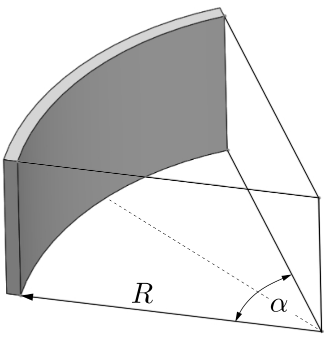
(б) Одредити интензитет силе којом вода ($\rho = 1000\,\mathrm{kg/m^3}$) делује на полулоптасти затварач када се подморница налази на дубини H у стању мировања.

Напомена: сматрати да је раван на којој је купола спојена са остатком подморнице хоризонтална и да се та раван налази на дубини H.

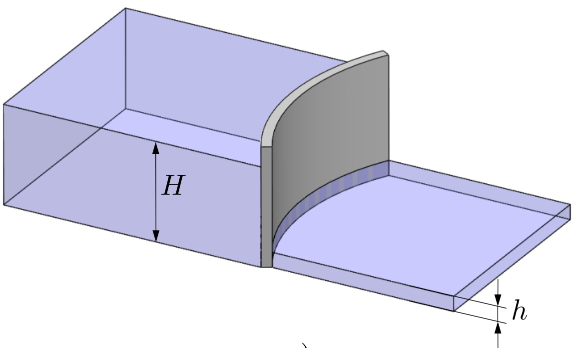
$\boxed{\text{Решење } p = 394300\mathrm{Pa},\ F_{fl_z} = 511403{,}2\,\mathrm{N}}$

$\boxed{33.}$ На слици 10 а) приказана је једна од највећих хидроелектрана на свету, која се налази на реци Јенисеј у Русији. Висина бране достиже 245 m. Ради поједностављења прорачуна, брана се може приказати као део омотача цилиндра, слика 6 б). Ако је ниво горње воде $H = 200\,\mathrm{m}$, а ниво доње воде $h = 30\,\mathrm{m}$, видети слику 10 в), одредити резултујућу силу којом вода делује на брану. Познати су подаци $\rho = 1000\,\mathrm{kg/m^3}$, $R = 450\,\mathrm{m}$, $\alpha = 60°$.

а)



б)



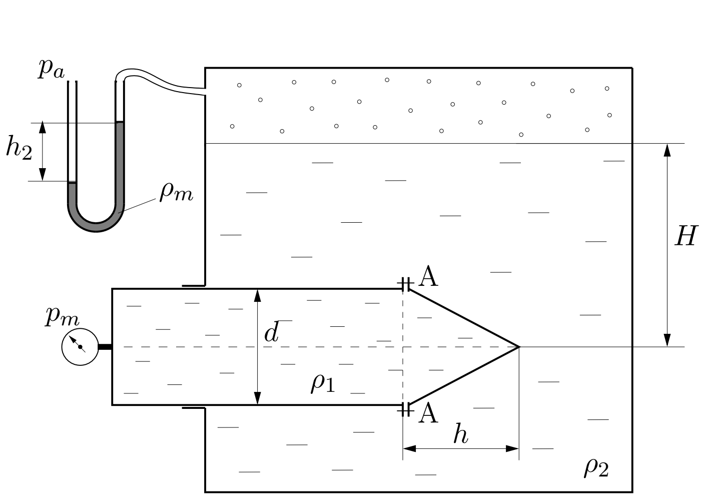
в)

Слика 10

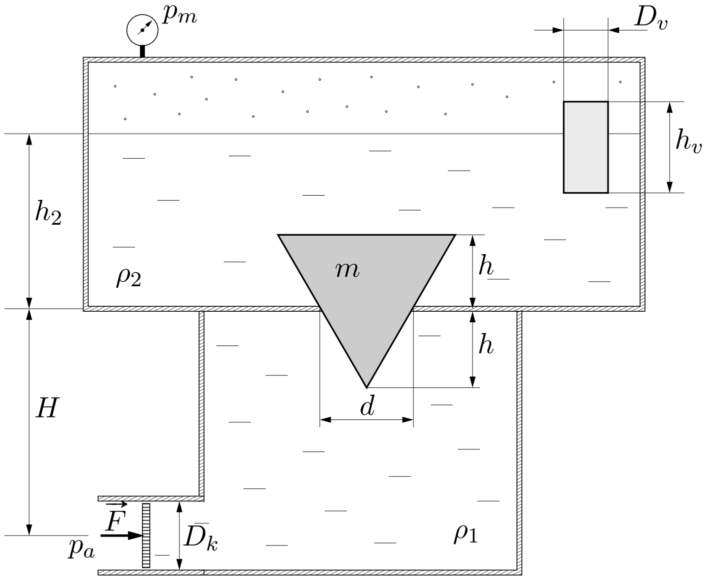
Решење:
Сила којом делује горња вода $F_{fl_1} = 88290\,\mathrm{MN}$ смер силе $\rightarrow$
Сила којом делује доња вода $F_{fl_2} = 1986{,}525\,\mathrm{MN}$ смер силе $\leftarrow$
Резултујућа сила је $F_b = 86303{,}475\,\mathrm{MN}$. смер силе $\rightarrow$

34. Цилиндрични суд у којем се налази течност густине $\rho_1 = 800\,\mathrm{kg/m^3}$ је затворен купастим поклопцем ($d = 200\,\mathrm{mm}$, $h = 300\,\mathrm{mm}$) и налази се у другом затворенм суду (слика 11). Тај суд је напуњен течношћу густине $\rho_2 = 1200\,\mathrm{kg/m^3}$ до висине $H = 1,2\,\mathrm{m}$. Одредити силе смицања и истезања завртањске везе А-А којом је поклопац причвршћен за цилиндрични суд. Познати су следећи подаци: $h_2 = 190\,\mathrm{mm}$, $\rho_m = 13600\,\mathrm{kg/m^3}$, $p_m = 15\,\mathrm{kPa}$.

Решење:
сила истезања $F_i = 823{,}8\,\mathrm{N}$ $(\rightarrow)$
сила смицања $F_s = 12{,}3\,\mathrm{N}$ $(\uparrow)$



Слика 11



Слика 12

35. На слици 12 је приказан резервоар који се састоји од две коморе. Између њих се налази преградни зид који има кружни отвор пречника $d = 100\,\mathrm{mm}$. Отвор је затворен затварачем облика купе, масе $m = 25\,\mathrm{kg}$. Доња комора је испуњена течношћу густине $\rho_1 = 1000\,\mathrm{kg/m^3}$, док се у горњој комори налазе течност густине $\rho_2 = 1100\,\mathrm{kg/m^3}$ и гас под натпритиском $p_m = 0{,}2\,\mathrm{bar}$. Познати су и следећи подаци: $h = 120\,\mathrm{mm}$, $H = 800\,\mathrm{mm}$, $h_2 = 600\,\mathrm{mm}$.

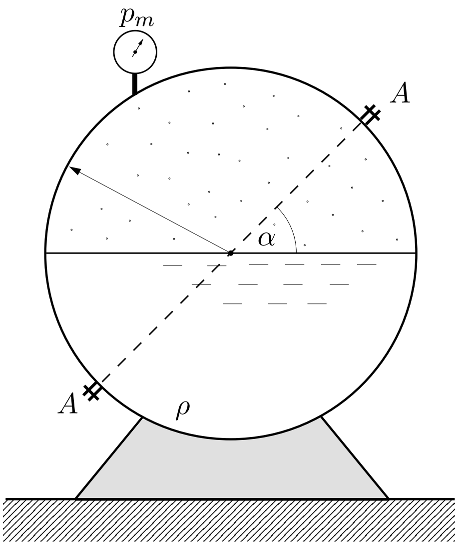
(а) Ако сила којом преградни зид делује на затварач има вредност $N = 200\,\mathrm{N}$, одредити вредност силе F која делује у тежишту клипа. Клип се налази у цилиндру пречника $D_k = 100\,\mathrm{mm}$.

(б) У течности густине ρ_2 се налази ваљак пречника D_v и висине h_v у стању мировања (слика 12). Одредити густину материјала од ког је направљен ваљак ($\rho_m =$?) ако се две трећине запремине ваљка налази испод површине течности.

(в) Који део запремине ваљка ће се налазити испод површине течности ако се натпритисак p_m повећа два пута?

Решење:
(а) $F = 288\,\mathrm{N}$,
(б) $\rho_m = 733{,}3\,\mathrm{kg/m^3}$
(в) Промена вредности натпритиска не доводи до промене положаја ваљка. У једначини мировања ваљка се поништавају сабирци у којима се јавља натпритисак p_m.

36. Одредити смичућу и истежућу компоненту силе која делује на завртањску везу AA сферног суда полупречника $R = 0{,}4\,\mathrm{m}$, који је до половине напуњен водом густине $\rho = 1000\mathrm{kg/m^3}$ и налази се под унутрашњим натпритиском $p_m = 20\,\mathrm{kPa}$ (слика 13). Завртњеви су распоређени по обиму сфере у равни која је одређена углом $\alpha = 45°$ Маса полусфере је $m = 300\,\mathrm{kg}$. Тежину гаса занемарити.



Слика 13

Решење

Све силе које делују на горњу полулопту се преносе на завртањску везу, па се може рећи да је оптерећење везе $\overrightarrow{F_{AA}}$ једнако суми свих сила које делују на горњу полулопту, а то су сила тежине и сила притиска флуида:

$$\overrightarrow{F_{AA}} = \vec{G} + \overrightarrow{F_{fl}}. \tag{9}$$

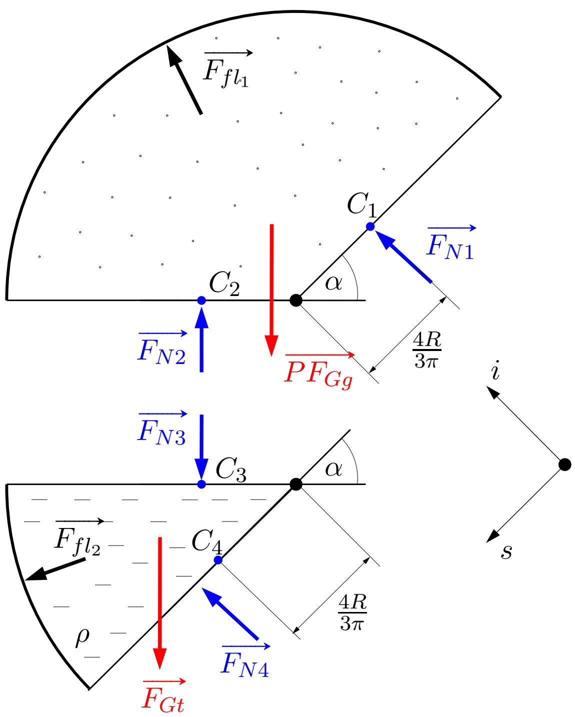
До претходног израза се могло доћи и на следећи начин: горња полулопта мирује, што значи да је сума свих сила које делују на њу једнака нули, па следи: $\vec{G} + \overrightarrow{F_{fl}} + \overrightarrow{F^*_{AA}} = 0$, где је $\overrightarrow{F^*_{AA}}$ сила којом завртањска веза делује на горњу полулопту. Према закону акције и реакције, сила којом полулопта делује на завртањску везу је $\overrightarrow{F_{AA}} = -\overrightarrow{F^*_{AA}}$. На овај начин, поново се добија израз (9).

На криву површ (гоњу полулопту) делују гас и течност, па се укупна сила притиска одређује из два дела $\overrightarrow{F_{fl}} = \overrightarrow{F_{fl_1}} + \overrightarrow{F_{fl_2}}$. Засебно се издвајају криве површи па се затварају додавањем равних површина, као што је приказано на слици.
У оба случаја се користи метода равнотеже течности, па следи:

$$\overrightarrow{F_{fl_1}} = \overrightarrow{F_{Gg}} + \overrightarrow{F_{N1}} + \overrightarrow{F_{N2}}, \tag{10}$$
$$\overrightarrow{F_{fl_2}} = \overrightarrow{F_{Gt}} + \overrightarrow{F_{N3}} + \overrightarrow{F_{N4}}, \tag{11}$$

При чему су $\overrightarrow{F_{Gg}}$ и $\overrightarrow{F_{Gt}}$ силе тежине гаса и течности. Према услову задатка тежина гаса се занемарује. Са F_{Ni} су обележене одговарајуће силе притиска на додате равне површи. Пошто је укупна сила притиска $\vec{F} = \overrightarrow{F_{fl_1}} + \overrightarrow{F_{fl_2}}$, то на сонову израза (9), (10) и (11) следи да је:

$$\boxed{\overrightarrow{F_{AA}} = \vec{G} + \overrightarrow{F_{N1}} + \overrightarrow{F_{N2}} + \overrightarrow{F_{Gt}} + \overrightarrow{F_{N3}} + \overrightarrow{F_{N4}}} \tag{12}$$



Додате равне површи су половине круга, а тежиште половине круга се налази на линији симетрије и удаљено је од основе за $\frac{4R}{3\pi}$ (слика). Силе притиска на равне површи имају следеће вредности:

$$\begin{aligned}
F_{N1} &= (p_{c1}-p_a)A_1 = p_m\frac{R^2\pi}{2} = \boxed{5024\,\mathrm{N}},\\
F_{N2} &= (p_{c2}-p_a)A_2 = p_m\frac{R^2\pi}{2} = \boxed{5024\,\mathrm{N}},\\
F_{N3} &= (p_{c3}-p_a)A_3 = p_m\frac{R^2\pi}{2} = \boxed{5024\,\mathrm{N}},\\
F_{N4} &= (p_{c4}-p_a)A_4 = \left(p_a + p_m + \rho g\frac{4R}{3\pi}\sin\alpha - p_a\right)\frac{R^2\pi}{2} = \boxed{5320\,\mathrm{N}}.
\end{aligned}$$

Напомена: Пошто се тежишта C_2 и C_3 налазе у истој тачки, притисак у њима је исти, па је и вредност сила F_{N2} и F_{N3} једнака. Са слике се види да су силе истог правца а супротног смера, што значи да ће се при пројектовању једначине (12) ове две силе међусобно поништити, па њихов интензитет није било неопходно одређивати.

Ради одређивања силе тежине течности потребно је одредити запремину V која представља део сфере одређен углом α. Вредност запремине се може одредити на основу пропорције:

$$\frac{V_\alpha}{\frac{4}{3}R^3\pi} = \frac{\alpha}{360^\circ} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{V_\alpha}{\frac{4}{3}R^3\pi} = \frac{45^\circ}{360^\circ} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{V_\alpha = \frac{1}{6}R^3\pi}$$

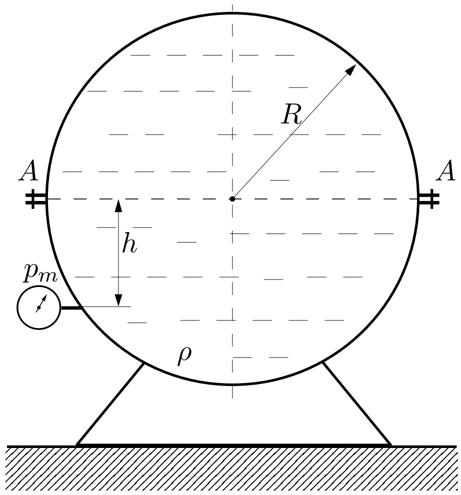
Сила тежине течности има следећу вредност: $F_{Gt} = \rho g V_\alpha = \rho g \frac{1}{6}R^3\pi = \boxed{328{,}6\,\mathrm{N}}$, а сила тежине полулопте: $G = mg = \boxed{2943\,\mathrm{N}}$.

Сила истезања завртњева се добија пројектовањем вектора $\overrightarrow{F_{AA}}$ (односно једначине (12)) на правац управан на раван у којој су завртњеви распоређени, тј. на правац оса завртњева (правац одређен осом i, слика), док се сила смицања одређује пројектовањем силе на правац одређен осом s (слика).

$$\begin{aligned}
F_{AAi} &= -mg\cos\alpha + F_{N1} + F_{N2}\cos\alpha - F_{N3}\cos\alpha + F_{N4} - F_{Gt}\cos\alpha = \boxed{8030{,}6\,\mathrm{N}},\\
F_{AAs} &= mg\sin\alpha - F_{N2}\sin\alpha + F_{N3}\sin\alpha + F_{Gt}\sin\alpha = \boxed{2313{,}4\,\mathrm{N}}.
\end{aligned}$$

---

37. На слици 14 је приказана цистерна, до врха испуњена нафтом густине $\rho = 850\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$. Цистерна је облика цилиндра полупречника $R = 1{,}5\,\mathrm{m}$ и дужине $L = 6\,\mathrm{m}$. Одредити оптерећење завртањске везе А-А којом је горњи део цистерне, облика полуцилиндра, причвршћен за доњи, ако су познати следећи подаци: $h = 0{,}7\,\mathrm{m}$ и $p_m = 25\,\mathrm{kPa}$.



Слика 14

Решење: $F_x = 0, \quad F_z = 168110{,}7\,\mathrm{N}$

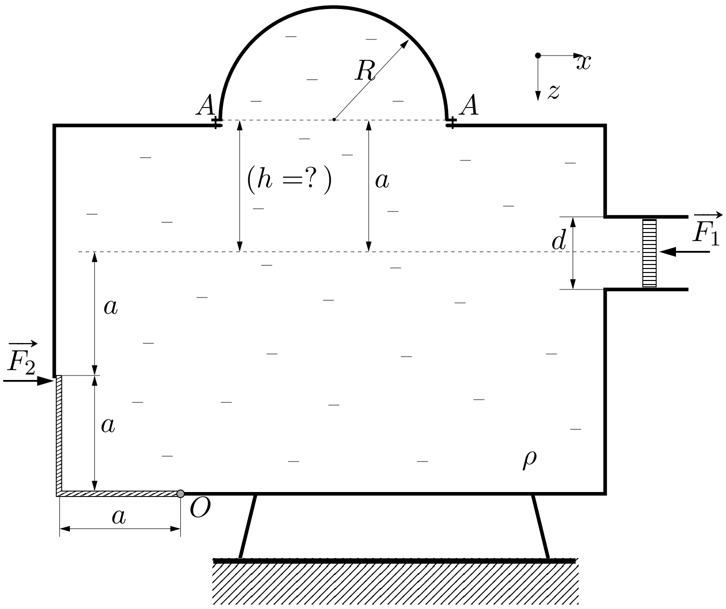
---

38. Резервоар приказан на слици је испуњен водом густине $\rho = 1000\mathrm{kg/m^3}$. Димензија резервоара управно на раван цртежа је $L = 2\,\mathrm{m}$. На клип пречника $d = 0{,}2\,\mathrm{m}$ делује сила $F_1 = 800\,\mathrm{N}$. Одредити:

а) вредност силе F_2 која је потребна да дође до отварања угластог затварача који може да ротира око осовине O, ако је $a = 1\,\mathrm{m}$,

б) оптерећење завртањске везе AA којом је **полусферни** затварач причвршћен за горњи део резервоара (угласти затварач је у затвореном положају). Полупречник сфере износи $R = 2\,\mathrm{m}$,

в) на којој висини h (слика) треба поставити полусферни затварач да би завртањска веза AA била неоптерећена на истезање?



Слика 15

Решење:

а)$F_2 = 83629{,}6\,\mathrm{N}$,

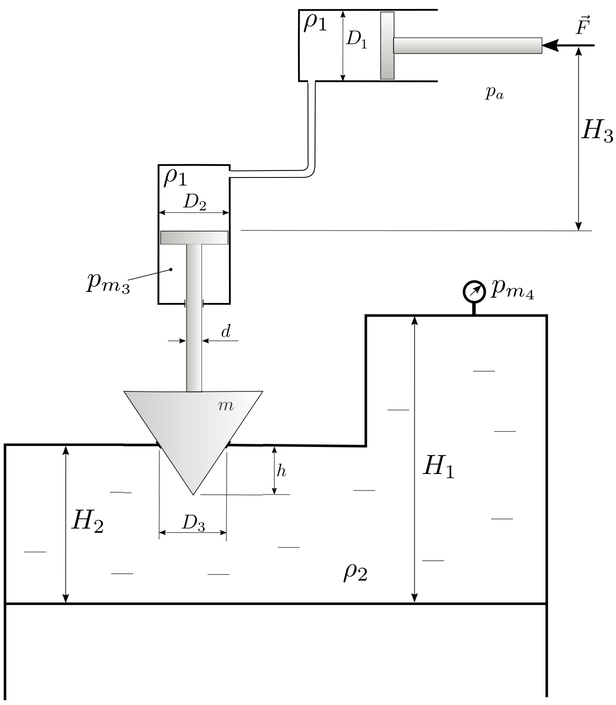
б)$F_{AAz} = -32355{,}8\,\mathrm{N}$ - трпе истезање, $F_{AAx} = 0$ - нема смицања,

в)$h = 1{,}262\,\mathrm{N}$. Смичући напони не постоје, независно од промене висине h, јер се све хоризонталне компоненте силе притиска уравнотежавају.

---

39. Резервоар у којем се налази течност густине $\rho_2 = 1000\,\mathrm{kg/m^3}$ има хоризонтални кружни отвор који је затворен конусним затварачем, како је приказано на слици 16. Затварач има масу $m = 10\,\mathrm{kg}$, а масе свих осталих елемената се занемарују. Затварач је преко клипњаче круто повезан са клипом хидроцилиндра 2. Испод клипа хидроцилиндра 2 (клипњачина комора) влада натпритисак $p_{m3} = 1\,\mathrm{bar}$, а горња комора хидроцилиндра 2 је преко црева спојена са хидроцилиндром 1, на чију клипњачу делује спољашња сила $F = 1500\,\mathrm{N}$ (слика **??**). Унутар оба цилиндра се налази течност густине $\rho_1 = 900\,\mathrm{kg/m^3}$. Испитати да ли је при овим условима отвор затворен.

Познати су следећи подаци: $D_1 = 80\,\mathrm{mm}$, $D_2 = 100\,\mathrm{mm}$, $D_3 = 140\,\mathrm{mm}$, $d = 40\,\mathrm{mm}$, висине $H_1 = 2\,\mathrm{m}$, $H_2 = 1{,}5\,\mathrm{m}$, $H_3 = 1\,\mathrm{m}$, $h = 400\,\mathrm{mm}$, као и натпритисак изнад резевоара $p_{m4} = 0{,}4\,\mathrm{bar}$.

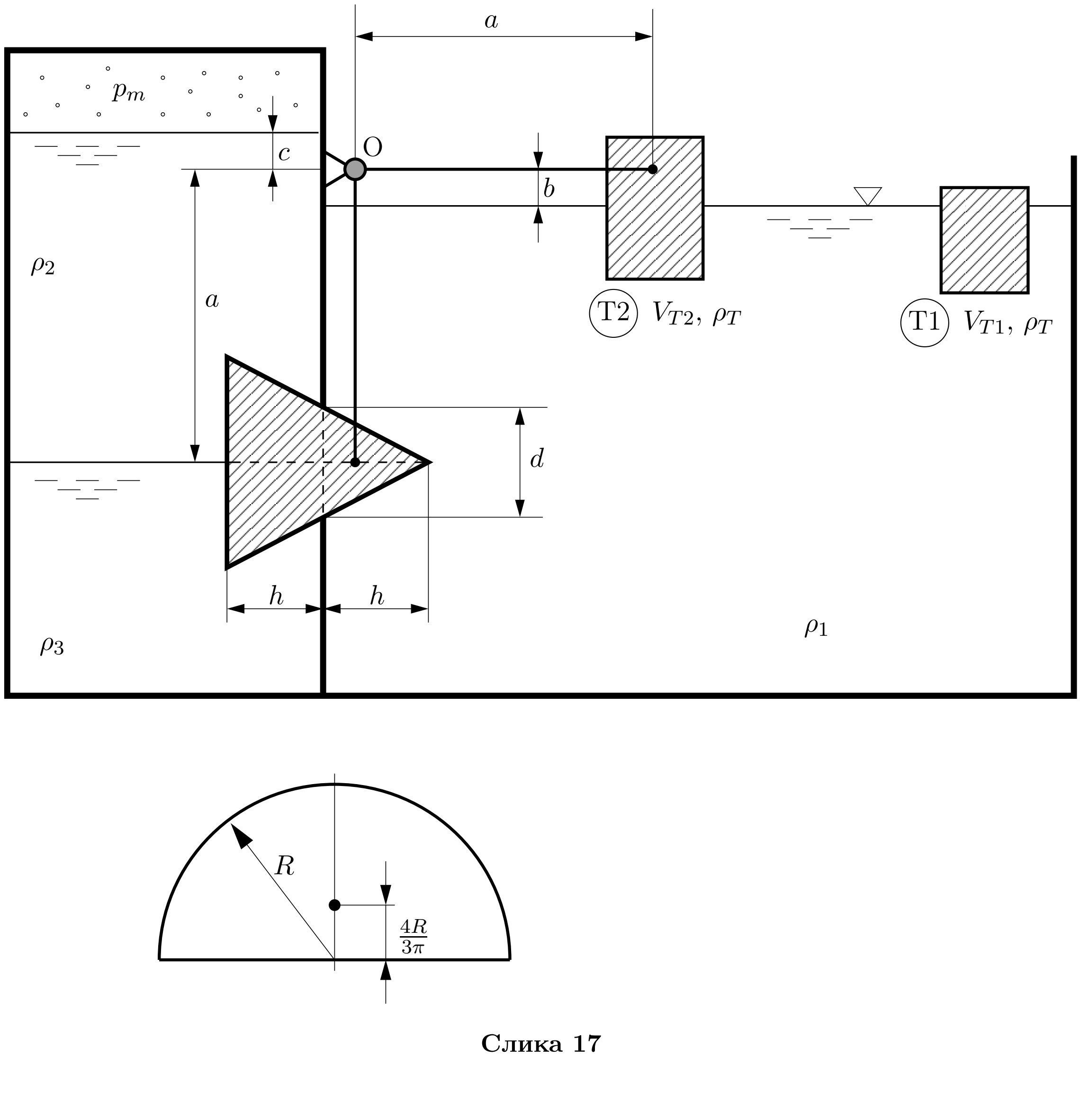


Слика 16

40. На слици 17 је приказан резервоар са преградним зидом на коме постоји кружни отвор пречника $d = 300\,\mathrm{mm}$. Отвор је затворен конусним затварачем. У десном делу резервоара се налази течност густине ρ_1, а у левом делу се налазе две течности које се не мешају и чије су густине $\rho_2 = 700\,\mathrm{kg/m^3}$ и $\rho_3 = 750\,\mathrm{kg/m^3}$. У течности густине ρ_1 плутају два тела различитих запремина V_{T1} и $V_{T2} = 0{,}015\,\mathrm{m^3}$, оба од истог материјала густине $\rho_T = 1200\,\mathrm{kg/m^3}$. Тело T1 слободно плута, тако да се изнад површине течности налази 10% његове запремине, док је тело T2 повезано са конусним затварачем преко система полуга обртног око осовине O. Половина тела T2 је потопљена. Трење у ослонцу O занемарити. Затварач је направљен од истог материјала као и тела T1 и T2 ($\rho_T = 1200\,\mathrm{kg/m^3}$). Познати су и следећи подаци: $h = 300\,\mathrm{mm}$, $a = 1\,\mathrm{m}$, $b = c = 50\,\mathrm{mm}$. Сила којом полуга делује на затварач има хоризонталан правац.

Одредити:

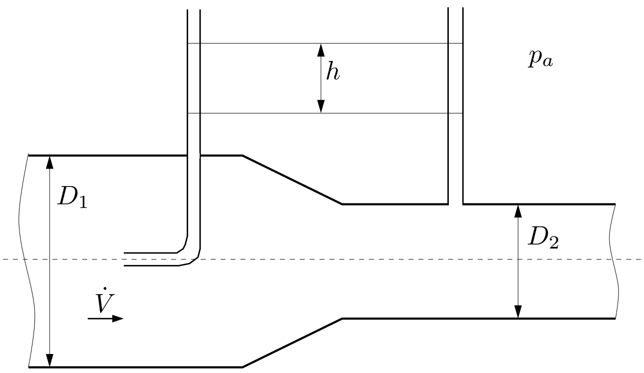
- услов за вредност натпритиска p_m да би отвор у преградном зиду био затворен,
- вертикалну компоненту силе којом конусни затварач делује на преградни зид.



Слика 17

4 Динамика невискозног флуида

41. На слици 18 је приказана цев промењљивог попречног пресека кроз коју протиче вода запреминским протоком $\dot{V} = 25\,\mathrm{lit/s}$. У ширем делу цеви пречника $D_1 = 200\,\mathrm{mm}$ се налази Пито цев, а на ужем ($D_2 = 150\,\mathrm{mm}$) пијезометарска цевчица. Одредити брзине струјања у оба дела цеви. Правилно уцртати нивое воде у цевчицама и одредити разлику нивоа ($h =?$).

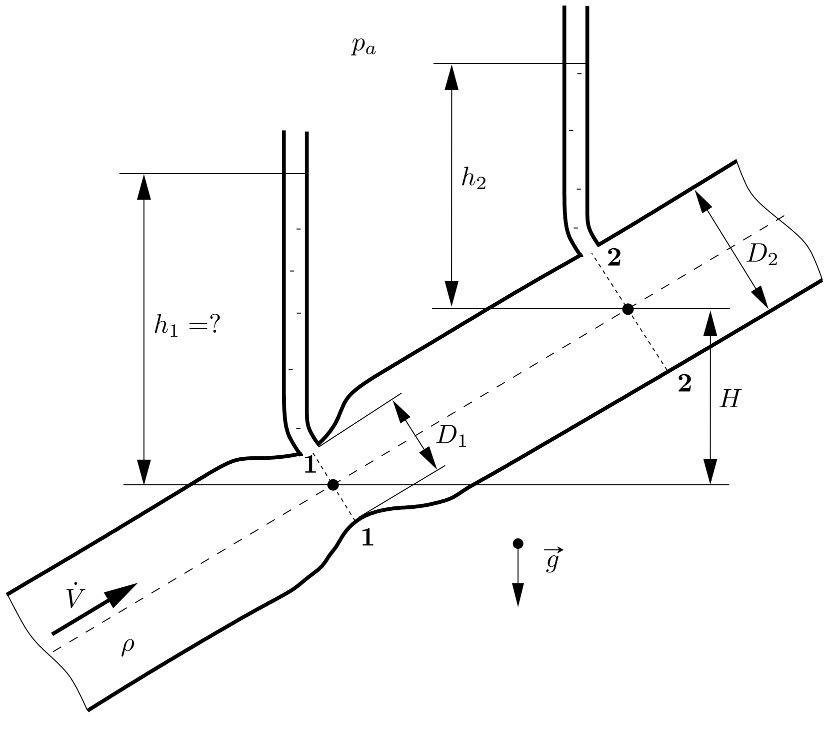


Слика 18

Решење: $h = 0{,}102\,\mathrm{m}$, виши је ниво воде у Пито цеви.

---

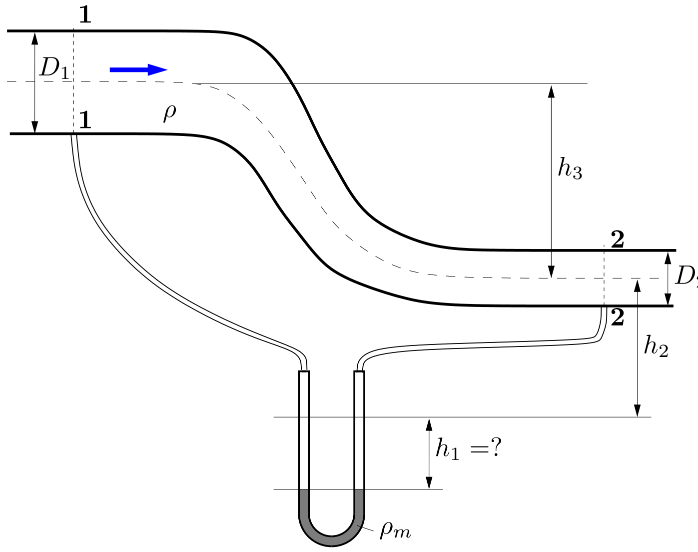
42. Кроз косо постављену Вентуријеву цев, у назначеном смеру (слика 19), струји вода ($\rho = 1000\,\mathrm{kg/m^3}$) запреминским протоком $\dot{V} = 30\,\mathrm{lit/s}$. На карактеристичним пресецима 1-1 и 2-2 се налазе две пијезометарске цевчице. Ако су познати следећи подаци $D_1 = 150\,\mathrm{mm}$, $D_2 = 200\,\mathrm{mm}$, $H = 300\,\mathrm{mm}$, $h_2 = 600\,\mathrm{mm}$, одредити брзине струјања у карактеристичним пресецима и показивање прве пијезометарске цевчице h_1.



Слика 19

Решење: $U_1 = 1{,}7\,\mathrm{m/s}$, $U_2 = 0{,}955\,\mathrm{m/s}$, $h_1 = 0{,}8\,\mathrm{m}$

43. Кроз цев променљивог попречног пресека (слика 20) струји вода ($\rho = 1000\,\mathrm{kg/m^3}$) у назначеном смеру. Помоћу диференцијалног манометра (U-цеви) мери се разлика притисака у карактеристичним пресецима 1-1 и 2-2, чији су пречници $D_1 = 150\,\mathrm{mm}$ и $D_2 = 100\,\mathrm{mm}$. Густина манометарске течности је $\rho_m = 2000\,\mathrm{kg/m^3}$. Позната је брзина струјања воде у пресеку 1-1 $U_1 = 1\,\mathrm{m/s}$, као и висинске разлике $h_3 = 300\,\mathrm{mm}$ и $h_2 = 200\,\mathrm{mm}$. Ако се флуид сматра **невискозним** уцртати нивое манометарске течности у U-цеви и израчунати њено показивање h_1.

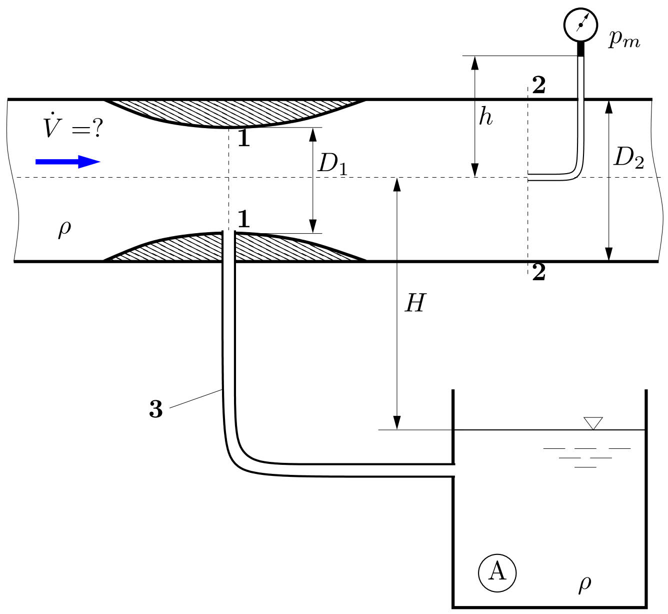


Слика 20

Решење: Виши је ниво манометарске течности у десном краку манометра. $h_1 = 0{,}207\,\mathrm{m}$

---

44. На слици 21 је приказана цев пречника $D_2 = 200\,\mathrm{mm}$ кроз коју струји вода ($\rho = 1000\,\mathrm{kg/m^3}$) у назначеном смеру. Најужи део цеви пречника $D_1 = 100\,\mathrm{mm}$ је преко цевчице 3 спојен са резервоаром А у коме се такође налази вода. У пресеку 2-2 је постављена Пито цев која је прикључена на манометар чије је показивање $p_m = 0{,}1\,\mathrm{bar}$. Познате су висине $h = 150\,\mathrm{mm}$ и $H = 400\,\mathrm{mm}$. Ако вода у цевчици 3 мирује, одредити запремински проток воде кроз цев и средњу брзину струјања у пресеку 2-2. Флуид сматрати невискозним.



Решење:
$\dot{V} = 43{,}6\,\mathrm{lit/s}$
$U_2 = 1{,}387\,\mathrm{m/s}$

Слика 21

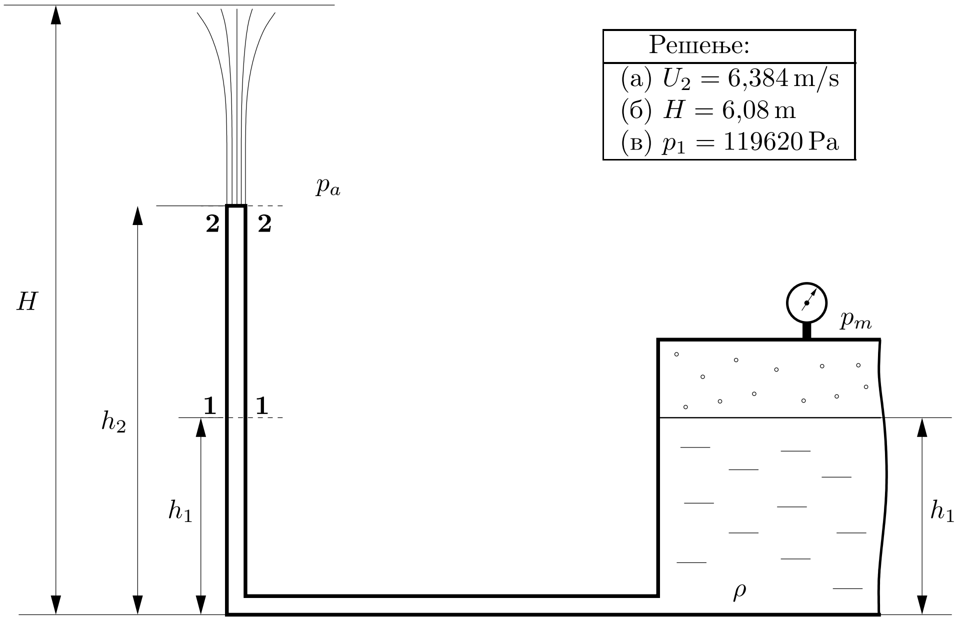
45. Из великог резервоара (слика 22), који се налази под натпритиском $p_m = 40\,\mathrm{kPa}$ и у коме је ниво воде непромењлив, истиче вода кроз цев константног попречног пресека у атмосферу. Сматрајући флуид невискозним одредити:

(а) брзину воде у излазном пресеку 2-2,

(б) висину H до које доспева водени млаз,

(в) вредност притиска у пресеку 1-1.

Познати су следећи подаци: густина воде $\rho = 1000\,\mathrm{kg/m^3}$, вредност атмосферског притиска $p_a = 1\,\mathrm{bar}$, висине $h_1 = 2\,\mathrm{m}$ и $h_2 = 4\,\mathrm{m}$.

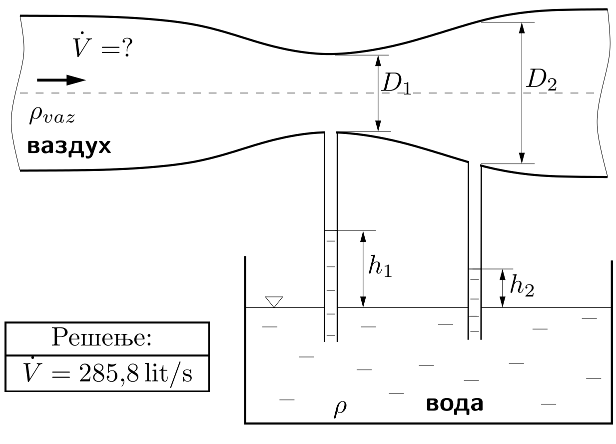


Решење:
(а) $U_2 = 6{,}384\,\mathrm{m/s}$
(б) $H = 6{,}08\,\mathrm{m}$
(в) $p_1 = 119620\,\mathrm{Pa}$

Слика 22

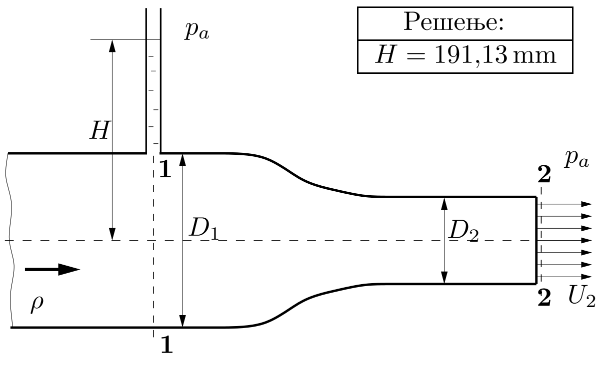
---

46. Ваздух струји кроз Вентуријеву цев која је преко пиезо цевчица спојена са резервоаром у коме мирује вода (слика 23). Одредити запремински проток ваздуха ако се флуид сматра невискозним и ако су познати следећи подаци: густина ваздуха $\rho_{vaz} = 1{,}2\,\mathrm{kg/m^3}$, густина воде $\rho = 1000\,\mathrm{kg/m^3}$, висине $h_1 = 105\,\mathrm{mm}$, $h_2 = 40\,\mathrm{mm}$ и пречници $D_1 = 100\,\mathrm{mm}$, $D_2 = 150\,\mathrm{mm}$.



Решење:
$\dot{V} = 285{,}8\,\mathrm{lit/s}$

Слика 23

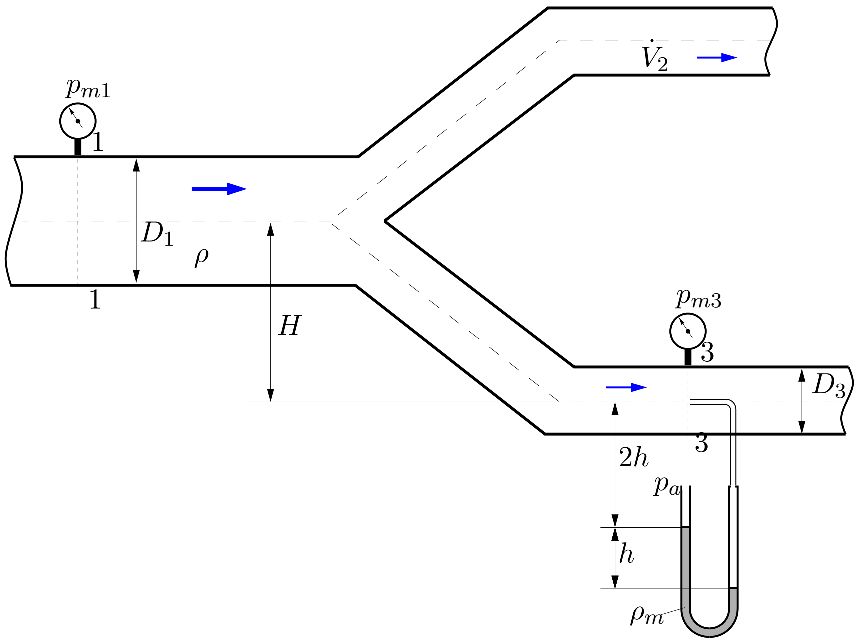


Решење:
$H = 191{,}13\,\mathrm{mm}$

Слика 24

47. Кроз цев променљивог попречног пресека (слика 24) струји вода и истиче у атмосферу. Ако су познати пречници $D_1 = 120\,\mathrm{mm}$ и $D_2 = 60\,\mathrm{mm}$, као и брзина струјања на излазу из цеви $U_2 = 2\,\mathrm{m/s}$, одредити ниво воде у пиезо цеви ($H = ?$). Густина воде износи $\rho = 1000\,\mathrm{kg/m^3}$.

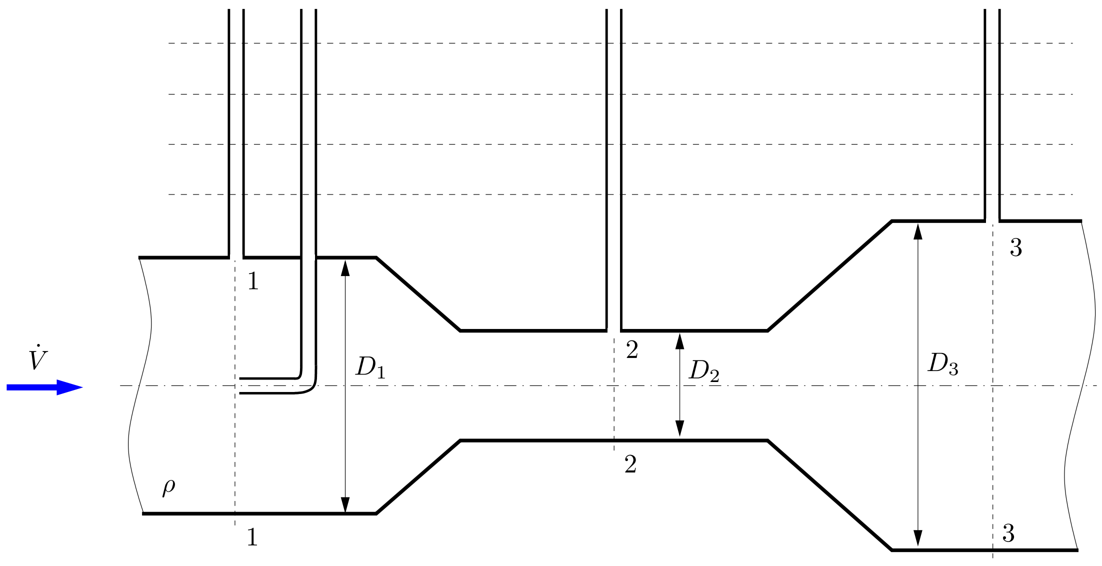
48. На слици 26 је приказан део цевовода у коме се деоница 1 рачва на деонице 2 и 3. У пресеку 3-3 је постављена Пито сонда која је повезана са U-цеви са живом ($\rho_m = 13600\,\mathrm{kg/m^3}$), чије је показивање $h = 300\,\mathrm{mm}$. Запремински проток кроз деоницу 2 износи $\dot{V}_2 = 20\,\mathrm{lit/s}$, а средња брзина струјања у пресеку 3-3 је $U_3 = 1{,}5\,\mathrm{m/s}$. Радни флуид је вода ($\rho = 1000\,\mathrm{kg/m^3}$). Познати су и следећи подаци $D_1 = 200\,\mathrm{mm}$, $D_3 = 150\,\mathrm{mm}$, $H = 1\,\mathrm{m}$. Одредити средњу брзину струјања у пресеку 1-1 и вредности показивања манометара у пресецима 1-1 и 3-3 ако се флуид сматра не вискозним.



Слика 25

---

49. На слици 26 је приказан део цевовода промењивог попречног пресека: $D_1 = 100\,\mathrm{mm}$, $D_2 = 60\,\mathrm{mm}$ и $D_3 = 150\,\mathrm{mm}$, кроз који струји течност у назначеном смеру. Флуид се сматра невискозним. Уцртати правилно ниводе течности у све четири цеви, које су горњим крајем отворене ка атмосфери (кратко образложити). Ако разлика нивоа у првој и другој цеви (цеви постављене у пресеку 1-1) износи $\Delta h_1 = 100\,\mathrm{mm}$, израчунати колико литара флуида протекне кроз цев за време од $30\,\mathrm{s}$.



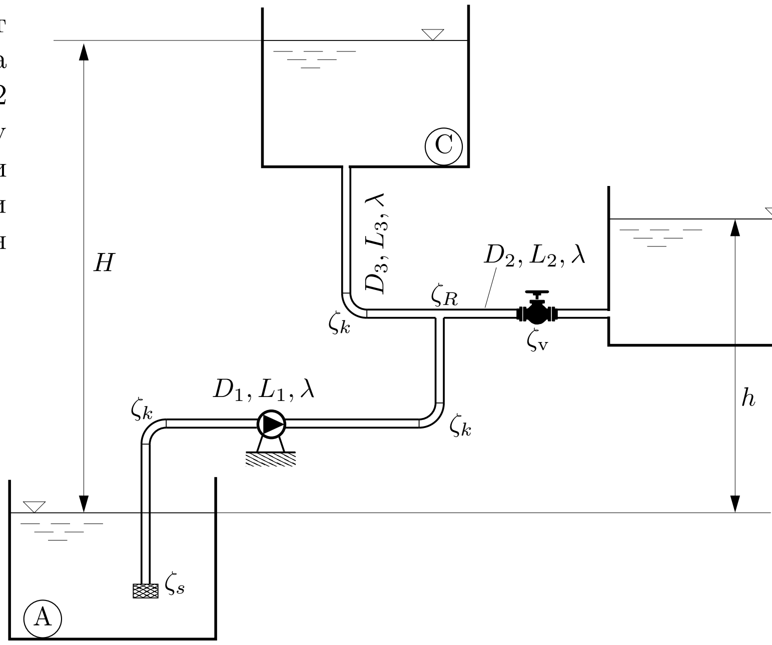
Слика 26

5 Једнодимензијски прорачун сложеног цевовода

50. Пумпа, приказана на слици 27, црпи воду из резервоара A и шаље је ка резервоарима B и C. Резервоари су отворени ка атмосфери и нивои воде у њима су непромењиви. Познати су следећи подаци: висине $H = 25\,\mathrm{m}$, $h = 20\,\mathrm{m}$, пречници и дужине деоница $D_1 = 75\,\mathrm{mm}$, $D_2 = 50\,\mathrm{mm}$, $D_3 = 60\,\mathrm{mm}$, $L_1 = 100\,\mathrm{m}$ (деоница 1 се пружа од усисне корпе до рачве), $L_2 = 50\,\mathrm{m}$, $L_3 = 55\,\mathrm{m}$, коефицијент трења за све деонице износи $\lambda = 0{,}02$, коефицијенти локалних отпора усисне корпе, колена и рачве редом износе $\zeta_S = 0{,}15$, $\zeta_k = 0{,}2$, $\zeta_R = 1{,}5$.

Колико треба да износи вредност коефицијента локалног отпора вентила смештеног у деоници 2 (ζ_v =?), да би протоци који доспевају у резервоаре B и C били једнаки и износили $\dot{V}_B = \dot{V}_C = 4\,\mathrm{l/s}$? Одредити снагу пумпе ако је њен степен корисности $\eta = 0{,}8$.

Решење:
$P_p = 3109{,}2\,\mathrm{W}$
$\zeta_\mathrm{v} = 11{,}28$

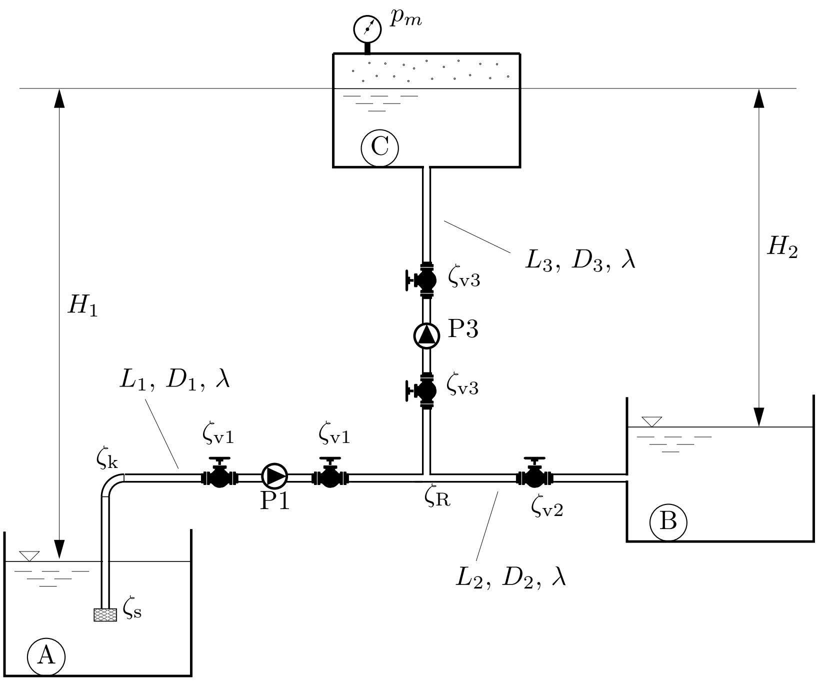


Слика 27

51. У систему приказаном на слици 28 пумпе P1 и P3 транспортују воду ($\rho = 1000\,\mathrm{kg/m^3}$) из резервоара A у резервоаре B и C. Одредити снаге потребне за погон пумпи. Нивои воде у резервоарима се не мењају. Познати су следећи подаци: висине $H_1 = 10\,\mathrm{m}$, $H_2 = 8\,\mathrm{m}$, дужине деоница $L_1 = 8\,\mathrm{m}$, $L_2 = 3\,\mathrm{m}$, $L_3 = 6\,\mathrm{m}$, пречници цеви $D_1 = 160\,\mathrm{mm}$, $D_2 = D_3 = 120\,\mathrm{mm}$, коефицијент трења је исти за све деонице и износи $\lambda = 0{,}03$.

Коефицијенти локалних отпора имају следеће вредности: $\zeta_\mathrm{s} = 0{,}2$, $\zeta_\mathrm{k} = 0{,}3$, $\zeta_\mathrm{v1} = \zeta_\mathrm{v2} = 0{,}5$, $\zeta_\mathrm{v3} = 0{,}6$ и $\zeta_\mathrm{R} = 0{,}4$. Натпритисак у резервоару C износи $p_m = 0{,}4\,\mathrm{bar}$, а степен корисности за обе пумпе је $\eta = 0{,}8$. Познате су средње брзине струјања у деоницама 1 и 2: $U_1 = 1\,\mathrm{m/s}$, $U_2 = 0{,}95\,\mathrm{m/s}$.

Решење:
$P_{p1} = 560{,}9\,\mathrm{W}$
$P_{p2} = 1388{,}9\,\mathrm{W}$

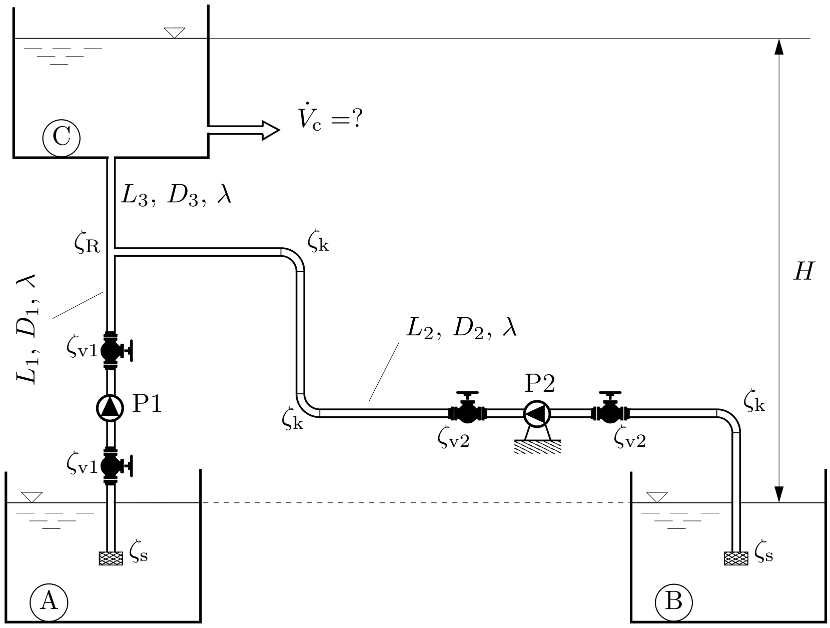


Слика 28

52. У систему приказаном на слици 29 пумпа P1 црпи воду из резервоара A и шаље је ка резервоару C. Средња брзина струјања у деоници 1 износи $U_1 = 1\,\mathrm{m/s}$. Пумпа P2 **истим запреминским протоком** ($\dot{V}_1 = \dot{V}_2$) транспортује воду из резервоара B у резервоар C. Одредити снаге пумпи P1 и P2. Колико износи запремински проток воде $\dot{V}_c$ који се одводи из резервоара C, ако је ниво воде у њему непроменљив?

Познати су следећи подаци: густина воде $\rho = 1000\,\mathrm{kg/m^3}$, пречници деоница $D_1 = 150\,\mathrm{mm}$, $D_2 = 100\,\mathrm{mm}$, $D_3 = 200\,\mathrm{mm}$, дужине деоница $L_1 = 10\,\mathrm{m}$, $L_2 = 18\,\mathrm{m}$, $L_3 = 4\,\mathrm{m}$, висина $H = 12\,\mathrm{m}$, коефицијенти локалних губитака $\zeta_{\mathrm{v1}} = 0{,}8$, $\zeta_{\mathrm{v2}} = 1$, $\zeta_{\mathrm{s}} = 0{,}5$, $\zeta_{\mathrm{k}} = 0{,}2$, $\zeta_{\mathrm{R}} = 0{,}6$. Коефицијент трења у свим деоницама има исту вредности и износи $\lambda = 0{,}02$, а степен корисности пумпи је $\eta = 0{,}8$.

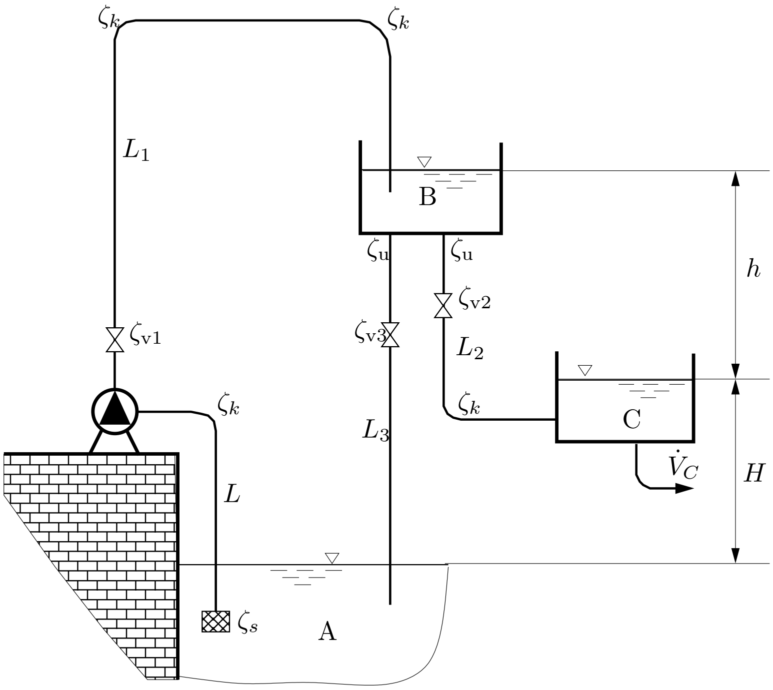
Решење:
$P_{p1} = 2666{,}2\,\mathrm{W}$
$P_{p2} = 3002{,}9\,\mathrm{W}$
$\dot{V}_c = 35{,}3\,\mathrm{l/s}$



Слика 29

53. Из језера A (слика 30) пумпа црпи воду ($\rho = 1000\,\mathrm{kg/m^3}$) и транспортује је ка резервоару B, из ког се део воде враћа у језеро кроз деоницу 3, а део воде, под дејством силе гравитације, кроз деоницу 2 одлази у резервоар C. Нивои воде у резервоарима и језеру су непроменљиви. Одредити брзине струјања воде у свим деоницама и снагу пумпе. Ако је потребно испитати да ли у систему долази до појаве кавитације, означити на слици критична места на којима би требало извршити проверу. Познати су следећи подаци:

- дужина цевовода од усисне корпе до пумпе $L = 5\,\mathrm{m}$, дужина цевовода од пумпе до резервоара B $L_1 = 15\,\mathrm{m}$, дужина цевовода од резервоара B до језера A $L_3 = 5\,\mathrm{m}$, и од резервоара B до резервоара C $L_2 = 5\,\mathrm{m}$,
- вредност коефицијента трења, као и вредности пречника цеви су исте за све деонице и износе: $\lambda = 0{,}03$, $D = 70\,\mathrm{mm}$,
- висине $H = 2\,\mathrm{m}$, $h = 4\,\mathrm{m}$,
- вредности коефицијената локалних отпора: усисне корпе $\zeta_s = 2{,}5$, колена $\zeta_k = 0{,}2$, улаза у цевовод $\zeta_{\mathrm{u}} = 0{,}3$, вентила $\zeta_{\mathrm{v1}} = 1{,}5$, $\zeta_{\mathrm{v2}} = 100$, $\zeta_{\mathrm{v3}} = 80$,
- степен корисности пумпе $\eta = 0{,}8$.

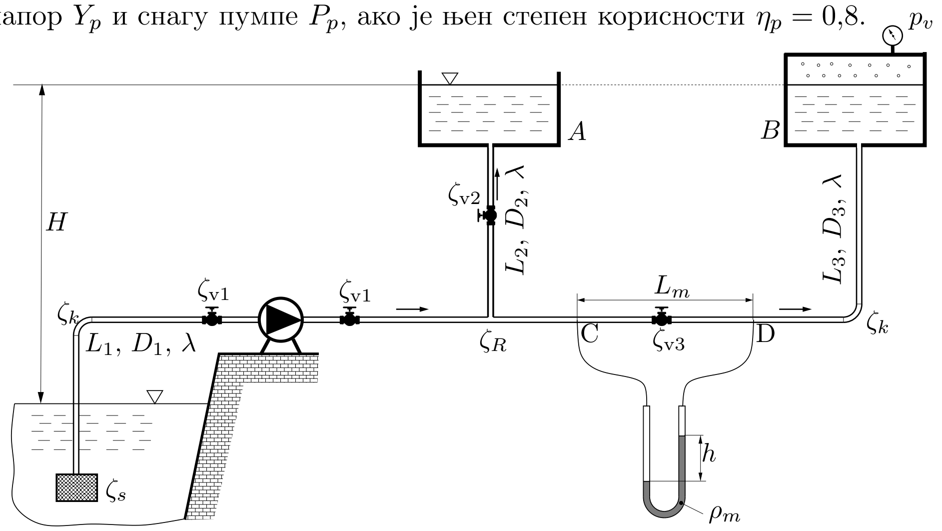


Слика 30

Решење: $U_3 = 1{,}188\,\mathrm{m/s}$, $U_2 = 0{,}87\,\mathrm{m/s}$, $U_1 = 2{,}058\,\mathrm{m/s}$, $P_p = 879{,}8\,\mathrm{W}$

54. У систему приказаном на слици 31 пумпа црпи воду ($\rho = 1000\,\mathrm{kg/m^3}$) из језера и потискује је у отворени резервоар A и затворени резервоар B у коме влада потпритисак $p_v = 5\,\mathrm{kPa}$. Нивои воде у резевоарима су једнаки и налазе се $H = 18\,\mathrm{m}$ изнад нивоа језера. Систем се састоји од три деонице чије су дужине и пречници дати у табели. Запремински проток кроз деоницу 3 износи $\dot{V}_3 = 28\,\mathrm{lit/s}$. Коефицијенти локалних отпора имају следеће вредности: усисна корпа $\zeta_s = 0{,}8$, колено $\zeta_k = 0{,}5$, рачва $\zeta_R = 0{,}8$, вентили $\zeta_{v1} = 1$, $\zeta_{v2} = 5$, $\zeta_{v3} = 1$. Коефицијент трења је једнак у свим деоницама, а одређује се на основу показивања U-цеви ($h = 20\,\mathrm{mm}$) која је постављена у деоници 3 и мери пад притиска од тачке C до тачке D (слика 31). Као манометарска течност се користи жива чија је густина $\rho_m = 13600\,\mathrm{kg/m^3}$. Растојање тачке D од тачке C износи $L_m = 5\,\mathrm{m}$.

Одредити: вредност коефицијента трења λ, средње брзине струјања воде у деоницама 1, 2 и 3, напор Y_p и снагу пумпе P_p, ако је њен степен корисности $\eta_p = 0{,}8$.



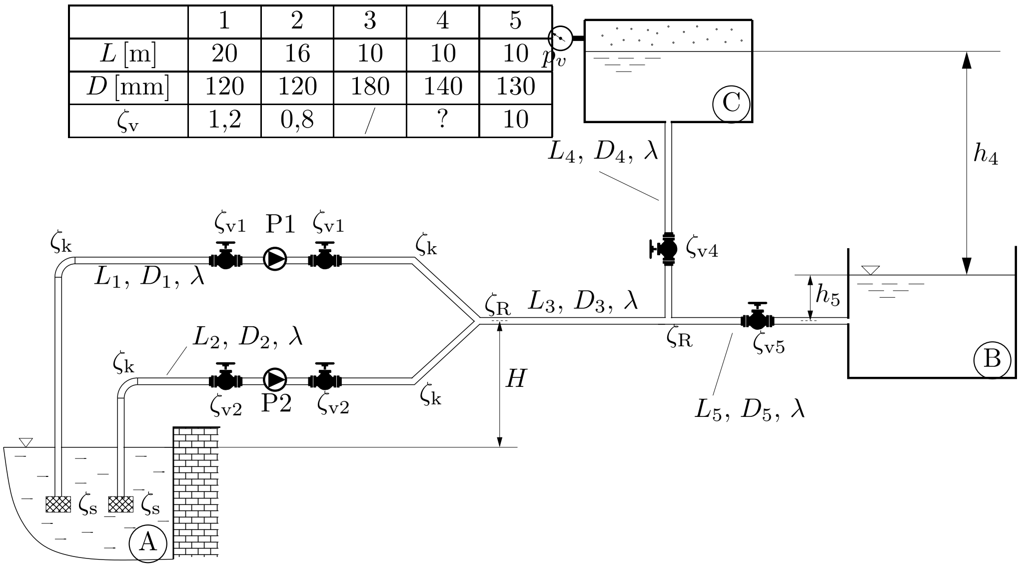
	1	2	3
L [m]	20	10	30
D [mm]	160	100	150

Решење:
$\lambda = 0{,}029$
$U_1 = 1{,}84\,\mathrm{m/s}$
$U_2 = 1{,}15\,\mathrm{m/s}$
$U_3 = 1{,}58\,\mathrm{m/s}$
$Y_p = 194{,}7\,\mathrm{J/kg}$
$P_p = 9003{,}7\,\mathrm{W}$

Слика 31

55. У систему приказаном на слици 32 пумпе P1 и P2 транспортују воду ($\rho = 1000\,\mathrm{kg/m^3}$) из језера A у резервоаре B и C. Пумпе раде са напором $Y_{p1} = Y_{p2} = 110\,\mathrm{J/kg}$, а запремински проток кроз пумпу у деоници 1 износи $\dot{V}_1 = 20\,\mathrm{l/s}$. Одредити средње брзине струјања у свих пет деоница, као и коефицијент отпора вентила у деоници 4 (ζ_{v4} =?). Вредности коефицијената отпора осталих вентила су дати у табели. Ту се такође налазе вредности дужина и пречника за сваку деоницу. Познате су висине $H = 5\,\mathrm{m}$, $h_4 = 7\,\mathrm{m}$, $h_5 = 1\,\mathrm{m}$, вредност потпритиска у резервоару C $p_v = 40\,\mathrm{kPa}$, коефицијенти отпора колена $\zeta_k = 0{,}3$, рачве $\zeta_R = 0{,}4$ и усисне корпе $\zeta_s = 0{,}4$. Коефицијент трења за све деонице има исту вредост, $\lambda = 0{,}04$.

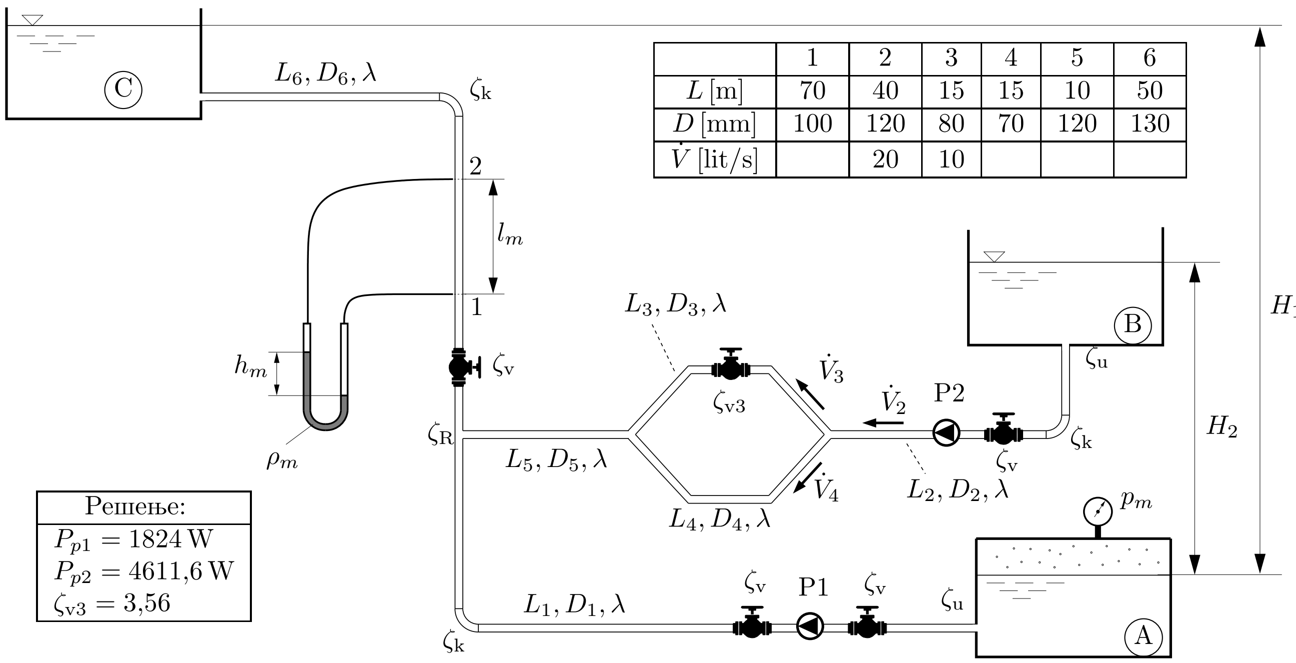
	1	2	3	4	5
L [m]	20	16	10	10	10
D [mm]	120	120	180	140	130
ζ_v	1,2	0,8	/	?	10



Решење:
$U_1 = 1{,}768\,\mathrm{m/s}$
$U_2 = 1{,}992\,\mathrm{m/s}$
$U_3 = 1{,}671\,\mathrm{m/s}$
$U_4 = 0{,}957\,\mathrm{m/s}$
$U_5 = 2{,}094\,\mathrm{m/s}$
$\zeta_{v4} = 2{,}438$

Слика 32

56. У систему приказаном на слици 33 пумпе P1 и P2 потискују воду ($\rho = 1000\,\mathrm{kg/m^3}$) из великих резервоара A и B у велики резервоар C. Одредити снаге пумпи и коефицијент отпора вентила ζ_{v3}. Познати су следећи подаци: натпритисак $p_m = 2\,\mathrm{bar}$, висине $H_1 = 20\,\mathrm{m}$, $H_2 = 10\,\mathrm{m}$, коефицијент трења $\lambda = 0{,}02$ (ова вредност важи за све деонице), коефицијенти локалних отпора $\zeta_u = 0{,}5$, $\zeta_k = 1$, $\zeta_v = 3$, $\zeta_R = 1{,}5$ и степен корисности $\eta = 0{,}8$ (за обе пумпе.) Подаци о дужинама деоница, пречницима цеви и запреминским протоцима су дати у табели. На делу деонице 6 мери се пад притиска помоћу диференцијалног манометра са живом: $\rho_m = 13600\,\mathrm{kg/m^3}$, $h_m = 50\,\mathrm{mm}$, $l_m = 11\,\mathrm{m}$. Напомена: локалне губитке услед рачвања цевовода узети у обзир само на месту где је то обележено на слици.



	1	2	3	4	5	6
L [m]	70	40	15	15	10	50
D [mm]	100	120	80	70	120	130
$\dot V$ [lit/s]		20	10			

Решење:
$P_{p1} = 1824\,\mathrm{W}$
$P_{p2} = 4611{,}6\,\mathrm{W}$
$\zeta_{v3} = 3{,}56$

Слика 33

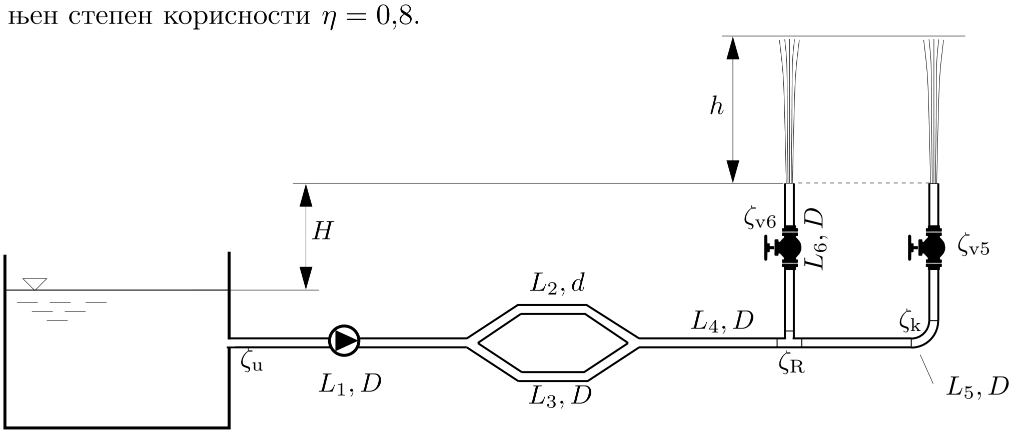
57. Пумпа црпи воду из великог резервоара и шаље је кроз цевовод приказан на слици 34. Вода кроз деонице 5 и 6 истиче у атмосферу. Теоријска висина оба млаза (занемарују се сви губици у млазу) је иста и износи $h = 1\,\mathrm{m}$. Познати су следећи подаци: $H = 0{,}5\,\mathrm{m}$, пречник деонице 2, $d = 50\,\mathrm{mm}$ (видети слику 34), пречник свих осталих деоница $D = 60\,\mathrm{mm}$, коефицијент трења за све деонице $\lambda = 0{,}03$, густина воде $\rho = 1000\,\mathrm{kg/m^3}$, коефицијенти локалних отпора $\zeta_u = 0{,}2$, $\zeta_k = 0{,}3$, $\zeta_{v5} = 4$, $\zeta_R = 1$ дужине деоница $L_1 = L_5 = 20\,\mathrm{m}$, $L_2 = L_3 = L_4 = L_6 = 10\,\mathrm{m}$. Локалне отпоре који нису назначени на слици занемарити.

Одредити:

(а) коефицијент отпора вентила у деоници 6, ($\zeta_{v6} = ?$),

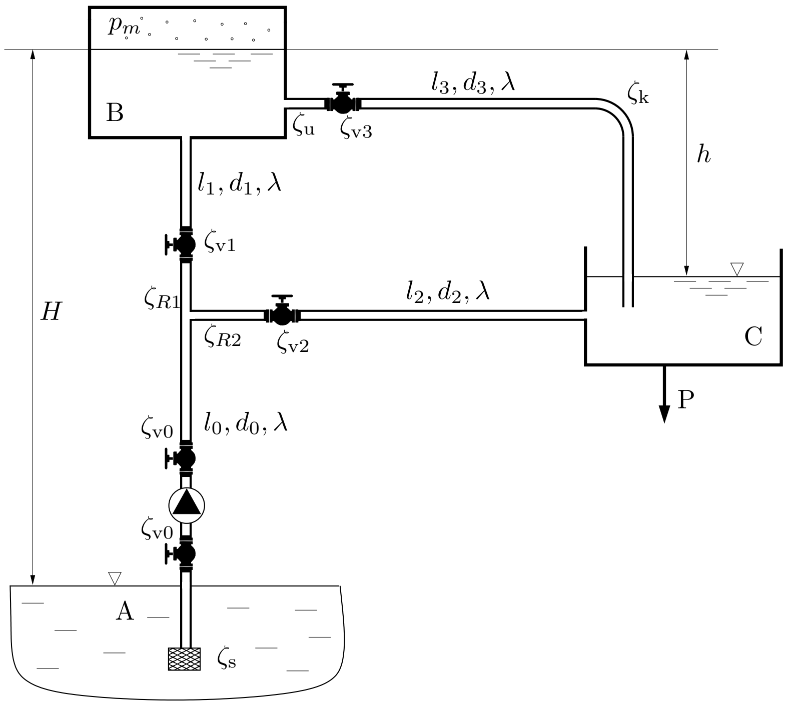
(б) снагу пумпе, ако је њен степен корисности $\eta = 0{,}8$.

Решење:
$\zeta_{v6} = 9{,}3$
$P_p = 26135{,}8\,\mathrm{W}$



Слика 34

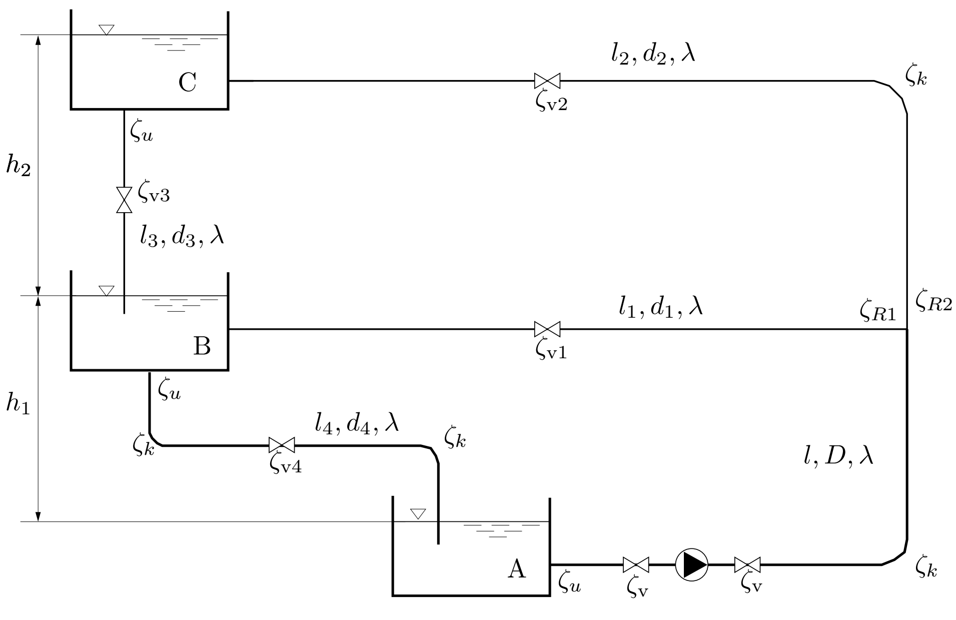
58. Пумпа транспортује воду из резервоара A у резервоаре B и C. Истовремено вода струји из резервоара B у резервоар C, а из њега ка потрошачу P (слика 35), тако да су нивои воде у резервоарима непромењиви. Одредити снагу пумпе, ако су познати следећи подаци: $\rho = 1000\,\mathrm{kg/m^3}$, $h = 1\,\mathrm{m}$, $H = 10\,\mathrm{m}$, $l_0 = 4\,\mathrm{m}$, $l_1 = 5\,\mathrm{m}$, $l_2 = 10\,\mathrm{m}$, $l_3 = 15\,\mathrm{m}$, $d_0 = 80\,\mathrm{mm}$, $d_1 = 45\,\mathrm{mm}$, $d_2 = 50\,\mathrm{mm}$, $d_3 = 40\,\mathrm{mm}$, $\zeta_\mathrm{u} = \zeta_\mathrm{k} = 0{,}5$, $\zeta_\mathrm{s} = 1$, $\zeta_\mathrm{v0} = 2$, $\zeta_\mathrm{v1} = 1{,}7$, $\zeta_\mathrm{v2} = 3{,}4$, $\zeta_\mathrm{v3} = 4$, $\zeta_{R1} = 0{,}3$, $\zeta_{R2} = 0{,}6$, $\eta_p = 0{,}75$, $p_m = 5\,\mathrm{kPa}$, за све деонице важи $\lambda = 0{,}02$.



Решење:
$P_p = 860{,}6\,\mathrm{W}$

Слика 35

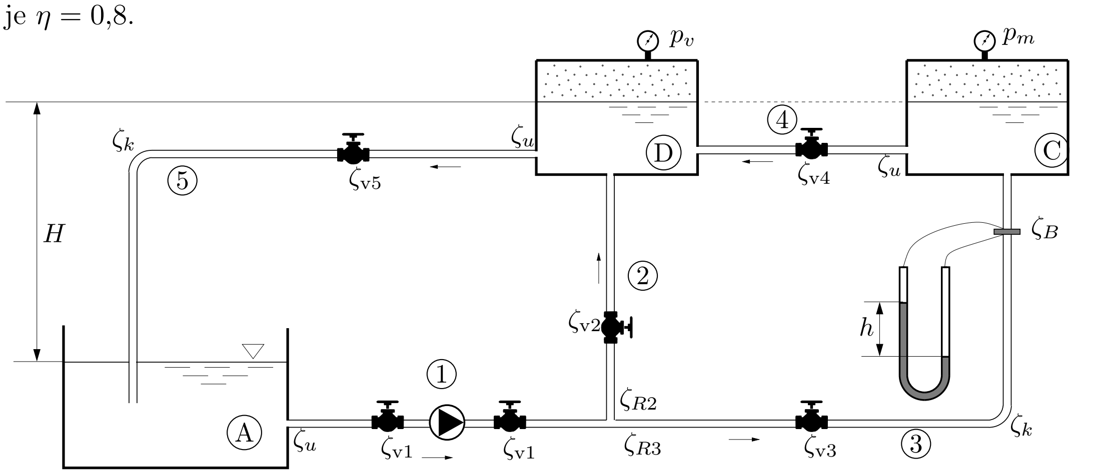
59. Пумпа транспортује воду из резервоара A ка резервоарима B и C (слика 36). При раду пумпе нивои воде у резервоарима се не мењају. Одредити снагу пумпе и коефицијент локалног отпора вентила у деоници 2 ($\zeta_\mathrm{v2} =?$). Познати су следећи подаци: $h_1 = 1{,}4\,\mathrm{m}$, $h_2 = 1{,}2\,\mathrm{m}$, $l = 8\,\mathrm{m}$, $l_1 = 4\,\mathrm{m}$, $l_2 = 5\,\mathrm{m}$, $l_3 = 1\,\mathrm{m}$, $l_4 = 6\,\mathrm{m}$, $D = 60\,\mathrm{mm}$, $d_1 = 40\,\mathrm{mm}$, $d_2 = 36\,\mathrm{mm}$, $d_3 = 25\,\mathrm{mm}$, $d_4 = 50\,\mathrm{mm}$, $\zeta_u = \zeta_k = 0{,}5$, $\zeta_\mathrm{v} = \zeta_\mathrm{v1} = 2$, $\zeta_\mathrm{v3} = 4$, $\zeta_\mathrm{v4} = 3$, $\zeta_{R1} = 1$, $\zeta_{R2} = 0{,}3$, $\lambda = 0{,}02$, степен корисности пумпе је $\eta_P = 0{,}8$.



Решење:
$U_4 = 1{,}865\,\mathrm{m/s}$
$U = 1{,}295\,\mathrm{m/s}$
$U_3 = 1{,}933\,\mathrm{m/s}$
$U_1 = 2{,}159\,\mathrm{m/s}$
$U_2 = 0{,}932\,\mathrm{m/s}$
$Y_p = 34{,}15\,\mathrm{J/kg}$
$P_p = 156{,}3\,\mathrm{W}$
$\zeta_\mathrm{v2} = 0{,}517$

Слика 36

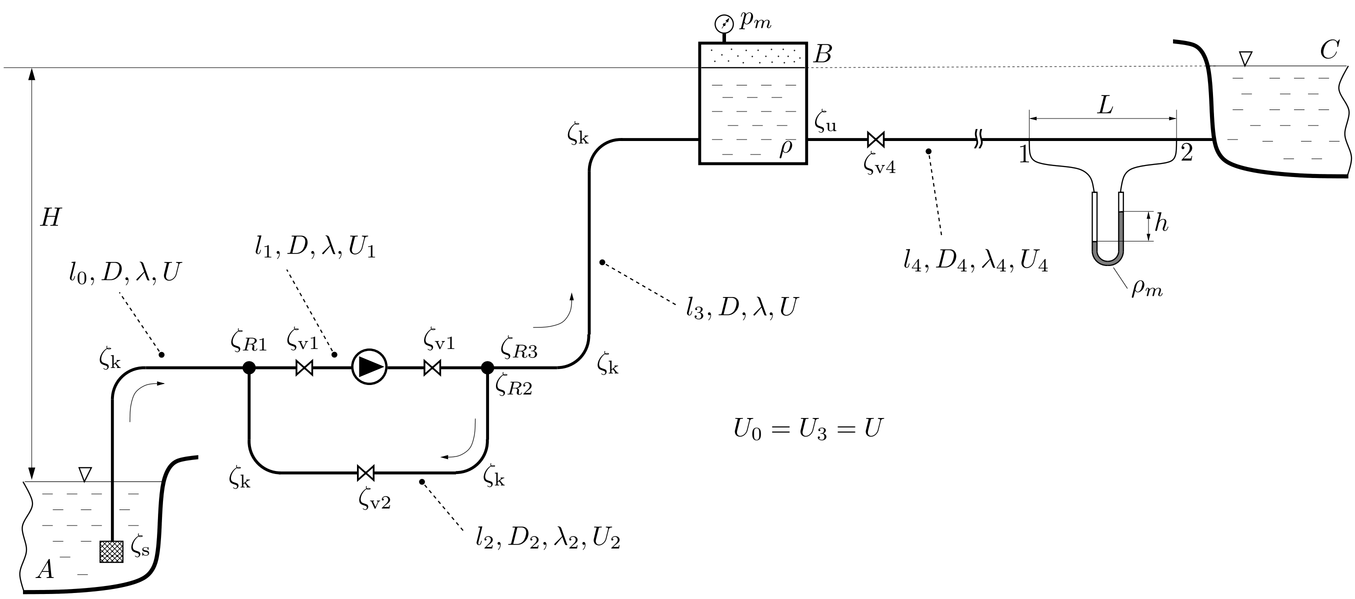
60. Пумпа транспортује воду из резервоара A ка резервоарима C и D, а затим се вода из резервоара D кроз деоницу ⑤ враћа у резервоар A (слика 37). Запремински проток у грани ③ се мери помоћу бленде чија је карактеристика $k = 0{,}01\,\mathrm{m}^{\frac{5}{2}}/\mathrm{s}$, а која је повезана на диференцијални манометар са кога се очитава разлика нивоа манометарске течности $h = 40\,\mathrm{mm}$. Проток се израчунава према једначини $\dot{V}_3 = k\sqrt{h}$. Нивои воде у резервоарима су непромењиви. Потребно је одредити коефицијенте отпора вентила $\zeta_{\mathrm{v}2}$ и $\zeta_{\mathrm{v}4}$, као и снагу пумпе. Познати су пречници деоница и њихове дужине $D_1 = 75\,\mathrm{mm}$, $D_2 = 40\,\mathrm{mm}$, $D_3 = 50\,\mathrm{mm}$, $D_4 = 50\,\mathrm{mm}$, $D_5 = 75\,\mathrm{mm}$, $L_1 = 5\,\mathrm{m}$, $L_2 = 5\,\mathrm{m}$, $L_3 = 10\,\mathrm{m}$, $L_4 = 4\,\mathrm{m}$, $L_5 = 10\,\mathrm{m}$, вредности релативних притисака у резервоарима $p_v = 35{,}5\,\mathrm{kPa}$, $p_m = 1\,\mathrm{kPa}$, висина $H = 4\,\mathrm{m}$, коефицијенти локалних отпора $\zeta_u = \zeta_k = 0{,}5$, $\zeta_{\mathrm{v}1} = 1{,}5$, $\zeta_{\mathrm{v}3} = 3$, $\zeta_{\mathrm{v}5} = 2$, $\zeta_{R2} = 0{,}6$, $\zeta_{R3} = 0{,}3$, $\zeta_B = 1{,}5$. Радни флуид је вода густине $\rho = 1000\,\mathrm{kg/m^3}$. Коефицијент трења за све деонице износи $\lambda = 0{,}02$, а степен корисности пумпе је $\eta = 0{,}8$.



Решење:
$U_3 = 1{,}019\,\mathrm{m/s}$
$U_4 = U_3$
$U_5 = 1{,}059\,\mathrm{m/s}$
$U_2 = 2{,}132\,\mathrm{m/s}$
$\zeta_{\mathrm{v}4} = 67{,}26$
$U_1 = U_5$
$Y_p = 48{,}295\,\mathrm{J/kg}$
$P_p = 282{,}5\,\mathrm{W}$
$\zeta_{\mathrm{v}2} = 18{,}405$

Слика 37

61. Пумпом се црпи вода ($\rho = 1000\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$) из доњег језера A, запреминским протоком $\dot{V}_0 = 40\,\frac{l}{\mathrm{s}}$ и шаље се ка резервоару B у коме влада натпритисак $p_m = 15000\,\mathrm{Pa}$. Ниво воде у резервоару B се не мења. За регулацију протока се користи опточни вод (грана 2) кроз који протиче $\dot{V}_2 = 12\,\frac{l}{\mathrm{s}}$ воде. Вода даље струји из резервоара B у горње језеро C, кроз праволинијски цевовод. На делу тог цевовода, дужине $L = 4{,}5\,\mathrm{m}$ мери се пад притиска помоћу U-цеви чије је показивање $h = 90\,\mathrm{mm}$. Густина манометарске течности је $\rho_m = 2500\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$. Познати су и следећи подаци: $D = 200\,\mathrm{mm}$, $D_2 = 80\,\mathrm{mm}$, $D_4 = 170\,\mathrm{mm}$, $l_0 = 5\,\mathrm{m}$, $l_1 = 2\,\mathrm{m}$, $l_2 = 4\,\mathrm{m}$, $l_3 = 15\,\mathrm{m}$, $H = 10\,\mathrm{m}$, $\lambda = 0{,}03$, $\lambda_2 = 0{,}035$. Коефицијенти локалних отпора су: $\zeta_{\mathrm{s}} = 5$, $\zeta_{\mathrm{k}} = 0{,}3$, $\zeta_{\mathrm{v}1} = 2$, $\zeta_{\mathrm{v}4} = 1{,}5$, $\zeta_{\mathrm{u}} = 0{,}2$, $\zeta_{R1} = 0{,}8$, $\zeta_{R2} = 2$, $\zeta_{R3} = 1{,}2$.



Слика 38

Одредити:

- средње брзине струјања у свим деоницама,
- вредност коефицијента трења у деоници 4, λ_4,
- дужину деонице 4, између резервоара B и језера C, l_4,
- коефицијент отпора вентила који се налази у опточном воду (грана 2) ζ_{V2},
- напор пумпе Y_p и снагу пумпе P_p, ако је њен степен корисности $\eta_p = 0,8$.

Решење:

Познати су запремински протоци у деоницама 0 и 2. Могуће је на основу једначине континуитета за цев одредити средње брзине струјања у тим деоницама. Протоци и пречници у деоницама 0 и 3 су једнаки, па су и средње брзине струјања: $U_0 = U_3 = U$.

$$\dot{V}_0 = U\frac{D^2\pi}{4} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{U = \frac{4\dot{V}_0}{D^2\pi} = 1,273\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}$$

$$\dot{V}_2 = U_2\frac{D_2^2\pi}{4} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{U_2 = \frac{4\dot{V}_2}{D_2^2\pi} = 2,387\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}$$

Проток кроз деоницу 1 се може одредити на основу једначине континуитета за рачву:

$$\dot{V}_1 = \dot{V}_0 + \dot{V}_2 = 52\,\frac{l}{\mathrm{s}}$$

$$\dot{V}_1 = U_1\frac{D_1^2\pi}{4} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{U_1 = \frac{4\dot{V}_1}{D_1^2\pi} = 1,655\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}$$

Ниво воде у резервоару B је непроменљив, тј. нема промене запремине воде у резервоару. Према једначини континуитета за резервоар, следи да је улазни запремински проток једнак излазном:

$$\dot{V}_3 = \dot{V}_4 \qquad \Rightarrow \qquad U\frac{D^2\pi}{4} = U_4\frac{D_4^2\pi}{4} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{U_4 = U\left(\frac{D}{D_4}\right)^2 = 1,762\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}$$

Из Бернулијеве једначине од доњег језера A до резервоара B, могуће је одредити напор пумпе:

$$Y_A + Y_p = Y_B + Y_{g\,A-B}$$

$$\begin{aligned}\frac{p_a}{\rho} + 0 + 0 + Y_p = \frac{p_a + p_m}{\rho} + 0 + gH + \underbrace{\left(\zeta_{\mathrm{s}} + \zeta_{\mathrm{k}} + \lambda\frac{l_0}{D}\right)}_{\mathrm{C}_0=6{,}05}\frac{U^2}{2} \\ + \underbrace{\left(\zeta_{R1} + 2\,\zeta_{\mathrm{v}1} + \lambda\frac{l_1}{D}\right)}_{\mathrm{C}_1=5{,}1}\frac{U_1^2}{2} + \underbrace{\left(\zeta_{R3} + 2\zeta_{\mathrm{k}} + 1 + \lambda\frac{l_3}{D}\right)}_{\mathrm{C}_3=5{,}05}\frac{U^2}{2}\end{aligned} \tag{13}$$

$$Y_p = \frac{p_m}{\rho} + gH + \mathrm{C}_0\frac{U^2}{2} + \mathrm{C}_1\frac{U_1^2}{2} + \mathrm{C}_3\frac{U^2}{2}$$

$$\boxed{Y_p = 129{,}07\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}}}$$

Снага пумпе се израчунава следећим изразом:

$$\boxed{P_p = \frac{\rho \dot{V}_1 Y_p}{\eta_p} = 8389{,}6\,\mathrm{W}}$$

За повратни (опточни) вод важи да је напор пумпе једнак суми јединичних губитака енергије. Деонице 1 и 2 чине повратни вод, па следи:

$$Y_p = \sum Y_g$$

$$Y_p = \mathrm{C}_1 \frac{U_1^2}{2} + \left(\zeta_{R2} + 2\,\zeta_{\mathrm{k}} + \zeta_{\mathrm{v}2} + \lambda_2 \frac{l_2}{D_2} \right) \frac{U_2^2}{2}$$

Једина непозната величина у претходној једначини је тражени коефицијент локалног отпора вентила у деоници 2:

$$\zeta_{\mathrm{v}2} = \left(Y_p - \mathrm{C}_1 \frac{U_1^2}{2} \right) \frac{2}{U_2^2} - \zeta_{R2} - 2\,\zeta_{\mathrm{k}} - \lambda_2 \frac{l_2}{D_2}$$

$$\boxed{\zeta_{\mathrm{v}2} = 38{,}5}$$

Коришћењем диференцијалног манометра, U-цеви, одређује се пад притиска у деоници 4 између пресека 1-1 и 2-2. Једначина хидростатичке равнотеже гласи:

$$p_1 + \rho g x + \rho g h = p_2 + \rho g x + \rho_m g h$$

$$p_1 - p_2 = \Delta p_{12} = g h \left(\rho_m - \rho \right) \tag{14}$$

Исти пад притиска се може одредити Дарсијевом формулом:

$$\Delta p_{12} = \rho \lambda_4 \frac{L}{D_4} \frac{U_4^2}{2} \tag{15}$$

Изједначавањем израза (14) и (15) добија се једначина у којој је једина непозната величина коефицијент трења у деоници 4 λ_4:

$$g h \left(\rho_m - \rho \right) = \rho \lambda_4 \frac{L}{D_4} \frac{U_4^2}{2}$$

$$\boxed{\lambda_4 = \frac{g h \left(\rho_m - \rho \right)}{\rho} \frac{2\,D_4}{L\,U_4^2} = 0,032}$$

Тражена дужина l_4 се појављује у члану који представља губитак јединичне енергије услед трења, па се користи Бернулијева једначина од резервоара B до горњег језера C:

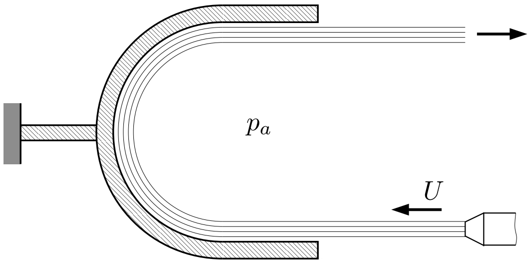
$$Y_B = Y_C + Y_{g\,B-C}$$

$$\frac{p_a + p_m}{\rho} + 0 + 0 = \frac{p_a}{\rho} + 0 + 0 + \left(\zeta_{\mathrm{u}} + \zeta_{\mathrm{v}4} + 1 + \lambda_4 \frac{l_4}{D_4} \right) \frac{U_4^2}{2}$$

$$\boxed{l_4 = \frac{D_4}{\lambda_4} \left(\frac{2\,p_m}{\rho\,U_4^2} - \zeta_{\mathrm{u}} - \zeta_{\mathrm{v}4} - 1 \right) = 36{,}99\,\mathrm{m}}$$

6 Примена закона о промени количине кретања

62. Млаз воде истиче из млазнице брзином $U = 15\,\mathrm{m/s}$ и удара у лопатицу приказану на слици 39, након чега млаз мења смер. Одредити правац, смер и интензитет силе F којом млаз делује на непокретну лопатицу. Занемарити тежину воде, разлику у висини и губитке енергије. Густина воде је $\rho = 1000\,\mathrm{kg/m^3}$, а површина попречног пресека млаза, која се не мења, износи $A = 0{,}01\,\mathrm{m^2}$.



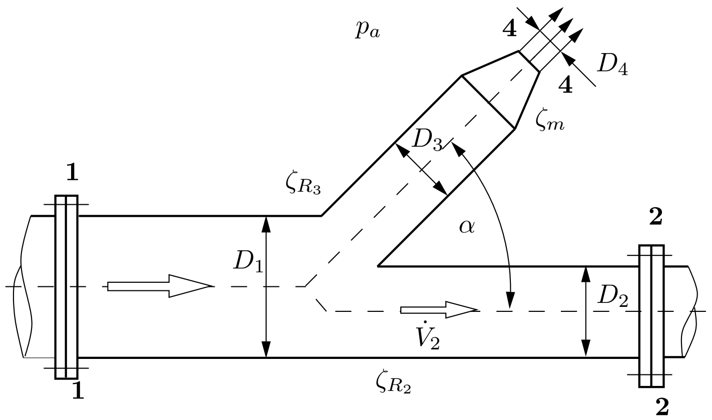
Слика 39

Решење:	
$F_{flx} = 4500\,\mathrm{N}$	$(\leftarrow)$ смер
$F_{fly} = 0\,\mathrm{N}$	

Резултујућа сила је хоризонтална, делује са десна на лево и има интензитет $F_{fl} = 4500\,\mathrm{N}$.

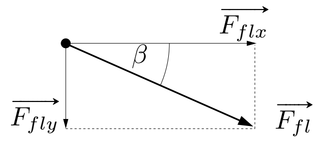
---

63. Одредити правац, смер и интензитет силе којом вода ($\rho = 1000\,\mathrm{kg/m^3}$) делује на хоризонталну рачву приказану на слици 40. Рачва је за остатак цевовода причвршћена прирубницама у пресецима 1-1 и 2-2, где су познате вредности натпритисака: $p_{m_1} = 8\,\mathrm{kPa}$, $p_{m_2} = 7{,}5\,\mathrm{kPa}$. Грана пречника $D_3 = 100\,\mathrm{mm}$ се завршава млазницом пречника $D_4 = 65\,\mathrm{mm}$, кроз коју вода истиче у атмосферу. Познати су и пречници $D_1 = 150\,\mathrm{mm}$, $D_2 = 110\,\mathrm{mm}$. Запремински проток воде кроз грану 2 (слика 40) је $\dot{V}_2 = 10\,\mathrm{l/s}$. Ако је коефицијент локалног отпора млазнице $\zeta_m = 0{,}3$ и рачве $\zeta_{R2} = 1{,}1$ и угао $\alpha = 30°$, одредити коефицијент локалног отпора рачве за грану 3 $\zeta_{R3} =?$. Занемарити тежину воде у рачви.



Слика 40

Решење:
$\zeta_{R3} = 2{,}707$
$F_{flx} = 55{,}07\,\mathrm{N}$
$F_{fly} = -16{,}12\,\mathrm{N}$
$F_{fl} = 57{,}38\,\mathrm{N}$
$\beta = 16{,}3°$

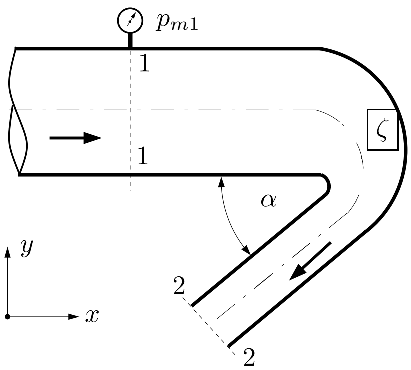


---

64. На слици 41 је приказана хоризонтална, закривљена цев промењивог попречног пресека кроз коју струји вода густине $\rho = 1000\,\mathrm{kg/m^3}$. Површине попречних пресека су $A_1 = 0{,}02\,\mathrm{m^2}$ и $A_2 = 0{,}01\,\mathrm{m^2}$. У пресеку 1-1 измерен је натпритисак $p_{m1} = 25\,\mathrm{kPa}$, а пресек 2-2 је отворен ка атмосфери. Сила којом флуид делује на део цевовода између пресека 1-1 и 2-2 се може пројектовати на осе приказаног координатног система (слика 41). Ако вредност пројекције силе на x осу износи $F_{flx} = 700\,\mathrm{N}$ одредити:

(а) запремински проток воде $\dot{V}$,
(б) вредност пројекције силе на y осу F_y,
(в) вредност коефицијента локалног отпора кривине ζ.

Позната је вредност угла $\alpha = 45°$. Губитке на трење занемарити.

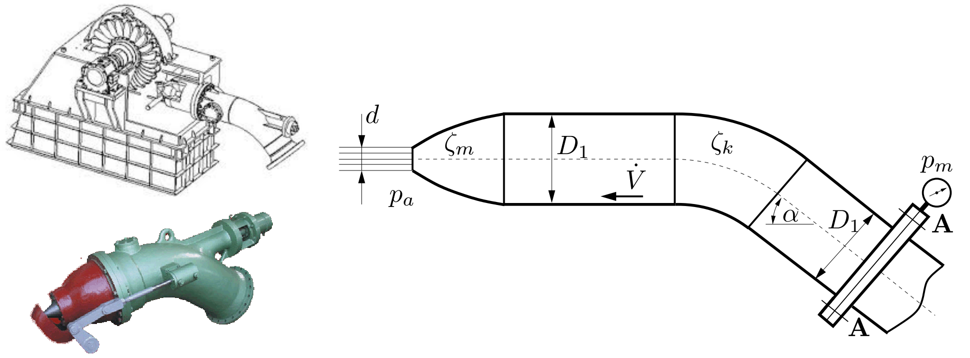


Слика 41

Решење:
$\dot{V} = 40{,}7\,\mathrm{lit/s}$, $\quad F_{fly} = 117{,}16\,\mathrm{N}$, $\quad \zeta = 2{,}27$

65. На крају цевовода којим се вода доводи Пелтоновој турбини се налази млазница (слика 42). Она је за остатак цевовода причвршћена завртањском везом А-А. Одредити показивање манометра (p_m =?), као и силе истезања и смицања завртањске везе, ако су познати следећи подаци: запремински проток и густина воде $\dot{V} = 70\,\mathrm{l/s}$, $\rho = 1000\,\mathrm{kg/m^3}$, пречници $D_1 = 25\,\mathrm{cm}$, $d = 9\,\mathrm{cm}$, коефицијенти локалних губитка колена и млазнице $\zeta_k = 0{,}5$, $\zeta_m = 0{,}8$ и вредност угла $\alpha = 30°$.

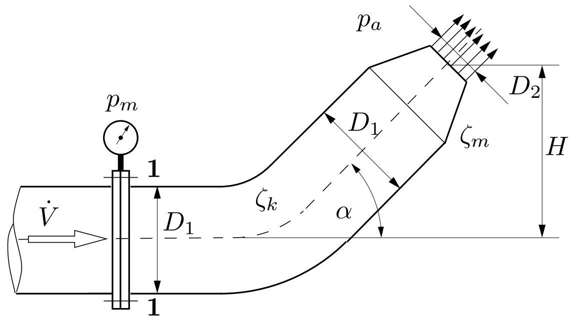
Тежину воде у млазници и разлику висина на улазу и излазу из млазнице занемарити. Због кратке дужине млазнице занемарити и губитке на трење. Вода излази у атмосферу.



Решење:
$p_m = 108457\,\mathrm{Pa}$
$F_i = 4756{,}7\,\mathrm{N}$
$F_s = 385{,}12\,\mathrm{N}$

Слика 42

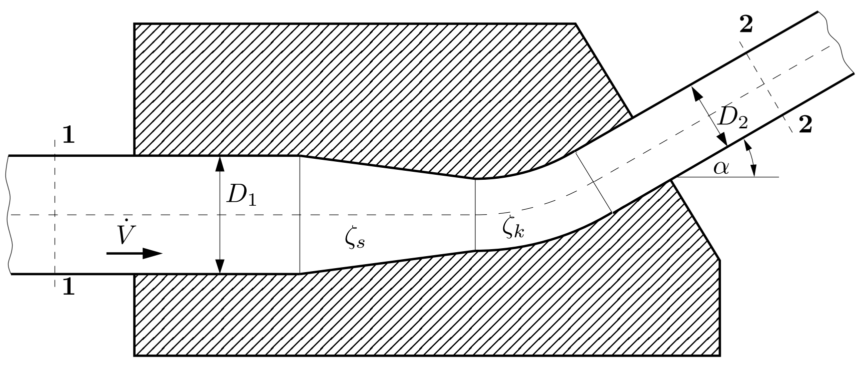
66. Кратка закривљена цев са млазницом је за остатак цевовода причвршћења завртањском везом у пресеку 1-1 (слика 43). У том пресеку је измерен натпритисак $p_m = 0{,}2\,\mathrm{bar}$. Кроз цев струји вода ($\rho = 1000\,\mathrm{kg/m^3}$) запреминским протоком $\dot{V}$, затим кроз млазницу истиче у атмосферу. Познати су следећи подаци $D_1 = 100\,\mathrm{mm}$, $D_2 = 60\,\mathrm{mm}$, $\alpha = 45°$, $H = 200\,\mathrm{mm}$, $\zeta_k = 0{,}2$, $\zeta_m = 0{,}5$ (коефицијенти локалних губитака колена и млазнице). Занемарујући губитке на трење и тежину воде у цеви, израчунати запремински проток $\dot{V}$ и силу која оптерећује завртањску везу 1-1.



Слика 43

Решење:			
$\dot{V} = 14{,}4\,\mathrm{lit/s}$,	$F_i = 131{,}7\,\mathrm{N}$ смер ($\rightarrow$),	$F_s = 51{,}65\,\mathrm{N}$ смер ($\downarrow$),	$F_{1-1} = 141{,}5\,\mathrm{N}$

67. На слици 44 је приказан део цевовода који се ослања на бетонски блок. Кроз цевовод протиче вода ($\rho = 1000\,\mathrm{kg/m^3}$) запреминским протоком $\dot{V} = 15\,\mathrm{lit/s}$. Ако су познати пречници цеви $D_1 = 140\,\mathrm{mm}$, $D_2 = 100\,\mathrm{mm}$ и натпритисак у пресеку 1-1 $p_{m1} = 20\,\mathrm{kPa}$, одредити интензитет силе којом цевовод делује на бетонски блок. Занемарити разлику у висини, тежину воде у цевоводу и губитке на трење између пресека 1-1 и 2-2. Коефицијенти локалних отпора сужења цевовода и кривине износе редом: $\zeta_s = 0{,}5$ и $\zeta_k = 0{,}3$. На улазу у бетонски блок цев је хоризонтална, а на излазу заклапа угао са хоризонталом од $\alpha = 30°$.



Решење:	
$F_{flx} = 180{,}7\,\mathrm{N}$	смер ($\rightarrow$)
$F_{fly} = 81{,}8\,\mathrm{N}$	смер ($\downarrow$)
$F_{fl} = 198{,}4\,\mathrm{N}$	

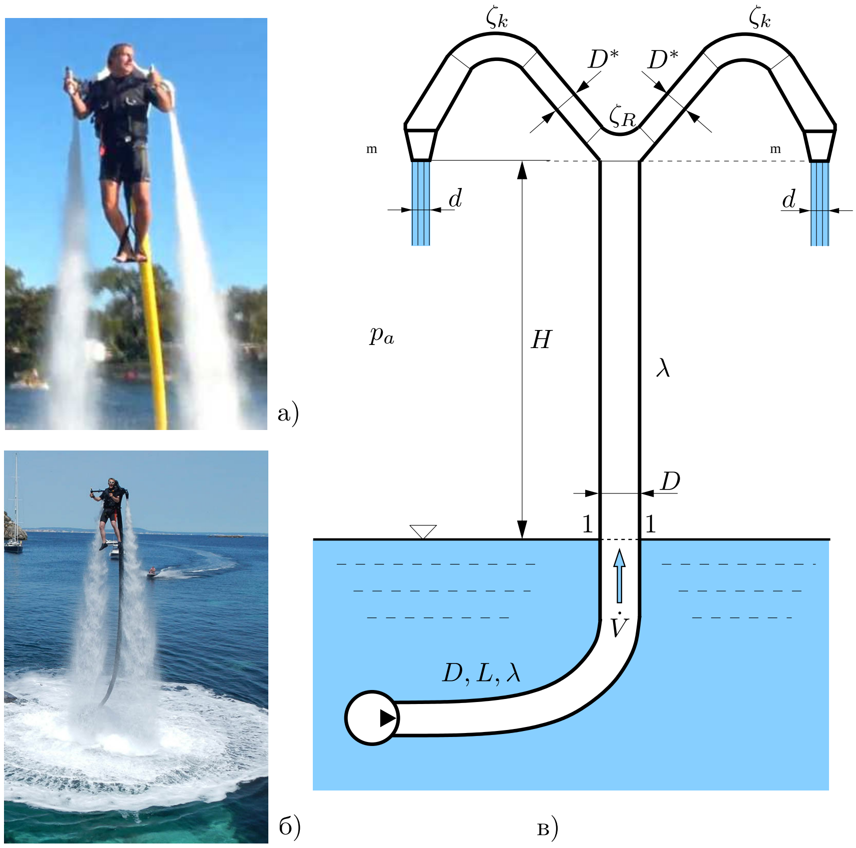
Слика 44

68. Помоћу млазног ранца човек се може слободно кретати кроз ваздух изнад нивоа воде. Вода се помоћу потопљене пумпе кроз еластично црево потискује до млазног ранца, који је везан за човекова леђа. Одавде вода, кроз две млазнице, истиче великом брзином, чиме се остварује сила потиска. Променом протока мења се интензитет силе, а закретањем млазница мења се њен правац и смер. Основни делови су шематски приказани на слици в). Познати су следећи подаци: маса човека са опремом на леђима $m_o = 150\,\mathrm{kg}$, маса воде која се налази између пресека 1-1 и млазница $m_\mathrm{v} = 50\,\mathrm{kg}$, $\rho = 1000\,\mathrm{kg/m^3}$, пречници $D_1 = 8\,\mathrm{cm}$, $d = 4\,\mathrm{cm}$, $D^* = 6\,\mathrm{cm}$, натпритисак у пресеку 1-1 $p_{m1} = 2{,}8\,\mathrm{bar}$, коефицијенти локалног отпора рачве и колена су $\zeta_R = 0{,}8$ и $\zeta_K = 1{,}4$, коефицијент трења $\lambda = 0{,}022$, дужина цеви од пумпе до пресека 1-1 је $L = 10\,\mathrm{m}$, степен корисноси пумпе $\eta = 0{,}75$.

Од улазног пресека у рачву па до излаза из млазнице губитке узети само као губитке у одговарајућим локалним отпорима. Од пумпе до пресека 1-1 занемарити локалне отпоре.

Одредити потребан запремински проток воде да би човек мировао у ваздуху на $H = 10\,\mathrm{m}$ изнад површине воде (слика б). Одредити коефицијент локалног отпора млазнице и снагу пумпе.

Решење:
$\dot{V} = 30{,}5\,\mathrm{lit/s}$
$\zeta_\mathrm{m} = 0{,}6$
$P_p = 14182{,}7\,\mathrm{W}$

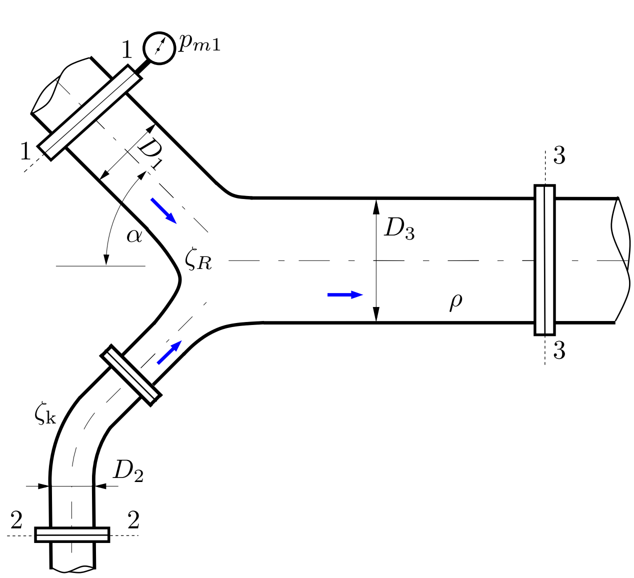


Слика 45

69. Одредити правац, смер и интензитет силе којом вода ($\rho = 1000\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m^3}}$) делује на део цевовода који је ограничен пресецима 1-1, 2-2 и 3-3. Занемарити силу тежине воде у цевоводу и губитке на трење. Цевовод се налази у хоризонталној равни. Коефицијенти локалних отпора колена и рачве су: $\zeta_\mathrm{k} = 0,3$ и $\zeta_R = 1,5$. У пресеку 1-1 натпритисак се мери манометром чије је показивање $p_{m1} = 30000\,\mathrm{Pa}$.

Познати су и следећи подаци: $D_1 = 150\,\mathrm{mm}$, $D_2 = 100\,\mathrm{mm}$, $D_3 = 180\,\mathrm{mm}$, $\dot{V}_1 = 20\,\frac{\mathrm{l}}{\mathrm{s}}$, $\dot{V}_2 = 15\,\frac{\mathrm{l}}{\mathrm{s}}$, $\alpha = 45°$, $p_a = 10^5\,\mathrm{Pa}$.

Вода тече у смеру који је назначен на слици.

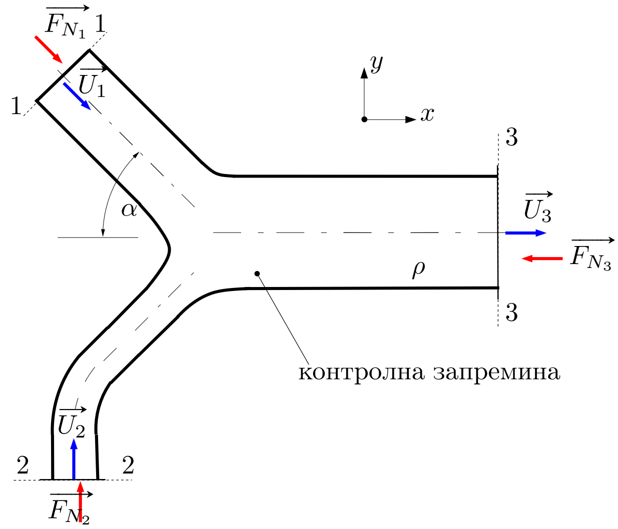


Слика 46

Решење:

Посматра се контролна запремина која обухвата сложен цевовод између пресека 1-1, 2-2 и 3-3. Сила којом вода делује на зидове контролне запремине је према закону о промени количине кретања:

$$\vec{F} = \dot{m}_1\vec{U_1} + \dot{m}_2\vec{U_2} - \dot{m}_3\vec{U_3} + \vec{F_{N_1}} + \vec{F_{N_2}} + \vec{F_{N_3}} + \cancelto{0}{\vec{G}} \quad (16)$$



Запремински проток $\dot{V}_3$ се добија из једначине континуитета за рачву:

$$\dot{V}_3 = \dot{V}_1 + \dot{V}_2.$$

Масени протоци кроз одговарајуће деонице су:

$$\dot{m}_1 = \rho\dot{V}_1 = 20\,\frac{\text{kg}}{\text{s}}, \quad \dot{m}_2 = \rho\dot{V}_2 = 15\,\frac{\text{kg}}{\text{s}},$$

$$\dot{m}_3 = \rho\dot{V}_3 = 35\,\frac{\text{kg}}{\text{s}}.$$

Када се једначина континуитета, за цев кружног попречног пресека, примени за све три деонице одређују се средње брзине струјања воде:

$$\dot{V}_1 = U_1\frac{D_1^2\pi}{4} \quad \Rightarrow \quad U_1 = \frac{4\dot{V}_1}{D_1^2\pi} = 1,132\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\dot{V}_2 = U_2\frac{D_2^2\pi}{4} \quad \Rightarrow \quad U_2 = \frac{4\dot{V}_2}{D_2^2\pi} = 1,91\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\dot{V}_3 = U_3\frac{D_3^2\pi}{4} \quad \Rightarrow \quad U_3 = \frac{4\dot{V}_3}{D_3^2\pi} = 1,375\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Бернулијева једначина од пресека 1-1 до пресека 3-3 гласи:

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{U_1^2}{2} = \frac{p_3}{\rho} + \frac{U_3^2}{2} + \zeta_R\frac{U_3^2}{2}$$

$$p_3 = p_a + p_{m1} + \rho\frac{U_1^2}{2} - \rho\frac{U_3^2}{2}\left(1 + \zeta_R\right) = 128277\,\text{Pa}$$

Натпритисак у пресеку 3-3 износи:

$$p_{m3} = p_3 - p_a = 28277\,\text{Pa}$$

Притисак у пресеку 2-2 је могуће одредити из Бернулијеве једначине од пресека 2-2 до пресека 3-3:

$$Y_2 = Y_3 + Y_{g\,2-3}$$

$$\frac{p_2}{\rho} + \frac{U_2^2}{2} = \frac{p_a + p_{m3}}{\rho} + \frac{U_3^2}{2} + \zeta_\text{k}\frac{U_2^2}{2} + \zeta_R\frac{U_3^2}{2}$$

$$p_2 - p_a = p_{m3} + \rho\frac{U_3^2}{2}\left(1 + \zeta_R\right) + \rho\frac{U_2^2}{2}\left(\zeta_\text{k} - 1\right) = 29363\,\text{Pa} = p_{m2}.$$

Притисне силе којима одбачени делови флуида делују на флуид у контролној запремини преко карактеристичних пресека, износе:

$$F_{N_1} = (p_1 - p_a)\,\frac{D_1^2\pi}{4} = p_{m1}\frac{D_1^2\pi}{4} = 530,1\,\text{N}$$

$$F_{N_2} = (p_2 - p_a)\frac{D_2^2\pi}{4} = p_{m2}\frac{D_2^2\pi}{4} = 230,6\,\mathrm{N}$$
$$F_{N_3} = (p_3 - p_a)\frac{D_3^2\pi}{4} = p_{m3}\frac{D_3^2\pi}{4} = 719,6\,\mathrm{N}$$

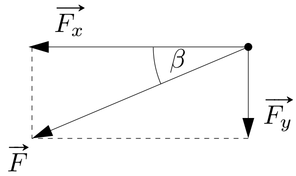
Сада су познате вредности свих физичких величина које се појављују у једначини 16. Пројекције ове векторске једначине на осе координатног система, гласе:

$$x: \qquad F_x = \dot{m}_1 U_1 \cos\alpha + 0 - \dot{m}_3 U_3 + F_{N_1}\cos\alpha + 0 - F_{N_3} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{F_x = -376,9\,\mathrm{N}}$$

$$y: \qquad F_y = -\dot{m}_1 U_1 \sin\alpha + \dot{m}_2 U_2 - 0 - F_{N_1}\sin\alpha + F_{N_2} + 0 \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{F_y = -131,6\,\mathrm{N}}$$

Интензитет резултујуће силе и угао под којим она делује износе:

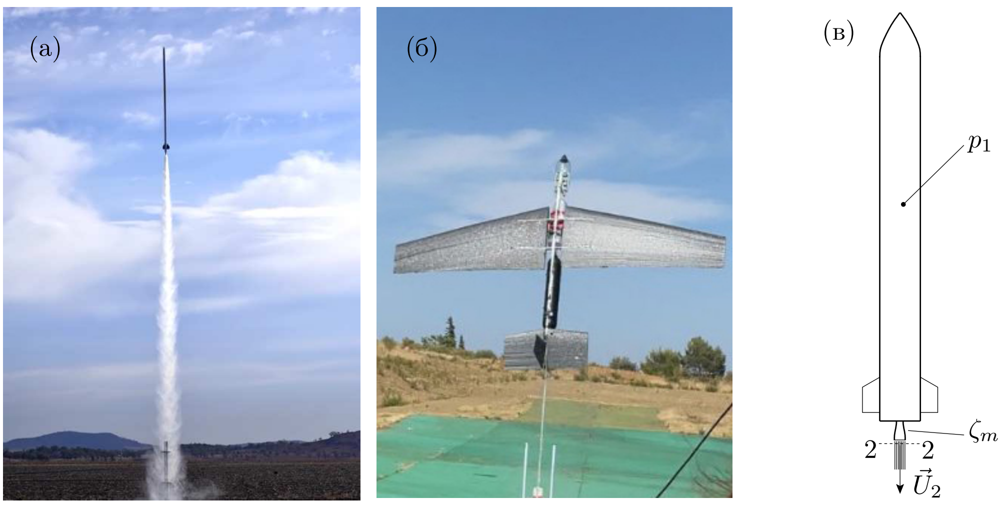
$$\boxed{F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = 399,2\,\mathrm{N}}, \qquad \boxed{\beta = \arctan\frac{F_y}{F_x} = 19,25^\circ}$$



---

70. Као погонско средство за кретање ракете може се користити вода (или мешавина воде и ваздуха) под притиском (слика 47 а). На слици 47 б) приказана је ракета са крилима Аурора 3, пројекат студентског тима Беоавиа.

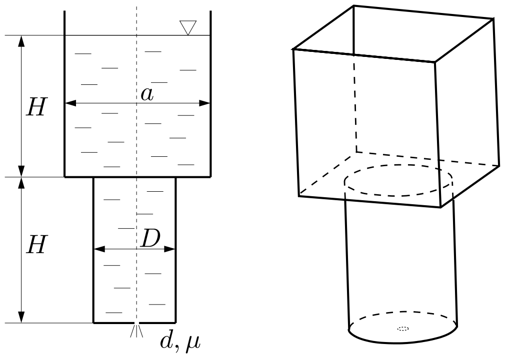
Разматра се случај када унутар ракете напуњене водом ($\rho = 1000\,\mathrm{kg/m^3}$) влада притисак од $p_1 = 10\,\mathrm{bar}$ (слика 47 в). Након отварања млазника, чији је излазни пречник $D_2 = 20\,\mathrm{mm}$, вода истиче у атмосферу. Приликом итицања javља се губитак енергије који је описан коефицијентом отпора млазника $\zeta_m = 0{,}3$. Одредити брзину млаза воде и силу реакције којом млаз делује на ракету. Разлике у висини и тежину течности занемарити.



Слика 47

7 Квазистационарно истицање флуида

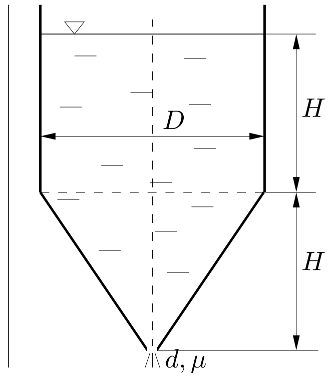
71. На слици 48 је приказан резервоар који се састоји из дела облика квадра и дела облика ваљка. Он се празни кроз мали отвор на дну пречника $d = 40\,\mathrm{mm}$ и коефицијента протока $\mu = 0{,}62$. Одредити време пражњења целог резервоара ако су познати следећи подаци: $H = a = 1\,\mathrm{m}$ и $D = 0{,}7\,\mathrm{m}$.



Слика 48

Решење:
$T_1 = 240{,}1\,\mathrm{s}$
$T_2 = 223\,\mathrm{s}$
$T = 463{,}1\,\mathrm{s}$

72. Резервоар се састоји од цилиндричног и конусног дела (слика 49). Одредити укупно време пражњења резервоара ако вода истиче кроз мали отвор на дну пречника $d = 30\,\mathrm{mm}$ и коефцијента протока $\mu = 0{,}62$. Познате су вредности $D = 500\,\mathrm{mm}$ и $H = 300\,\mathrm{mm}$.



Слика 49

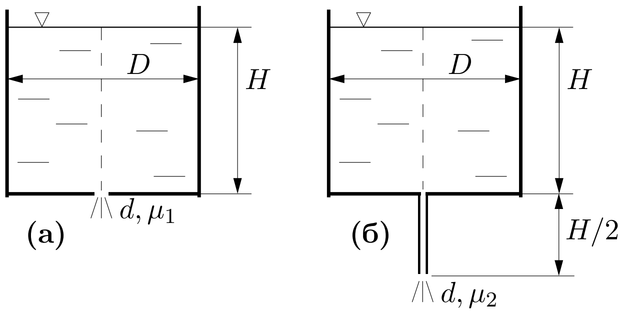
Решење:
$T_1 = 45{,}9\,\mathrm{s}$
$T_2 = 22{,}16\,\mathrm{s}$
$T = 68{,}06\,\mathrm{s}$

---

73. **(а)** Одредити време пражњења цилиндричног резервоара приказаног на слици 50 (а), чији је пречник $D = 1\,\mathrm{m}$. Вода истиче кроз мали отвор на дну пречника $d = 30\,\mathrm{mm}$ и коефицијента протока $\mu_1 = 0{,}62$. Почетни ниво воде у резервоару је $H = 1\,\mathrm{m}$. Да ли ће се време пражњења променити ако из истог резервоара, под истим условима, истиче течност два пута веће густине?

(б) Ако се на излазни отвор прикачи цев дужине $H/2$, слика 50 (б), за колико се промени време пражњења резервоара? Занемарити време пражњења додате цеви. Вредност коефицијента протока након додавања цеви износи $\mu_2 = 0{,}5$.

Решење:
а) $T_1 = 809{,}2\,\mathrm{s}, \quad T \neq f(\rho)$
б) $T_2 = 519{,}4\,\mathrm{s} \quad \Rightarrow \quad \Delta T = 289{,}8\,\mathrm{s}$

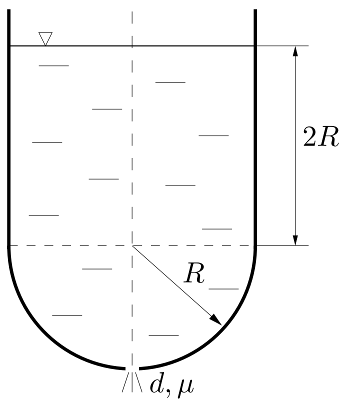


Слика 50

---

74. На слици 51 је приказан цилиндрични резервоар са полусферним дном полупречника $R = 1\,\mathrm{m}$. Резервоар је отворен ка атмосфери. Вода истиче кроз мали отвор на дну пречника $d = 30\,\mathrm{mm}$ и коефицијента протока $\mu = 0{,}62$. Одредити време пражњења резервоара.

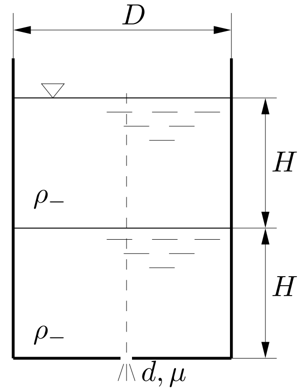
Решење:
$T_1 = 2369\,\mathrm{s}$
$T_2 = 1510{,}5\,\mathrm{s}$
$T = 3879{,}5\,\mathrm{s}$



Слика 51

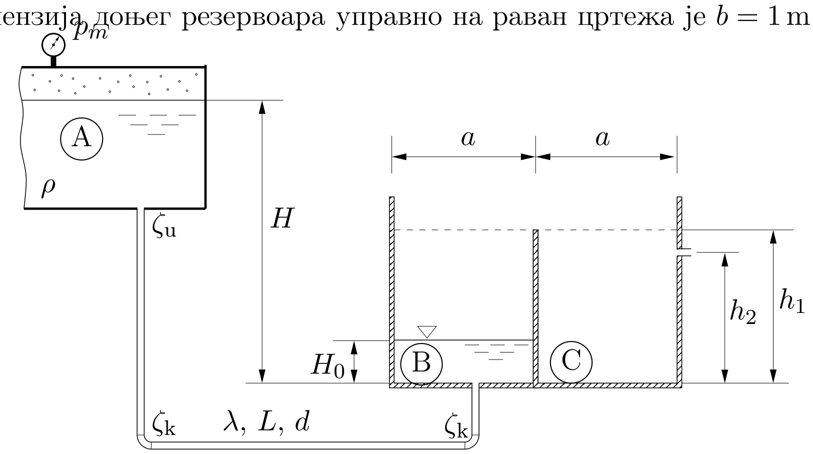
75. На слици 52 је приказан цилиндрични резервоар пречника $D = 1\,\mathrm{m}$ у којем се налазе две течности које се не мешају. Означити распоред течности у резервоару ако су њихове густине $\rho_1 = 1000\,\mathrm{kg/m^3}$ и $\rho_2 = 800\,\mathrm{kg/m^3}$. Одредити време које је потребно да се потпуно испразни резервоар ако се пражњење врши кроз отвор на дну пречника $d = 40\,\mathrm{mm}$ и коефицијента протока $\mu = 0{,}62$. Позната је вредности висине $H = 0{,}8\,\mathrm{m}$.

Решење:
$T_1 = 182{,}07\,\mathrm{s}$
$T_2 = 407{,}1\,\mathrm{s}$
$T = 589{,}17\,\mathrm{s}$



Слика 52

76. У великом горњем резервоару А се налазе вода и ваздух под натпритиском $p_m = 0{,}1\,\mathrm{bar}$. Вода из горњег резервоара прелази у доњи резервоар кроз цевовод дужине $L = 5\,\mathrm{m}$ и пречника $d = 50\,\mathrm{mm}$. Вода најпре улази у комору B, а затим се из ове коморе прелива у комору C. Одредити време после ког ће вода почети да истиче из коморе C кроз бочни отвор који се налази на висини $h_2 = 0{,}8\,\mathrm{m}$ (слика 53). У почетном тренутку ниво воде у комори B је $H_0 = 0{,}2\,\mathrm{m}$. Познати су и следећи подаци: $H = 2\,\mathrm{m}$, $h_1 = 1\,\mathrm{m}$, $a = 0{,}9\,\mathrm{m}$, $\rho = 1000\,\mathrm{kg/m^3}$, $\lambda = 0{,}02$, $\zeta_\mathrm{u} = 0{,}3$, $\zeta_\mathrm{k} = 0{,}4$. Димензија доњег резервоара управно на раван цртежа је $b = 1\,\mathrm{m}$.



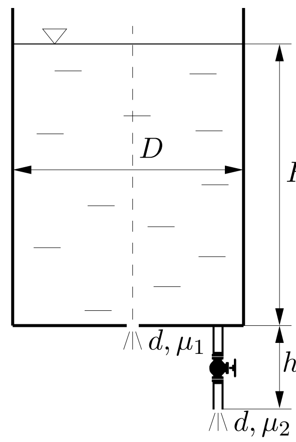
Решење:
$T_1 = 108{,}15\,\mathrm{s}$
$T_2 = 117{,}96\,\mathrm{s}$
$T = 226{,}11\,\mathrm{s}$

Слика 53

77. На слици 54 је приказан цилиндрични резервоар пречника $D = 1\,\mathrm{m}$, који је до висине $H = 2\,\mathrm{m}$ испуњен водом.

(а) Одредити време пражњења резервоара ако вода истиче **само** кроз отвор на средини дна резервоара, пречника $d = 30\,\mathrm{mm}$ и коефцијента протока $\mu_1 = 0{,}62$ (вентил је затворен).

(б) Дефинисати интегралну једначину (интеграл са одређеним границама) чијим се решавањем добија време пражњења резервоара у случају да течност истовремено истиче кроз средишњи отвор и кроз кратку цев, познатог коефицијента протока μ_2. Сматрати познатим и висину h.



Слика 54

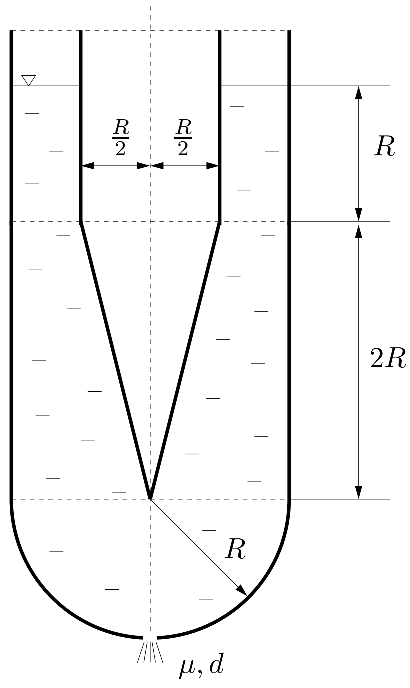
Решење:

(а) $T_1 = 1144{,}6\,\mathrm{s}$

(б) За средишњи отвор се везује координата z, а за излазни пресек цеви координата y. Са слике се може видети да је веза координата следећа: $y = z + h$.

$$T_2 = \frac{D^2}{d^2\sqrt{2g}} \int_0^H \frac{1}{\mu_1\sqrt{z} + \mu_2\sqrt{h+z}}\mathrm{d}z$$

78. Резервоар приказан на слици 58 је симетричан у односу на вертикалну осу. Празни се кроз мали отвор на дну коефицијента протока $\mu = 0{,}62$ и пречника $d = 30\,\mathrm{mm}$. Ако је $R = 1\,\mathrm{m}$ одредити време пражњења резервоара. (20%)

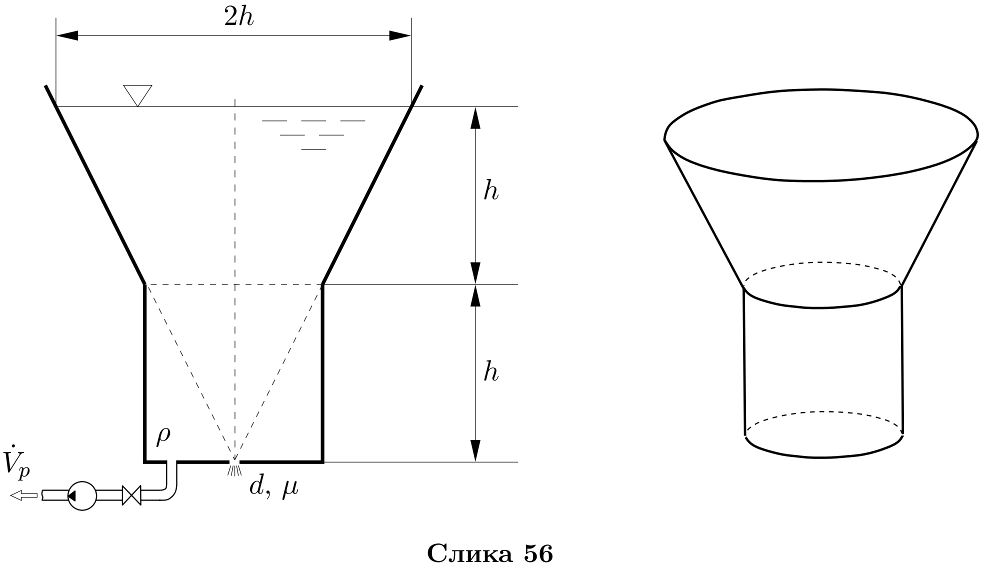


Слика 55

79. Осносиметрични резервоар приказан на слици 58 се састоји од конусног и цилиндричног дела. Резервоар има мали отвор на дну, пречника $d = 30\,\mathrm{mm}$ и коефицијента протока $\mu = 0{,}6$, који је све време отворен ка атмосфери. Поред њега, резервоар има још један отвор, на који се наставља цевовод са пумпом. На слици је означен ниво воде у почетном тренутку. Током пражњења конусног дела резервоара, пумпа је угашена, а вентил испред ње је затворен.

У тренутку када се испразни конусни део и када почне пражњење цилиндричног дела, вентил се отвара и пумпа се покреће. Пумпа извлачи воду из резервоара константним запреминским протоком од $\dot{V}_p = 1\,\mathrm{lit/s}$.

Одредити укупно време пражњења резервоара ако је $h = 1\,\mathrm{m}$.



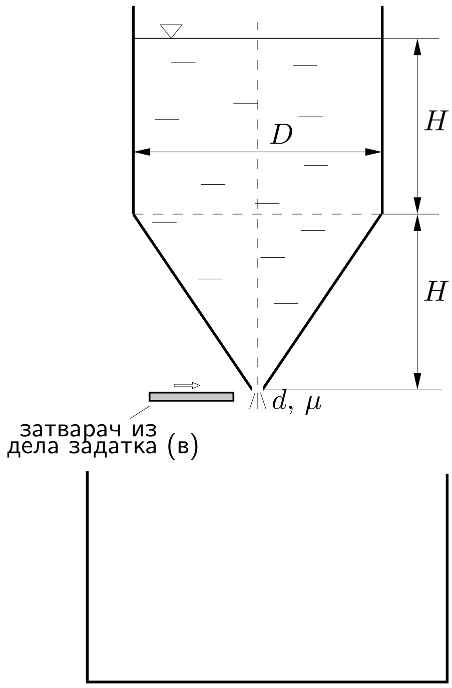
Слика 56

80. Горњи резервоар са слике 58 се састоји од цилиндричног и конусног дела. Испуњен је водом и празни се кроз мали отвор на дну, пречника $d = 30\,\mathrm{mm}$ и коефицијента протока $\mu = 0{,}62$. Након што вода изађе у атмосферу, она се скупља се у доњем резервоару, који је смештен испод. Ако су познате вредности $D = 550\,\mathrm{mm}$ и $H = 400\,\mathrm{mm}$, одредити:

(а) Време пражњења цилиндричног дела горњег резервоара;

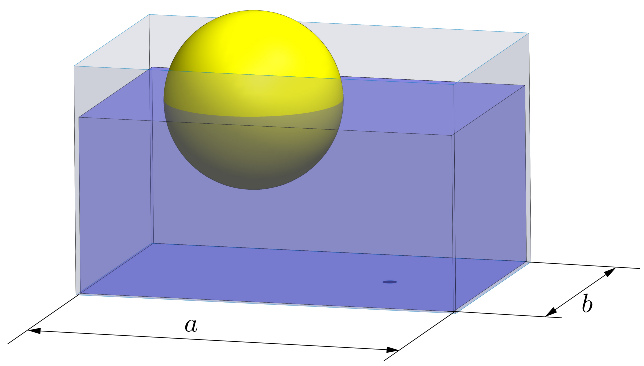
(б) Где се налази ниво воде пола минута ($t_x = 30\,\mathrm{s}$) након почетка истицања;

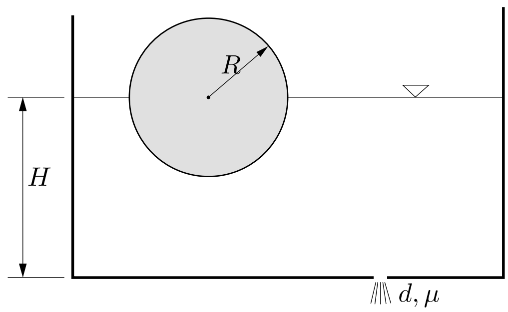
(в) Отвор на горњем резервоару (отвор пречника d) се затвара онда када се у доњем резервоару скупи $V_{\mathrm{zat}} = 110\,\mathrm{lit}$ воде. Где се у том тренутку налази ниво воде у горњем резервоару? Колико је времена прошло од почетка истицања до тренутка затварања?



Слика 57

81. У резервоару правоугаоног попречног пресека ($a = 4\,\mathrm{m}$, $b = 3\,\mathrm{m}$) налази се лопта полупречника $R = 1\,\mathrm{m}$, која је до половине потпољена у воду (слика 58). У почетном тренутку ниво воде у резервоару је $H = 3\,\mathrm{m}$. Вода истиче кроз мали отвор на дну пречника $d = 40\,\mathrm{mm}$ и коефицијента отпора $\mu = 0{,}62$. Одредити време истицања воде из резервоара.





Слика 58