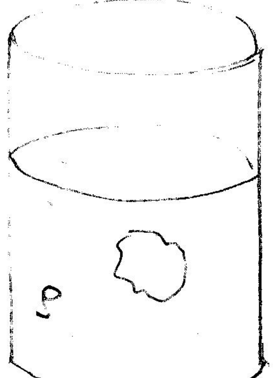
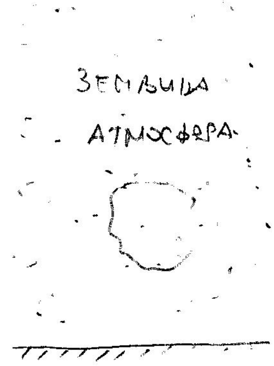
3. МИРОВАЊЕ ФЛУИДА

3.1 Ојлерова једначина мировања флуида

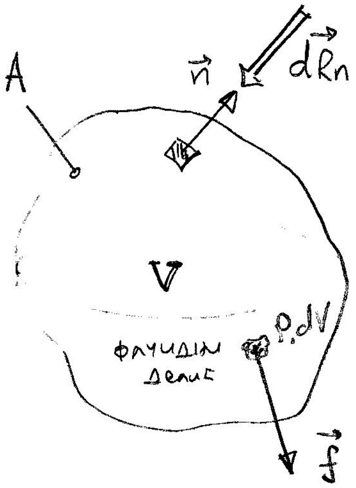


или



или Било који систем у коме флуид мирује

Произвољно изабрана запремина у којој се налази флуид



Услов равнотеже издвојеног дела флуида:

$$\vec R_m + \vec R_n = 0$$

$$\iiint_V \rho \vec f \, dV + \oiint_A - p\vec n \, dA = 0$$

Теорема Гаус-Остроградског:

$$\oiint_A p\vec n \, dA = \iiint_V \nabla p \, dV \equiv \iiint_V \mathrm{grad}\, p \, dV$$

$$\nabla = \vec i \frac{\partial}{\partial x} + \vec j \frac{\partial}{\partial y} + \vec k \frac{\partial}{\partial z}$$ – набла (Хамилтонов) оператор

векторско-диференцијални оператор

$$\nabla f \equiv \mathrm{grad} f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec i + \frac{\partial f}{\partial y}\vec j + \frac{\partial f}{\partial z}\vec k$$ – градијент скаларног поља f.

Из једначине равнотеже даље следи:

$$\iiint_V \rho \vec f \, dV - \iiint_V \mathrm{grad}\, p \, dV \Rightarrow \iiint_V (\rho \vec f - \mathrm{grad}\, p) \, dV = 0 \quad (1)$$

Како је запремина V произвољна изабрана, онда је израз (1) једнак нули једино ако је подинтегрална функција једнака нули. Следи:

$$\boxed{\rho \vec f = \mathrm{grad}\, p}$$

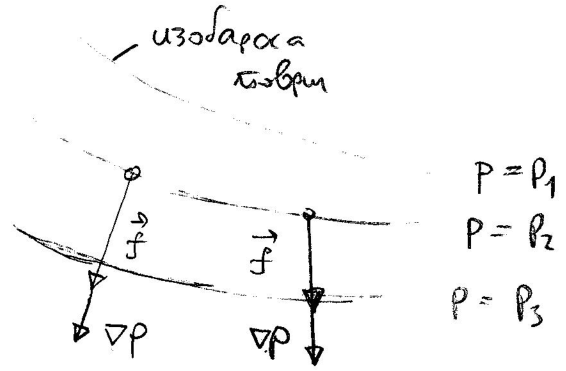
Ојлерова једначина (векторско диференцијални облик)

Основни задатак статике флуида:

За задато поље масених сила и поље густине одредити расподелу (поље) притиска.

$$\to \quad \operatorname{grad} p = \underbrace{\rho \vec{f}}_{}$$

познате тј. задате величине!

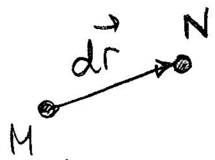


ИЗОБАРСКЕ ПОВРШИ – површи константног притиска

– $\operatorname{grad} p \perp$ изобарску површ у свакој њеној тачки

– $\operatorname{grad} p$ показује смер највеће промене притиска

– $\operatorname{grad} p$ и $\vec{f}$ су КОЛИНЕАРНИ ВЕКТОРИ



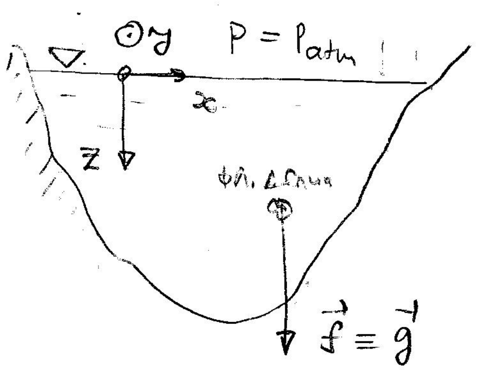
$$\nabla p = \rho \vec{f} \, / \cdot \, d\vec{r} \, , \qquad d\vec{r} = dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j} + dz\,\vec{k}$$

$$\nabla p \cdot d\vec{r} = \rho \vec{f} \cdot d\vec{r}$$

Две блиске тачке у пољу $\to$ $\boxed{dp = \rho(f_x\,dx + f_y\,dy + f_z\,dz)}$

скаларно-диференцијални облик Ојлерове јдн.

3.2 Мировање нестишљивог, хомогеног флуида у пољу силе Земљине теже



$$\rho = \text{const.} \; ; \quad f_x = f_y = 0 \, , \quad f_z = g$$

$$dp = \rho g\,dz \to \int dp = \int \underbrace{\rho g}_{= \text{const.}} dz + C$$

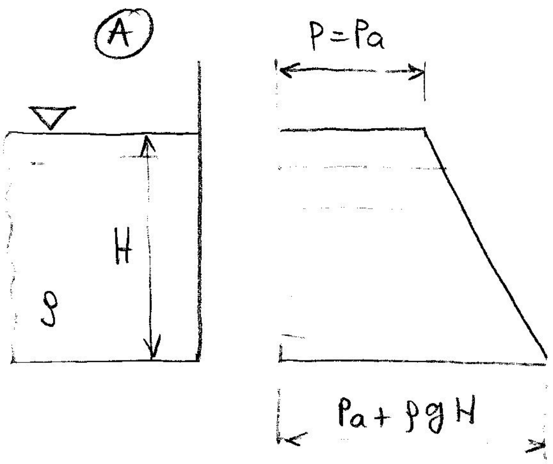
$$\boxed{p = \rho g z + C}$$ ... опште решење расподеле притиска

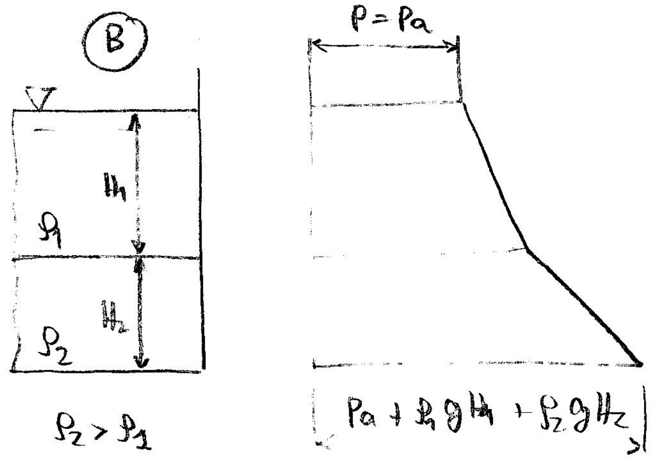
Константа C се одређује из граничних услова.

За случај са слике: $z = 0$: $p = p_{atm} \to C = p_a$

$\to \quad p = p_a + \rho g z$; Ову расподелу притиска називамо ХИДРОСТАТИЧКА расподела p.

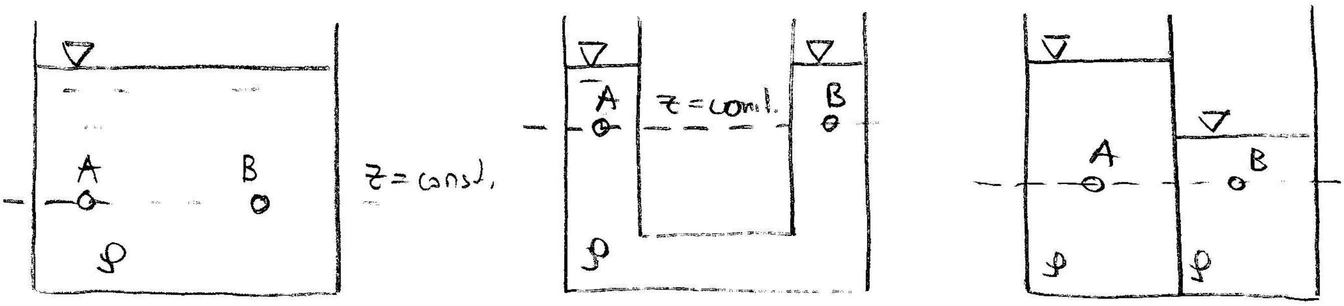
* Притисак ЛИНЕАРНО расте са дубином (координатом z)
* Изобарске површи су ХОРИЗОНТАЛНЕ РАВНИ ($z = \text{const.}$)





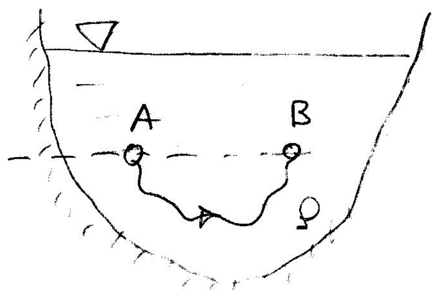
Расподеле хидростатичког притиска у резервоарима

Изобарске површи – хоризонталне равни



$p_A = p_B$ $\qquad$ $p_A = p_B$ $\qquad$ $p_A \neq p_B$!

Услови хидростатичке равнотеже (једнакости притисака на хоризонталној равни $z = const.$)

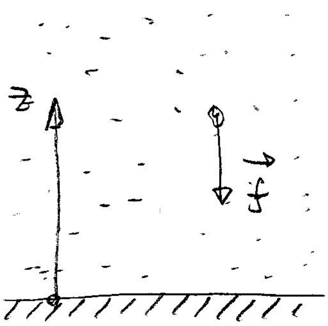


(1) $z_A = z_B$

(2) $\rho_A = \rho_B$

(3) Из тачке A у тачку B може се доћи крећући се искључиво кроз течност исте густине као у тачки A

3.3 Мировање стишљивог флуида у пољу силе Земљине теже



Поље масених сила: $f_x = f_y = 0, \quad f_z = -g$

$\rightarrow \boxed{dp = -\rho g dz}$, при чему $\rho \neq const.$

Претпоставка: гас (ваздух) се понаша као идеалан гас.

$\rightarrow \quad p = \rho R T$

$$\left.\begin{aligned} dp &= -\rho g\, dz \\ p &= \rho R T \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{\frac{dp}{p} = -\frac{g\, dz}{RT}}$$ ... Полазна једначина (неопходно је знати расподелу T)

(1) Нека је $T = const.$ (изотермски случај)

$$\int_{p_0}^{p} \frac{dp}{p} = -\frac{g}{RT}\int_{z_0=0}^{z} dz \rightarrow \ln\left(\frac{p}{p_0}\right) = -\frac{gz}{RT_0}$$

$$\rightarrow p = p_0\, e^{-\frac{gz}{RT_0}} \iff \boxed{p = p_0 \exp\left(-\frac{gz}{RT_0}\right)}$$

ЕКСПОНЕНЦИЈАЛНА ЗАВИСНОСТ

(2) Адијабатски случај: $p\rho^{-\varkappa} = const.$

$$p_0 \rho_0^{-\varkappa} = p\rho^{-\varkappa} \rightarrow \frac{p_0}{\rho_0^{\varkappa}} = \frac{p}{\rho^{\varkappa}} \rightarrow \rho = \rho_0\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{1}{\varkappa}}$$

$$\rightarrow dp = -\rho_0\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{1}{\varkappa}} g\, dz \rightarrow \frac{1}{\rho_0 g}\left(\frac{p_0}{p}\right)^{1/\varkappa} dp = -dz$$

$$\frac{p_0^{1/\varkappa}}{\rho_0 g}\int_{p_0}^{p} p^{-1/\varkappa}\, dp = -\int_0^z dz \rightarrow \frac{p_0^{1/\varkappa}}{\rho_0 g}\left.\frac{p^{-\frac{1}{\varkappa}+1}}{-\frac{1}{\varkappa}+1}\right|_{p_0}^{p} = -z$$

$$\frac{p_0^{1/\varkappa}}{\rho_0 g}\left.\frac{p^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}}{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}\right|_{p_0}^{p} = -z \rightarrow \frac{\varkappa}{\varkappa-1}\frac{p_0^{1/\varkappa}}{\rho_0 g}\left(p^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}} - p_0^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}\right) = -z$$

$$\frac{\varkappa}{\varkappa-1}\frac{p_0^{1/\varkappa}}{\rho_0 g}\, p_0^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}\left[1 - \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}\right] = z$$

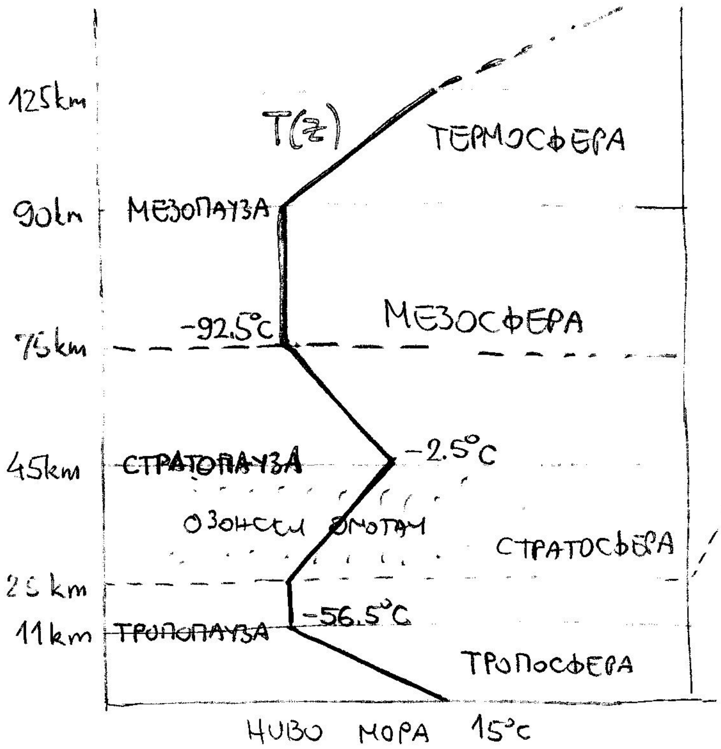
$$1 - \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}} = \frac{\varkappa}{\varkappa-1}\frac{\rho_0 g z}{p_0} \rightarrow \boxed{p = p_0\left[1 - \frac{\varkappa}{\varkappa-1}\frac{\rho_0 g z}{p_0}\right]^{\frac{\varkappa}{\varkappa-1}}}$$

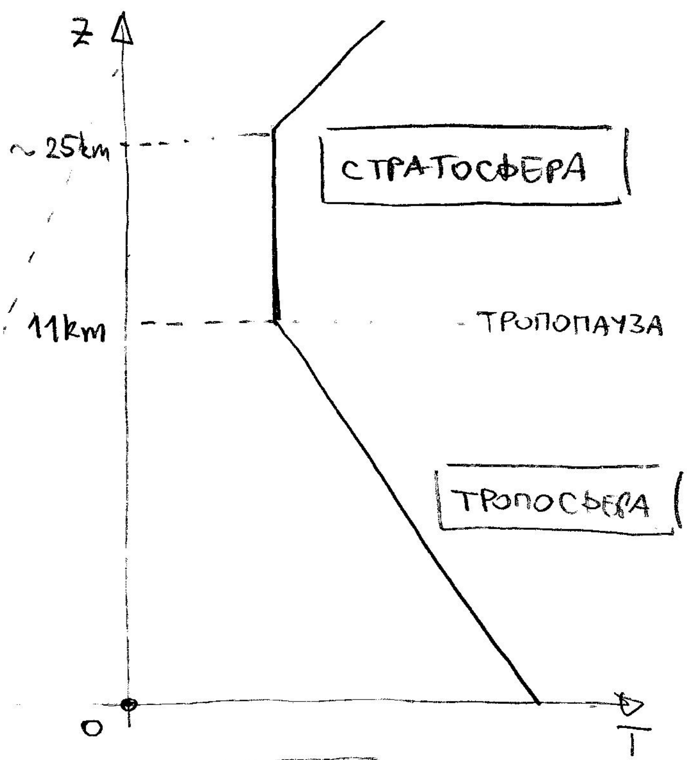
СТЕПЕНА ЗАВИСНОСТ

Ова зависност се може написати и у облику:

$$p = p_0\left[1 - \frac{\varkappa}{\varkappa-1}\frac{gz}{RT_0}\right]^{\frac{\varkappa}{\varkappa-1}} \xrightarrow[T_0 = 288K]{\text{ВАЗДУХ}} p = p_0\left(1 - 4{,}154\cdot 10^{-4} z\right)^{3{,}5}$$

Интернационална стандардна атмосфера:





> Felix Baumgartner – скок са висине 38 969,3 m
> (11. октобар 2012.)

Расподела температуре у стратосфери: $T = T_0 - \gamma z$

$$\gamma = 6.5 \cdot 10^{-3} \frac{K}{m} = 6.5 \frac{K}{km}$$

p_0, T_0 – стандардни услови на НИВОУ МОРА

Диференцијална једначина: $\frac{dp}{p} = -\frac{g\,dz}{RT}$

Тропосфера: $\frac{dp}{p} = -\frac{g\,dz}{(T_0 - \gamma z)R} \rightarrow \int_{p_0}^{p} \frac{dp}{p} = -\frac{g}{R}\int_0^z \frac{dz}{T_0 - \gamma z}$

$$\ln\left(\frac{p}{p_0}\right) = +\frac{g}{R\gamma}\int_0^z \frac{d(T_0 - \gamma z)}{T_0 - \gamma z} \Rightarrow \ln\left(\frac{p}{p_0}\right) = \frac{g}{\gamma R}\ln(T_0 - \gamma z)\Big|_0^z$$

$$\ln\left(\frac{p}{p_0}\right) = \frac{g}{\gamma R}\left[\ln(T_0 - \gamma z) - \ln T_0\right] = \frac{g}{\gamma R}\ln\left(\frac{T_0 - \gamma z}{T_0}\right)$$

$$\rightarrow \ln\left(\frac{p}{p_0}\right) = \ln\left[\left(1 - \frac{\gamma z}{T_0}\right)^{\frac{g}{\gamma R}}\right] \rightarrow \boxed{p = p_0\left(1 - \frac{\gamma z}{T_0}\right)^{\frac{g}{\gamma R}}}$$

Степени закон расподеле

Стандардни услови

$p_0 = 101325\,Pa$, $T_0 = 288\,K$

Део стратосфере у којој је $T = \text{const.}$ $(t = -56{,}5^\circ C)$:

$$\int_{p_s}^{p} \frac{dp}{p} = -\frac{g}{RT} \int_{z_s}^{z} dz \rightarrow \boxed{p = p_s \exp\left[-\frac{g(z - z_s)}{RT_0}\right]}$$

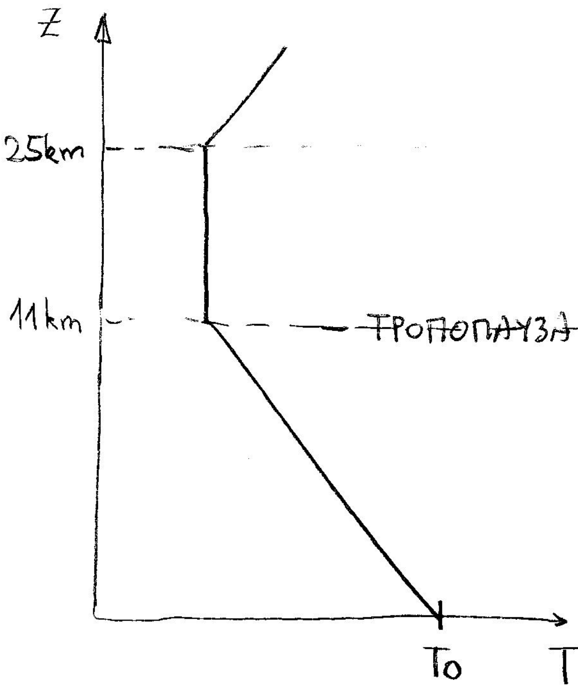
експоненцијални закон

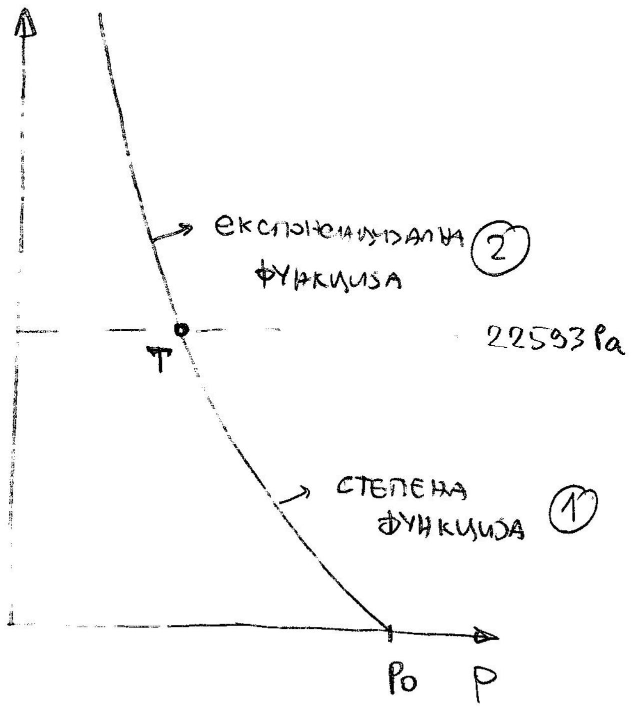
p_s − притисак на месту на коме почиње стратосфера

z_s − висина на којој почиње стратосфера

$$\rightarrow \quad p_s = p_0 \left(1 - \frac{\gamma z_s}{T_0}\right)^{\frac{g}{\gamma R}} \quad ; \quad z_s = 10 - 11 \text{ km}$$

(опсег z_s, зависно од литературе)





$$p_s = 101325 \left(1 - \frac{6.5 \cdot 10^{-3} \cdot 11 \cdot 10^{3}}{288}\right)^{\frac{9.81}{6.5 \cdot 10^{-3} \cdot 287}} \rightarrow \boxed{p_s = 22593 \text{ Pa}}$$

Степена функција у тропосфери и експоненцијална функција расподеле притиска у стратосфери се глатко спајају на месту тропопаузе.

Глатко спајање − једнаке вредности функција (1) и (2), као и њихових извода у тачки Т

Развој функције $p(z)$ у околини тачке $z_0 = 0$:

$$p(z) = p(0) + \left(\frac{dp}{dz}\right)_{z=0} z + \left(\frac{d^2p}{dz^2}\right)_{z=0} \frac{z^2}{2!} + \left(\frac{d^3p}{dz^3}\right) \frac{z^3}{3!} + \dots$$

Расподела притиска у тропосфери:

$$p(z) = p_0\left(1-\frac{\gamma z}{T_0}\right)^{\frac{g}{\gamma R}} \rightarrow \frac{dp}{dz} = -\frac{p_0 g}{\gamma R}\,\frac{\cancel{\gamma}}{T_0}\left(1-\frac{\gamma z}{T_0}\right)^{\frac{g}{\gamma R}-1}$$

$$\frac{dp}{dz} = -\frac{p_0 g}{R T_0}\left(1-\frac{\gamma z}{T_0}\right)^{\frac{g}{\gamma R}-1} \rightarrow \left(\frac{dp}{dz}\right)_{z=0} = -\frac{p_0 g}{R T_0} = -\rho_0 g$$

ρ_0 - густина на нивоу мора

$$\rho_0 = \frac{p_0}{R T_0} = \frac{101325}{287 \cdot 288} \rightarrow \rho_0 = 1.226\,kg/m^3$$

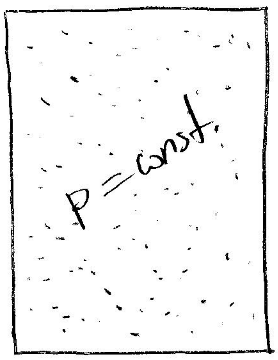
За мале вредности z можемо занемарити чланове вишег реда у Тејлоровом реду и писати.

$$p(z) \approx p_0 - \rho g z \rightarrow \text{хидростатичка расподела притиска}$$

Ова зависност је иста између било које две блиске тачке 1 и 2

$$p_2 = p_1 - \rho g(z_2 - z_1), \quad \text{при чему је још и} \quad p_1 \gg \rho g(z_2 - z_1)$$

Заменимо вредности g, T_0 и R и $\varkappa$ за ваздух:



ТЕХНИЧКИ СИСТЕМ (резервоар)

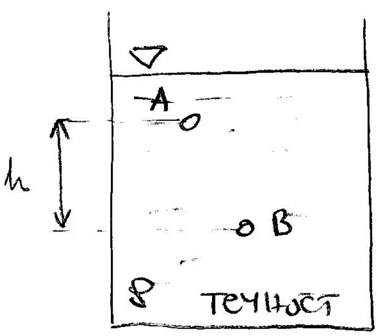
ИЗОТЕРМСКИ СЛУЧАЈ: $p = p_0\, e^{-1.2\cdot 10^{-4} z}$

АДИЈАБАТСКИ СЛУЧАЈ: $p = p_0\left(1 - 4.154\cdot 10^{-4} z\right)^{3.5}$

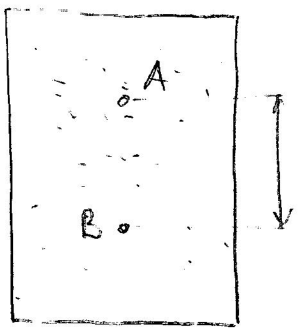
ТРОПОСФЕРА: $p = p_0\left(1 - 2.257\cdot 10^{-5} z\right)^{5.259}$

За вредности z које срећемо у техничким системима можемо сматрати (ПОТПУНО ОПРАВДАНО) да је поље притиска ХОМОГЕНО!

Исто важи за густину и температуру



$p_B = p_A + \rho g h$



$$\boxed{p_B = p_A}$$

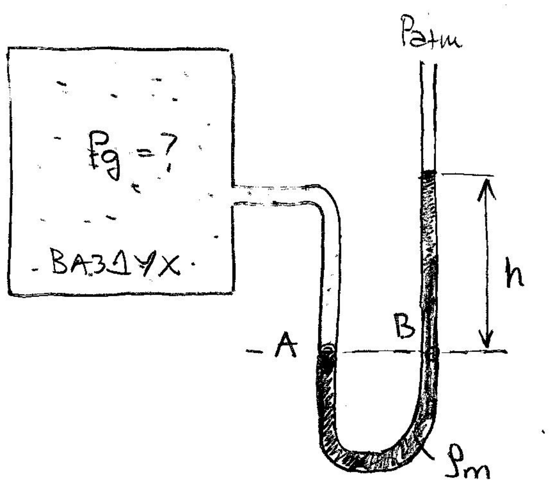
p_A

$$p_B = p_A + \underbrace{\cancel{\rho g h}}_{\ll p_A}$$

$\rho_{vode} = 1000\,kg/m^3$

$\rho_{vazd} = 1.2\,kg/m^3$

Пример: Одредити притисак који влада у резервоару у коме се налази ваздух.

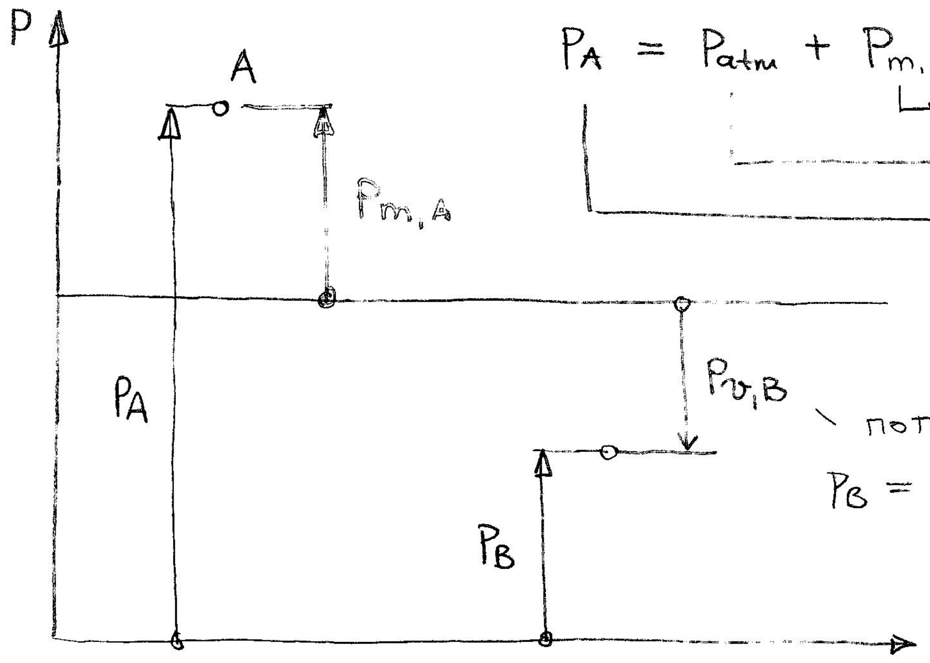


$$p_A = p_B$$

$$\boxed{p_g = p_{atm} + \rho_m g h}$$

У *свим* практичним проблемима мировања флуида може се потпуно оправдано сматрати да је поље притиска хомогено!

Дефиниције натпритиска и потпритиска



$$p_A = p_{atm} + p_{m,A}$$

$p_{m,A}$ → натпритисак у тачки A

p_{atm} → атмосферски притисак

p_A → апсолутни притисак

$p_{v,B}$ – потпритисак

$$p_B = p_{atm} - p_{v,B}$$

$$(p_{v,B} > 0)$$

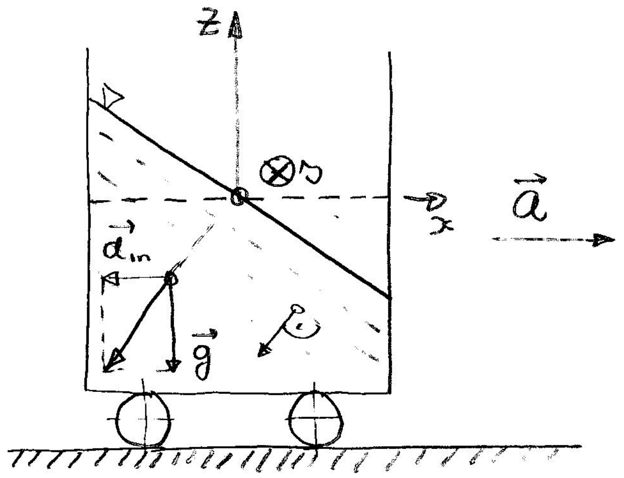
Притисак је скаларна физичка величина која је увек позитивна.

$p = 0$ ... ВАКУУМ

СЛЕДЕ ПРОБЛЕМИ ИЗ ОДРЕЂИВАЊА ХИДРОСТАТИЧКОГ ПРИТИСКА

3.4. Поље притиска при релативном мировању флуида

(а) Суд са течношћу који се креће транслаторно константним убрзањем



У односу на координатни систем који је везан за суд, течност се налази у стању мировања.
На флуидни делић, поред јединичне силе гравитације делује и јединична инерцијална сила

$$\vec{a}_{in} = -\vec{a}$$

Ојлерова једначина (важи у покретном координатном систему):

$$\operatorname{grad} p = \rho \vec{f} \iff \operatorname{grad} p = \rho\left(\vec{g} + \vec{a}_{in}\right); \quad \vec{f} = \vec{g} + \vec{a}_{in}$$

$$f_x = -a, \quad f_y = 0, \quad f_z = -g$$

Скаларни облик Ојлерове једначине: $dp = -\rho\left(a\,dx + g\,dz\right)$

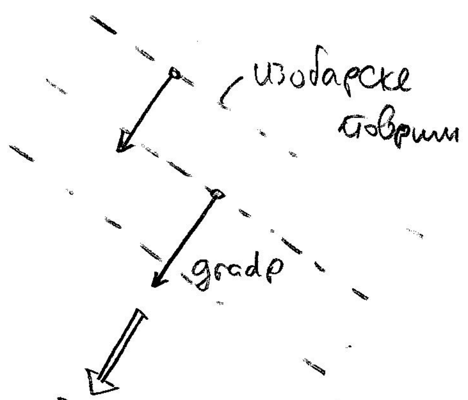
$\rightarrow \; p = -\rho a x - \rho g z + C$; Гранични услов: $x=0, z=0: p = p_{atm}$

$\rightarrow C = p_{atm}$

$$\rightarrow \boxed{p = p_{atm} - \rho a x - \rho g z}$$

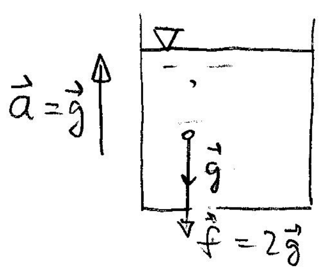
Притисак је линеарна функција координата x и z.

Једначина слободне површи ($p = p_{atm}$) : $\boxed{z = -\dfrac{a}{g} x}$

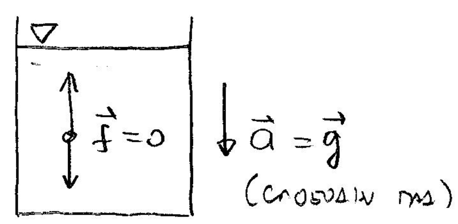


$$\vec{f} = \vec{g} + \vec{a}_{in} = \vec{g} - \vec{a}$$

Неки карактеристични случајеви



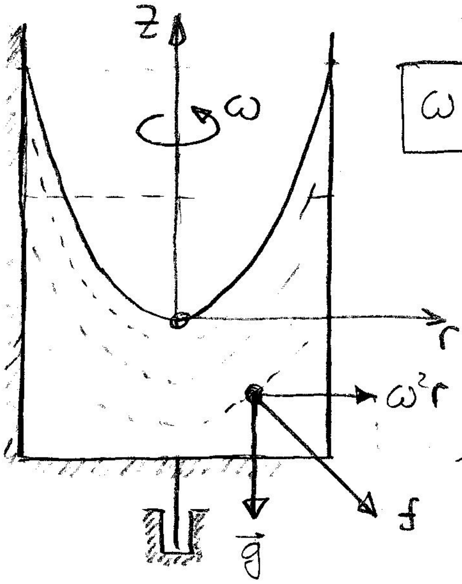
$$\nabla p = 2\vec{g}$$



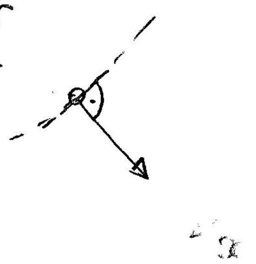
$$\nabla p = 0$$

$$p = const.$$

(б) СУД СА ТЕЧНОШЋУ КОЈИ РОТИРА КОНСТАНТНОМ УГАОНОМ БРЗИНОМ



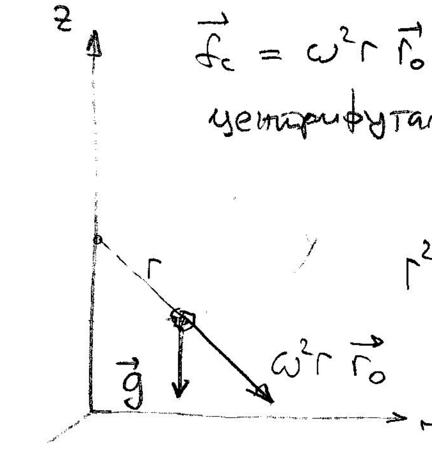
$$\boxed{\omega = const.}$$



$\vec{f_c} = \omega^2 r \vec{r_0}$

центрифугална сила

$r^2 = x^2 + y^2$



$\vec{f} = \vec{g} + \vec{f_c}$

$\vec{f_c} = f_{cx}\vec{i} + f_{cy}\vec{j} = \omega^2 x\vec{i} + \omega^2 y\vec{j}$

Пројекције вектора јединичне масене силе: $f_x = \omega^2 x$, $f_y = \omega^2 y$, $f_z = -g$

Ојлерова једначина: $dp = \rho(f_x dx + f_y dy + f_z dz)$

$dp = \rho(\omega^2 x\,dx + \omega^2 y\,dy - g\,dz) \rightarrow p = \frac{1}{2}\rho\omega^2(x^2+y^2) - \rho g z + C$

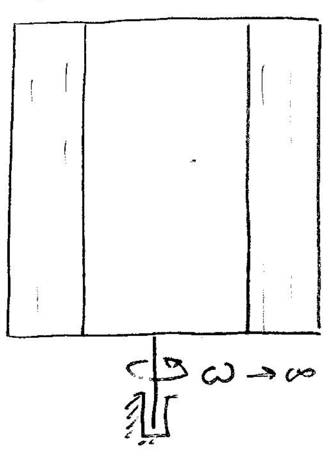
$\Rightarrow \boxed{p = \frac{1}{2}\rho\omega^2 r^2 - \rho g z + C}$ Изобарске површи су ОБРТНИ ПАРАБОЛОИДИ

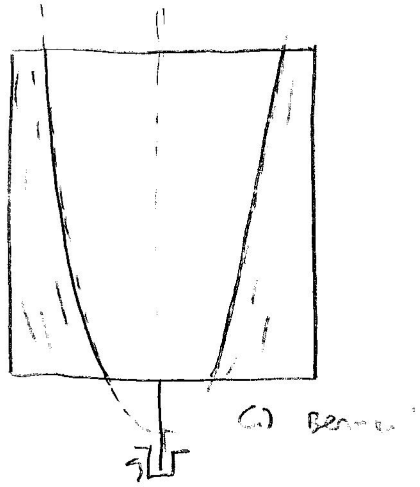
Гранични услов: $r=0,\ z=0:\ p = p_{atm} \Rightarrow C = p_{atm}$

$$\boxed{p = p_a + \frac{1}{2}\rho\omega^2 r^2 - \rho g z}$$

Једначина слободне површи $p = p_{atm} \rightarrow \boxed{z = \frac{\omega^2}{2g} r^2}$

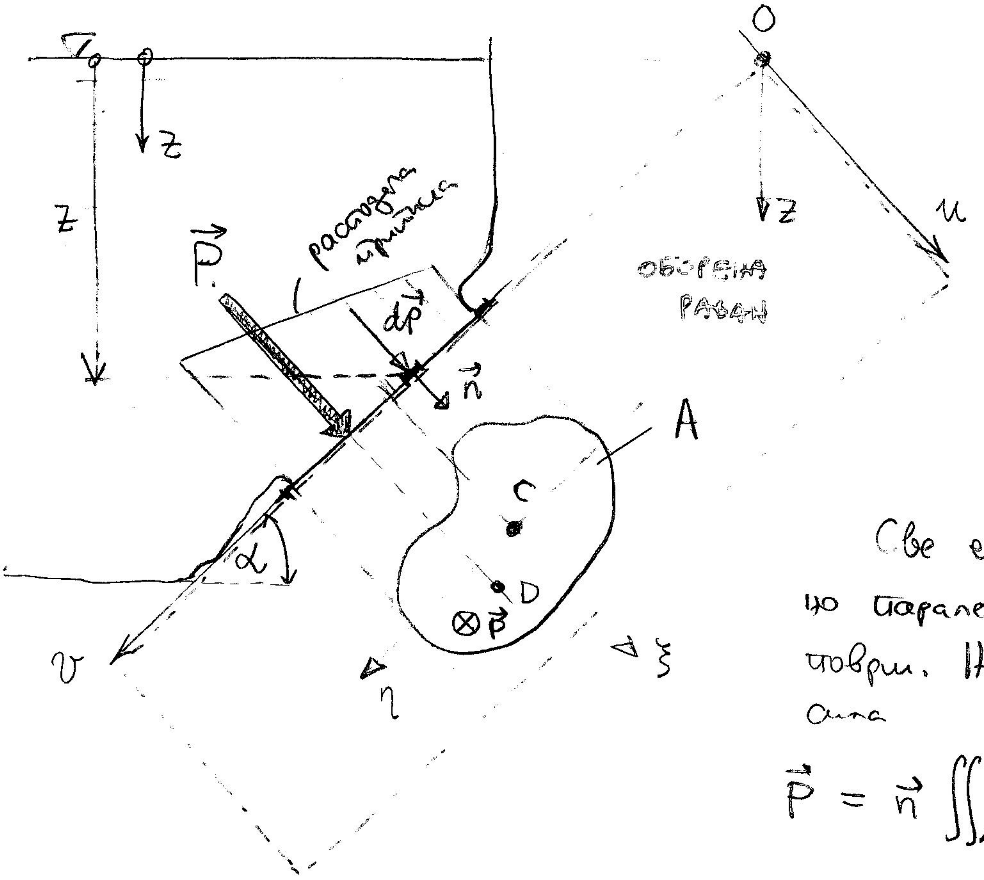
Притисак ЛИНЕАРНО расте са дубином, и са квадратом растојања од осе обртања.

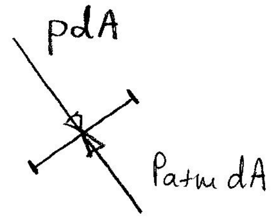




3.5 СИЛА ПРИТИСКА НА РАВНУ ПОВРШ

У случају статике стање напона се своди на притисак, па се и површинска сила своди на СИЛУ ПРИТИСКА.





$$d\vec{P} = (p - p_{atm})\,\vec{n}\,dA$$

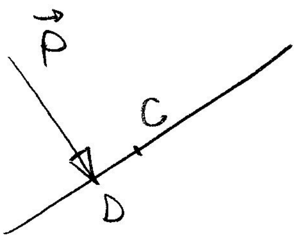
елементарна сила притиска која делује на елементарни део поклопца

Све елементарне силе су међусобно паралелне, и УПРАВНЕ на раван површи. Нас занима резултујућа сила

$$\vec{P} = \vec{n}\iint_A (p - p_{atm})\,dA$$

ВАЖНО: векторско поље $\vec{n}$ је ХОМОГЕНО, тј. $\vec{n}$ су истог правца и смера на површи

$$\rightarrow \quad \vec{P} = \vec{n}\iint_A \rho g z\,dA = \vec{n}\,\rho g \underbrace{\iint_A z\,dA}_{z_C A} \quad \rightarrow \quad \boxed{\vec{P} = (\rho g z_C A)\,\vec{n}}$$



D – нападна тачка силе притиска (ЦЕНТАР ПРИТИСКА) – због неравномерне расподеле притиска

z_C – координата тежишта површи

$\rho g z_C$ – хидростатички притисак у тежишту

$$p_C = p_{atm} + \rho g z_C \quad \rightarrow \quad \rho g z_C = p_C - p_a$$

$$\rightarrow \quad \boxed{P = (p_C - p_{atm})\,A}$$ – ова сила делује УПРАВНО на површ у тачки D

Одређивање тачке дејства силе притиска:

Варињонова теорема: Момент резултанте за неку тачку је једнак збиру момената сила која формирају ту резултанту.

$$\mathcal{M}_{O_u}(\vec{P}) = P v_D \qquad \mathcal{M}_{O_u}(d\vec{P}) = v\,dP = \rho g z v\, dA$$

Веза између координата: $z = v \sin\alpha$

$$\rightarrow \quad v_D \rho g z_c A = \rho g \sin\alpha \underbrace{\iint_A v^2 dA}_{I_u}$$

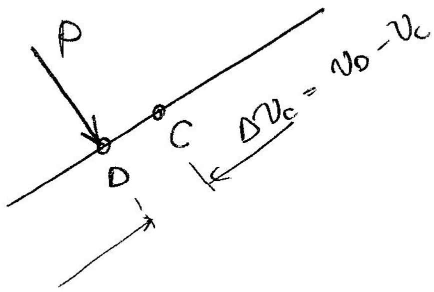
I_u – момент инерције у односу на осу u

$$v_D v_c \sin\alpha\, A = I_u \sin\alpha \quad \rightarrow \quad \boxed{v_D = \frac{I_u}{v_c A}}$$

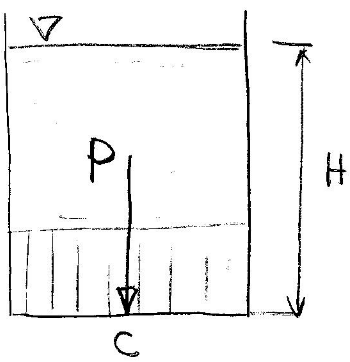
На основу Хајгенс-Штајнерове теореме: $I_u = I_{c\xi} + v_c^2 A$

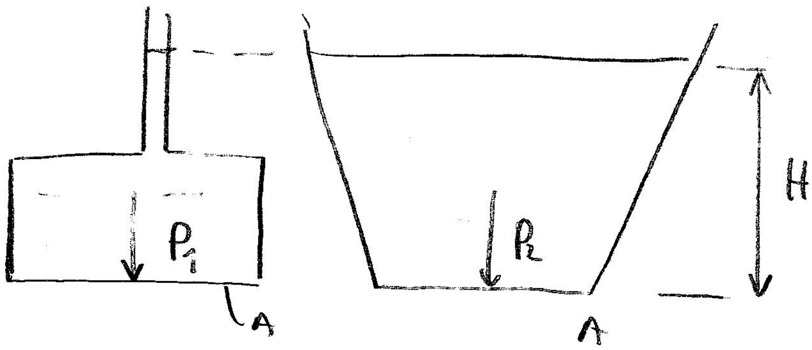
$$\rightarrow \quad \boxed{v_D - v_c = \frac{I_{c\xi}}{v_c A}} \quad \rightarrow \quad v_D - v_c = \frac{I_{c\xi}}{z_c A}\sin\alpha$$

$$\rightarrow \quad \boxed{\underbrace{v_D - v_c}_{\Delta v_c} = I_{c\xi}\frac{\rho g}{P}\sin\alpha}$$



Тачке C и D се поклапају ако је $\alpha = 0$ – хоризонтална површ





$P = \rho g H A$

Паскалов парадокс

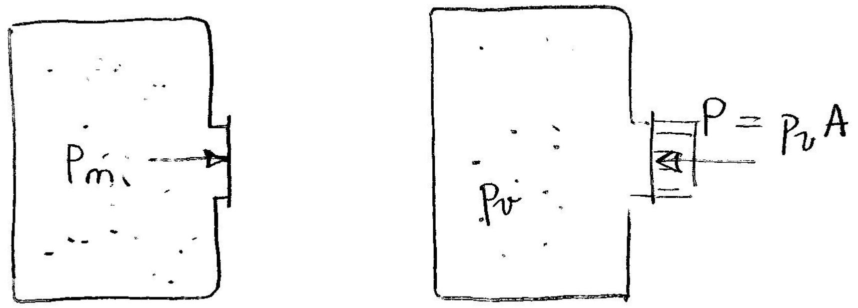
Сличном анализом (моментна једначина за осу $O\eta$) дошло би се до израза

$$u_D - u_C = \frac{I_{\xi\eta}}{v_C A} \rightarrow \Delta u_C = \frac{I_{\xi\eta}}{v_C A}$$

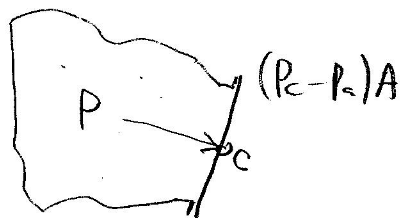
; $I_{\xi\eta}$ - центрифугални момент инерције

У случају да је површ симетрична у односу на неку од оса, онда ће $\Delta u_C = 0$. Обично је у већини проблема површ симетрична у односу на осу η.

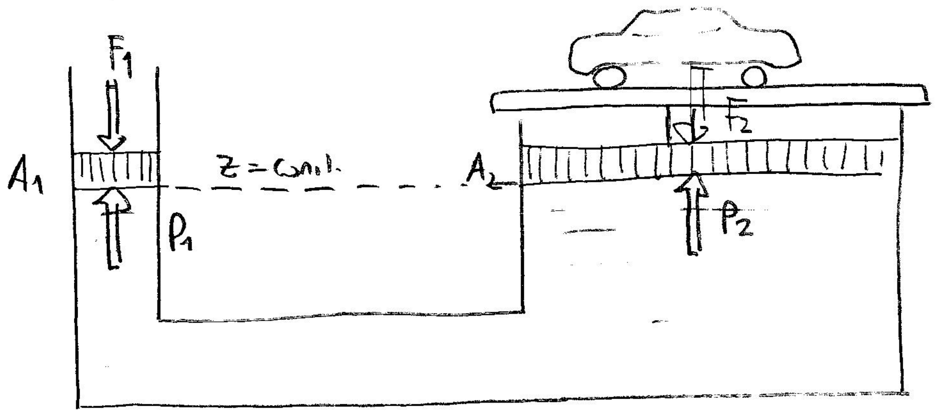
Сила притиска на равну површ у случају гаса



ако не знамо да ли је P_m или P_v



Принцип рада хидрауличке дизалице



$$F_1 = P_1$$

$$F_2 = P_2$$

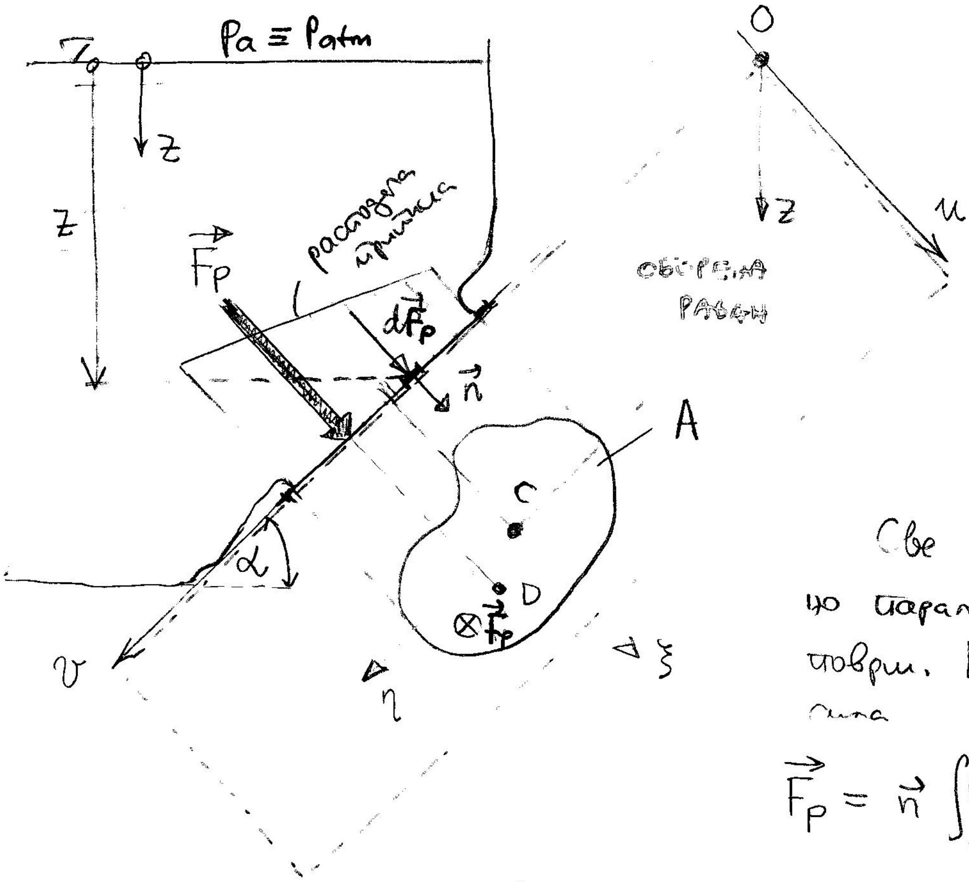
$$\frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2}$$

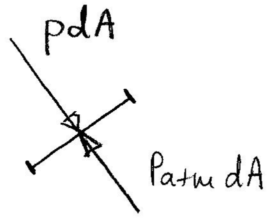
$$F_2 = F_1 \left(\frac{A_2}{A_1}\right)$$

СЛЕДЕ ПРОБЛЕМИ ИЗ ОДРЕЂИВАЊА СИЛЕ ПРИТИСКА НА РАВНУ ПОВРШ

3.5 СИЛА ПРИТИСКА НА РАВНУ ПОВРШ

У случају статике стање напона се своди на притисак, па се и површинска сила своди на СИЛУ ПРИТИСКА.





$$d\vec{F}_p = (p - p_{atm})\,\vec{n}\,dA$$

елементарна сила притиска која делује на елементарни део поклопца

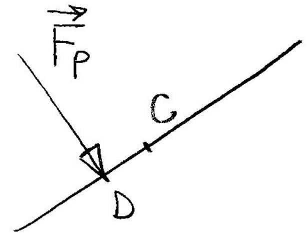
Све елементарне силе су међусобно паралелне, и УПРАВНЕ на равну површ. Нас занима резултујућа сила

$$\vec{F}_p = \vec{n} \iint_A (p - p_{atm})\,dA$$

ВАЖНО: векторско поље $\vec{n}$ је ХОМОГЕНО, тј. $\vec{n}$ су истог правца и смера на површи

$$\rightarrow \vec{F}_p = \vec{n} \iint_A \rho g z\,dA = \vec{n}\,\rho g \underbrace{\iint_A z\,dA}_{z_C A} \rightarrow \boxed{\vec{F}_p = (\rho g z_C A)\,\vec{n}}$$

↳ резултујућа сила је усмерена у правцу $\vec{n}$



D – нападна тачка силе притиска (ЦЕНТАР ПРИТИСКА) – због неравномерне расподеле притиска

z_C – координата тежишта површи

$\rho g z_C$ – хидростатички притисак у тежишту

$$p_C = p_{atm} + \rho g z_C \rightarrow \rho g z_C = p_C - p_a$$

$$\rightarrow \boxed{F_p = (p_C - p_{atm})\,A}$$ – ова сила делује УПРАВНО на површ у тачки D

Одређивање тачке дејства силе притиска.

Варињонова теорема: Момент резултанте за неку тачку је једнак збиру момената сила која формирају ту резултанту.

$$\mathcal{M}_{O_u}(\vec{F_p}) = F_p v_D \qquad \mathcal{M}_{O_u}(d\vec{F_p}) = v\,dP = \rho g z v\,dA$$

Веза између координата: $z = v\sin\alpha$

$$\rightarrow \quad v_D \rho g z_c A = \rho g \sin\alpha \underbrace{\iint_A v^2 dA}_{I_u}$$

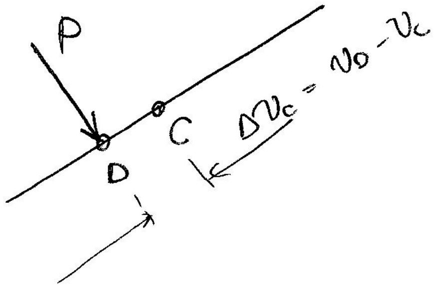
I_u – момент инерције у односу на осу u

$$v_D v_c \sin\alpha\, A = I_u \sin\alpha \quad \rightarrow \quad \boxed{v_D = \frac{I_u}{v_c A}}$$

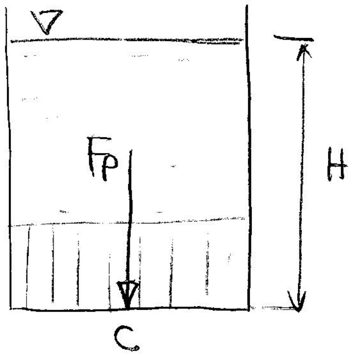
На основу Хајгенс-Штајнерове теореме: $I_u = I_{c\xi} + v_c^2 A$

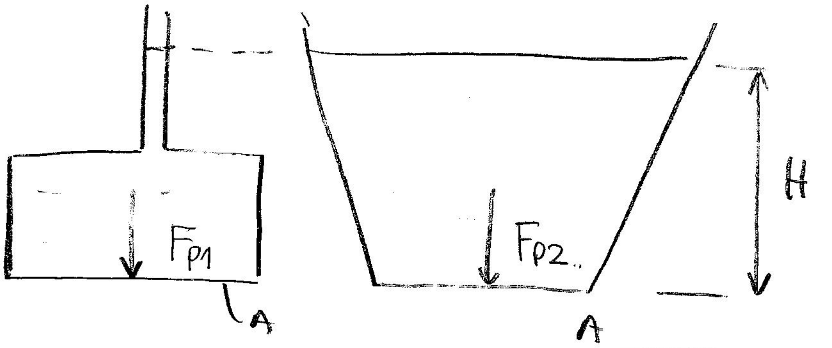
$$\rightarrow \quad \boxed{v_D - v_c = \frac{I_{c\xi}}{v_c A}} \quad \rightarrow \quad v_D - v_c = \frac{I_{c\xi}}{z_c A}\sin\alpha$$

$$\rightarrow \quad \boxed{\underbrace{v_D - v_c}_{\Delta v_c} = I_{c\xi}\frac{\rho g}{F_p}\sin\alpha}$$



Тачке C и D се поклапају ако је $\alpha = 0$ – хоризонтална површ





$P = \rho g H A$

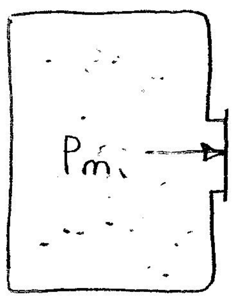
Паскалов парадокс $\boxed{F_{p1} = F_{p2}}$

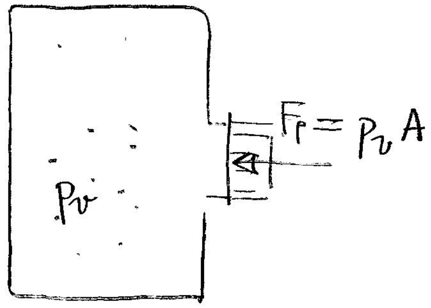
Сличном анализом (моментна једначина за осу $O\eta$) дошло би се до израза

$$u_D - u_C = \frac{I_{\xi\eta}}{v_C A} \rightarrow \Delta u_C = \frac{I_{\xi\eta}}{v_C A} \; ; \quad I_{\xi\eta} \text{ - центрифугални момент инерције}$$

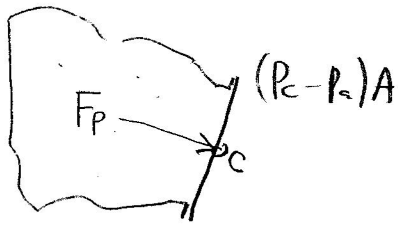
У случају да је површ симетрична у односу на неку од оса, онда ће $\Delta u_C = 0$. Обично је у већини проблема површ симетрична у односу на осу η.

Сила притиска на раван површ у случају гаса

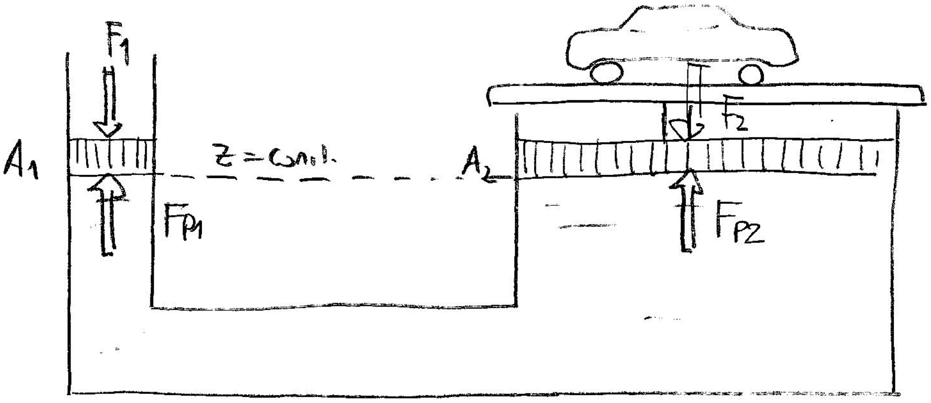




ако не знамо да ли је p_m или p_v



Принцип рада хидрауличке дизалице



$$F_1 = F_{p1}$$

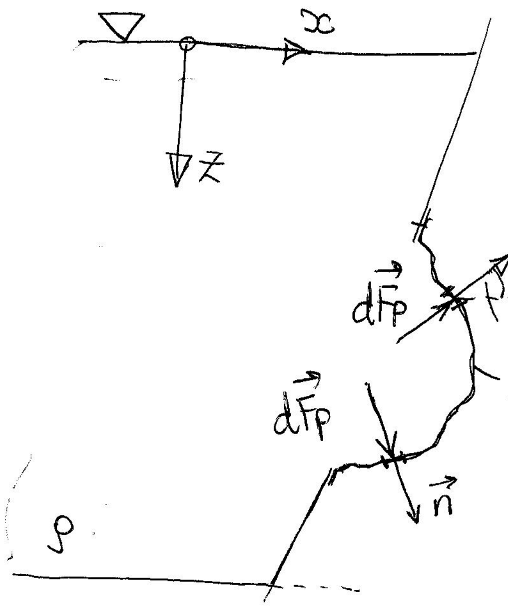
$$F_2 = F_{p2}$$

$$\frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2}$$

$$\boxed{F_2 = F_1 \left(\frac{A_2}{A_1}\right)}$$

СЛЕДЕ ПРОБЛЕМИ ИЗ ОДРЕЂИВАЊА СИЛЕ ПРИТИСКА НА РАВНУ ПОВРШ

3.6 Сила притиска на криву површ



Елементарна сила притиска

$$d\vec F_p = (p-p_a)\vec n\, dA$$

Резултујућа сила притиска (векторски збир елементарних сила притиска ⟶ интеграл по површи A_w):

$$\vec F_p = \iint_A (p-p_a)\vec n\, dA$$

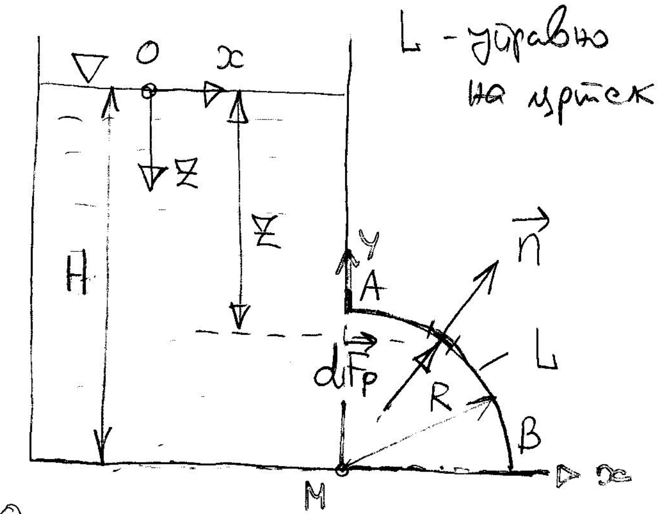
$$\vec F_p = \rho g \iint_A z\,\vec n\, dA$$

Вектор нормале се МЕЊА (правац и смер) од тачке до тачке површи ⟶ $\vec n$ остаје као ПОДИНТЕГРАЛНА ФУНКЦИЈА!

$\vec n = n_x \vec i + n_y \vec j$, где су n_x и n_y такође променљиви на површи A

„ТЕШКО" ЈЕ ФОРМУЛИСАТИ И ИЗРАЧУНАТИ ИНТЕГРАЛ → ДОКАЗ!

ПРИМЕР: Одредити силу притиска на криву површ AB облика 1/4 омотача цилиндра, за случај приказан на слици.



L - управно на цртеж

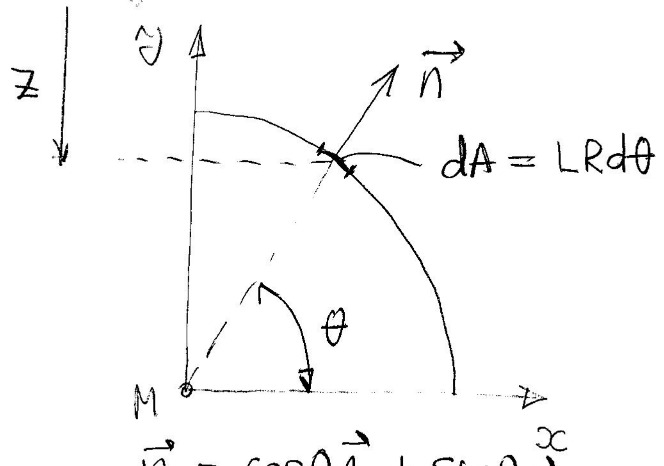
$$d\vec F_p = (p-p_a)\vec n\, dA$$

$$d\vec F_p = \rho g z\,\vec n\, dA$$

Mxy - локални коорд. систем

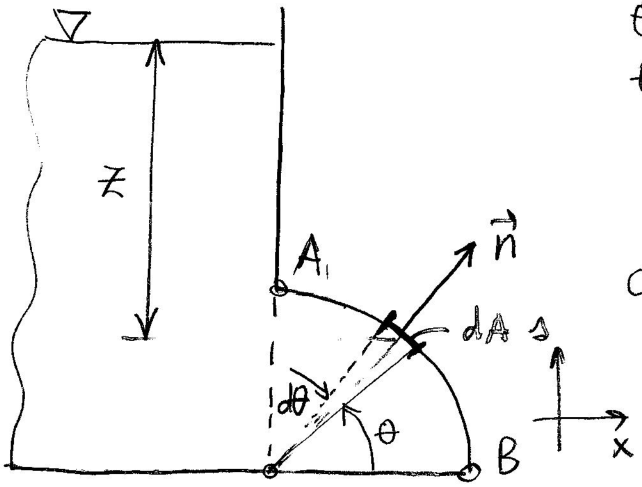
Oxz - координатни систем у коме одређујемо расподелу притиска

$$p = p_a + \rho g z \rightarrow p - p_a = \rho g z$$



$$\vec n = \cos\theta\, \vec i + \sin\theta\, \vec j$$

Веза између координата: $z = H - R\sin\theta$



$\theta = 0: \quad z = H$

$\theta = \frac{\pi}{2}: \quad z = H - R.$

Дакле:

$$d\vec{F}_p = \rho g \left(H - R\sin\theta\right)\left(\cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j}\right)\underbrace{LR\,d\theta}_{dA}$$

$$\vec{F}_p = \rho g \left[\int_{0\,(B)}^{\pi/2\,(A)} \left(H - R\sin\theta\right)\left(\cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j}\right) RL\,d\theta\right]$$

$$\vec{F}_p = \underbrace{\left[\rho g R L \int_0^{\pi/2} \cos\theta\left(H - R\sin\theta\right)d\theta\right]}_{F_{p,x}}\vec{i} + \underbrace{\left[\rho g R L \int_0^{\pi/2} \sin\theta\left(H - R\sin\theta\right)d\theta\right]}_{F_{py}}\vec{j}$$

$$F_{p,x} = \rho g R L \left(H \int_0^{\pi/2} \cos\theta\,d\theta - R\int_0^{\pi/2} \cos\theta\sin\theta\,d\theta\right) =$$

$$= \rho g R L \left(H \sin\theta\Big|_0^{\pi/2} + R\int_0^{\pi/2} \cos\theta\,d(\cos\theta)\right) =$$

$d(\cos\theta) = -\sin\theta\,d\theta$

$$= \rho g R L \left(H + R\,\frac{\cos^2\theta}{2}\Big|_0^{\pi/2}\right) = \rho g R L\left[H + \frac{R}{2}\underbrace{\left(\cos^2\frac{\pi}{2} - \cos^2 0\right)}_{-1}\right]$$

$$\rightarrow \boxed{F_{p,x} = \rho g\left(H - \frac{R}{2}\right)RL}$$

$$F_{p,y} = \rho g R L \left(H \underbrace{\int_0^{\pi/2} \sin\theta\,d\theta}_{-\cos\theta\Big|_0^{\pi/2}} - R\int_0^{\pi/2} \sin^2\theta\,d\theta\right)$$

$$\sin^2\theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}$$

$$F_{P,y} = \rho g R L \left[- H \left(\underbrace{\cos\frac{\pi}{2} - \cos 0}_{-1} \right) - R \int_0^{\pi/2} \frac{1-\cos 2\theta}{2}\, d\theta \right] =$$

$$= \rho g R L \left[H - \frac{R}{2}\int_0^{\pi/2} d\theta + \frac{R}{2}\int_0^{\pi/2} \cos 2\theta \, d\theta \right] = \left\{ \begin{aligned} d(2\theta) &= \\ &= 2 d\theta \end{aligned} \right.$$

$$= \rho g R L \left[H - \frac{R\pi}{4} + \frac{R\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \cos(2\theta)\, d(2\theta) \right] =$$

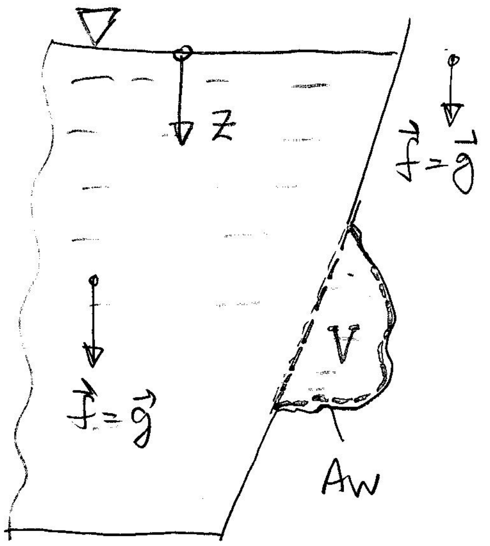
$$= \rho g R L \left[H - \frac{R\pi}{4} + \frac{R\pi}{4} \underbrace{\sin(2\theta)}_{0} \Big|_0^{\pi/2} \right]$$

$$\rightarrow \quad \boxed{F_{P,y} = \rho g \left(H - \frac{R\pi}{4} \right) R L}$$

— крај примера —

Одређивање силе притиска на овај начин није практично! Превише математичке рачунице, у којој ипак, мора се признати, има и лепоте!

Практичан начин одређивања силе притиска на криву површ



Полазимо од Ојлерове диференцијалне једначине мировања флуида коју ћемо интегралити по одговарајућем домену V тако да се део површи тог домена поклапа са кривом површи A_w, а остали део површи одговара једној (или више) равној површи.

Ојлерова једначина:

$$\nabla p = \rho \vec{f} \longrightarrow \operatorname{grad} p = \rho \vec{g}$$

$$\operatorname{grad} p = \frac{\partial p}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial p}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial p}{\partial z}\vec{k}$$

$$\operatorname{grad}(p - p_a) = \operatorname{grad} p - \underbrace{\operatorname{grad} p_a}_{=0 \text{ jer je } p_a = \text{const.}}$$

Дакле: $\nabla p = \nabla (p - p_a)$ тј. $\operatorname{grad} p = \operatorname{grad}(p - p_a)$

Полазна једначина:

$$\nabla(p - p_a) = \rho \vec{g} \xrightarrow[\text{ДОМЕНУ } V]{\text{ИНТЕГРАЛИМО ПО}} \iiint_V \nabla(p - p_a)\, dV = \iiint_V \rho \vec{g}\, dV$$

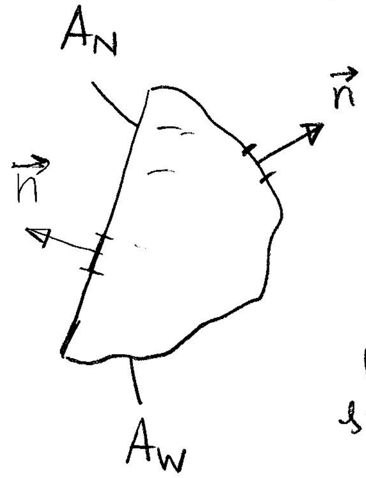
Теорема ГАУСА – ОСТРОГРАДСКОГ:

$$\iiint_V \nabla (p - p_a)\, dV = \oiint_A \vec{n}\,(p - p_a)\, dA$$

НАБЛА „ПРЕЛАЗИ" У $\vec{n}$

и $V \to \oint A$

A – ПОВРШ КОЈА ОГРАНИЧАВА V



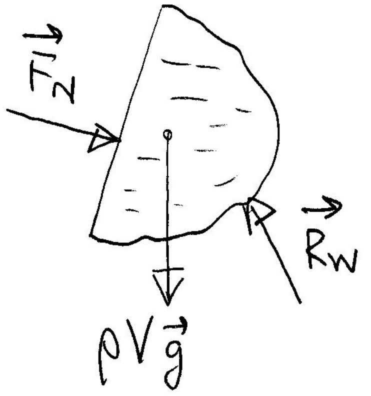
Даље је:

$$\underbrace{\rho \vec{g}}_{\text{КОНСТАНТА У ЦЕЛОЈ ЗАПРЕМИНИ } V} \iiint_V dV + \left[\oiint_A -(p - p_a)\vec{n}\, dA \right] = 0$$

$$A = A_W + A_N$$

$$\rho \vec{g} V + \underbrace{\iint_{A_N} -(p - p_a)\vec{n}\, dA}_{\substack{\text{РЕЗУЛТУЈУЋА СИЛА} \\ \text{ПРИТИСКА НА РАВНУ ПОВРШ} \\ A_N \to \vec{F}_N}} + \underbrace{\iint_{A_W} -(p - p_a)\vec{n}\, dA}_{\substack{\text{СИЛА КОЈОМ КРИВА} \\ \text{ПОВРШ (ЗАТВАРАЧ, ПОКЛОПАЦ)} \\ \text{ДЕЛУЈЕ НА ФЛУИД} \to \vec{R}_W}} = 0$$

$$\underbrace{\rho V \vec{g}}_{\substack{\text{РЕЗУЛТУЈУЋА} \\ \text{МАСЕНА СИЛА}}} + \underbrace{\vec{F}_N + \vec{R}_W}_{\substack{\text{РЕЗУЛТУЈУЋА} \\ \text{ПОВРШИНСКА СИЛА}}} = 0$$



Равнотежа издвојене масе флуида

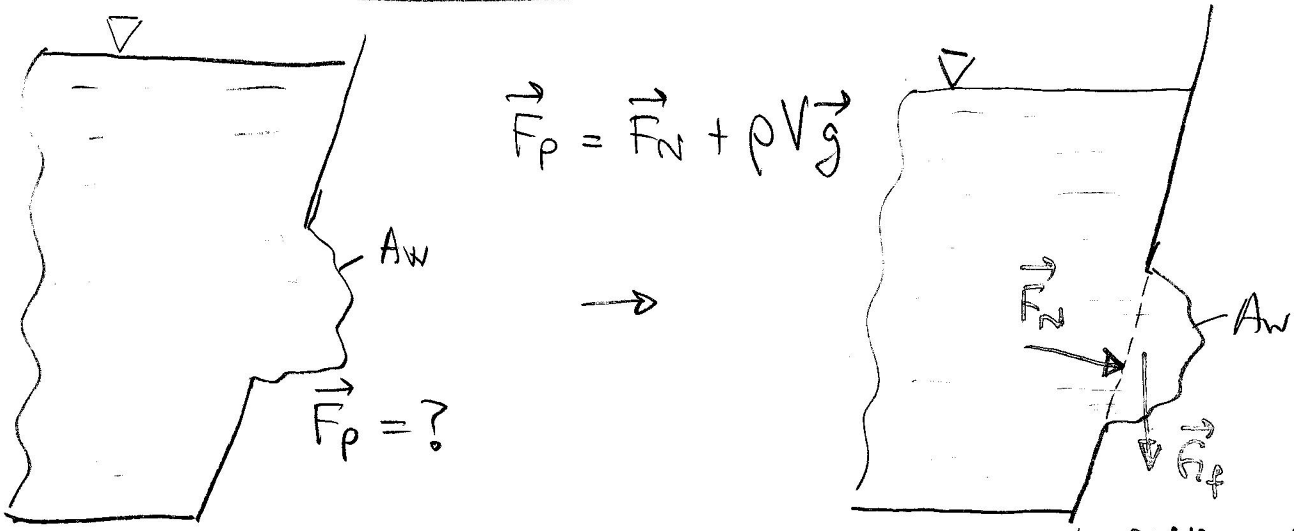
Сила коју ми тражимо је сила којом флуид делује на криву површ $\vec{F}_p$

$$\vec{F}_p = -\vec{R}_W \quad \ldots \text{ III Њутнов закон}$$
(закон акције и реакције)

$$\rho V\vec{g} \equiv \vec{G}_f \quad \ldots \text{ тежина флуида у запремини } V$$

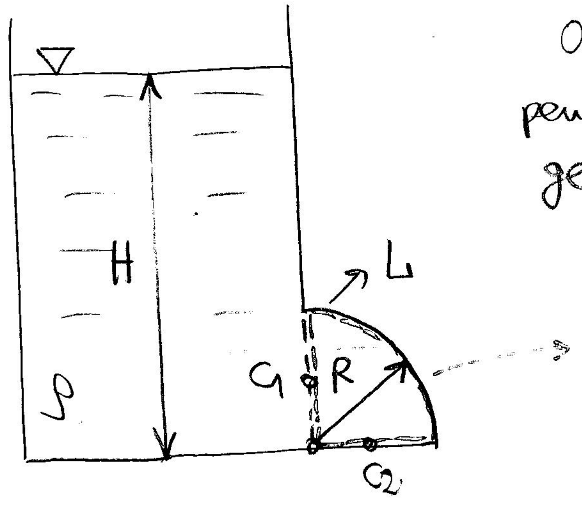
Дакле, коначно је: $\vec{G}_f + \vec{F}_N - \vec{F}_p = 0$

$$\rightarrow \boxed{\vec{F}_p = \vec{F}_N + \vec{G}_f = \vec{F}_N + \rho V\vec{g}}$$



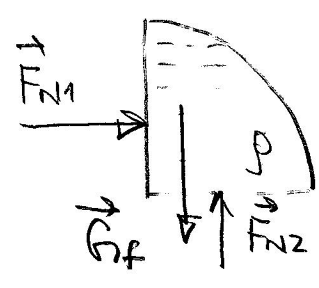
НЕКАДА ЈЕ ПОТРЕБНО УВЕСТИ И ВИШЕ РАВНИХ ПОВРШИ У ЦИЉУ ФОРМИРАЊА ЗАПРЕМИНЕ V

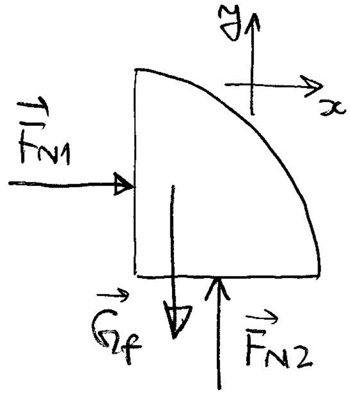
Пример: Одредити силу притиска на криву површ AB облика 1/4 омотача цилиндра, за случај приказан на слици.



Ово је претходни пример, који ћемо решити применујући претходно изведену методу.

$$\vec{F}_p = \vec{F}_{N1} + \vec{F}_{N2} + \vec{G}_f$$





$$\vec{F}_p = \vec{F}_{N1} + \vec{F}_{N2} + \vec{G}_f \quad \ldots \quad (I)$$

Интензитети сила:

$$F_{N1} = (p_{c1} - p_a)A_1 = \rho g\left(H - \frac{R}{2}\right)RL$$

$$F_{N2} = (p_{c2} - p_a)A_2 = \rho g H R L$$

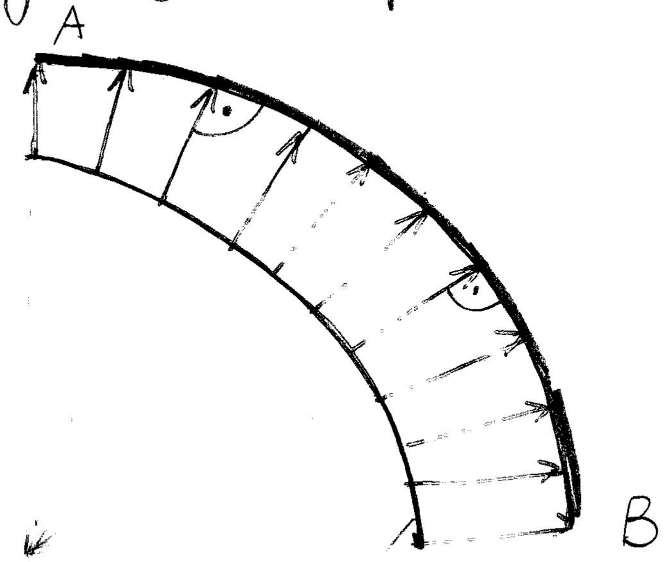
$$G_f = \rho g V = \rho g \underbrace{\frac{1}{4}R^2\pi L}_{\frac{1}{4}\text{ запремине цилиндра}}$$

Пројекција једначине (I) на осе x и y:

$$\boxed{F_{p,x}} = F_{N1} = \boxed{\rho g\left(H - \frac{R}{2}\right)RL}$$

$$\boxed{F_{p,y}} = F_{N2} - G_f = \rho g H R L - \frac{1}{4}\rho g R^2\pi L = \boxed{\rho g\left(H - \frac{R\pi}{4}\right)RL}$$

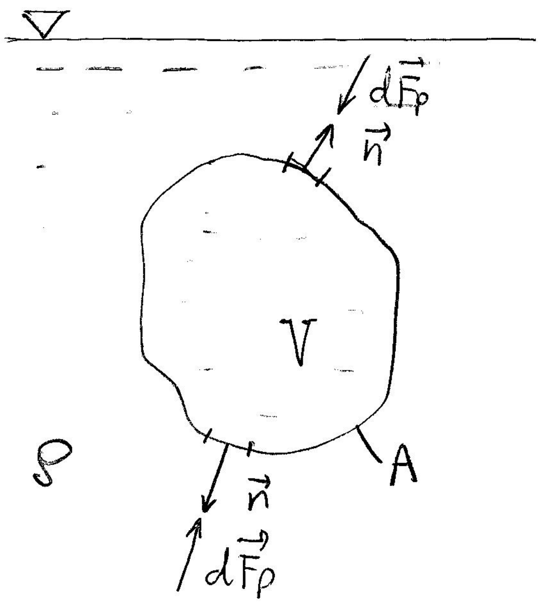
Расподела елементарних сила притиска



ПРИТИСАК РАСТЕ СА ДУБИНОМ
(ОВА КРИВА НИЈЕ КРУЖНИЦА!)

3.7 Сила потиска – Архимедова сила

Сила потиска или Архимедова сила је сила притиска која делује на тело које је потпуно (или делимично) потопљено у флуиду (обично мислимо на течност)



$$d\vec{F}_p = -(p-p_a)\,\vec{n}\,dA$$

$$\vec{F}_p = -\oiint_A (p-p_a)\,\vec{n}\,dA$$

A – затворена површ

Теорема Гауса–Остроградског:

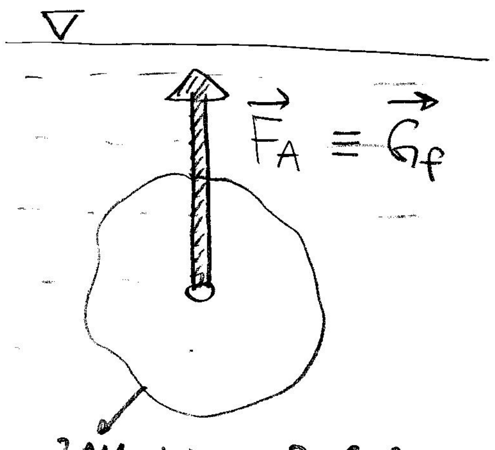
$$\oiint_A \vec{n}\,(p-p_a)\,dA = \iiint_V \nabla(p-p_a)\,dV$$

Ојлерова једначина: $\nabla(p-p_a) = \rho\vec{g}$

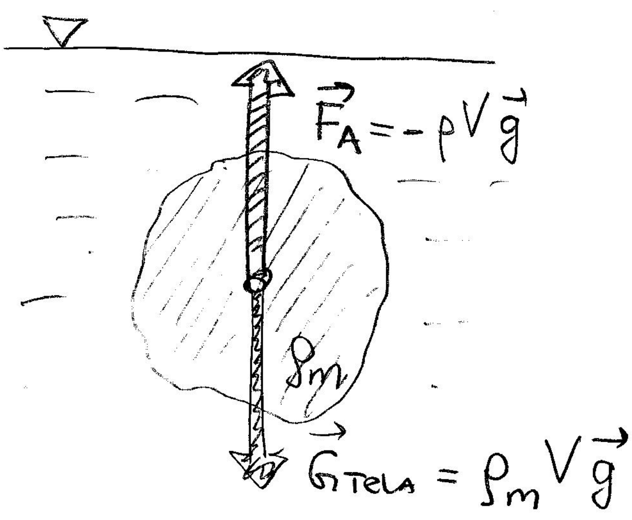
Дакле: $$\vec{F}_p = -\iiint_V \nabla(p-p_a)\,dV = -\iiint_V \underbrace{\rho\vec{g}}_{const}\,dV$$

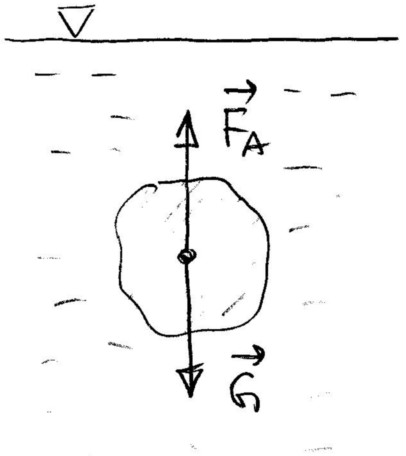
$$\rightarrow \quad \boxed{\vec{F}_p \equiv \vec{F}_A = -\rho V \vec{g}}$$

Архимедова сила – сила потиска усмерена вертикално навише



Замишљена затворена површ у течности која се поклапа са контуром тела

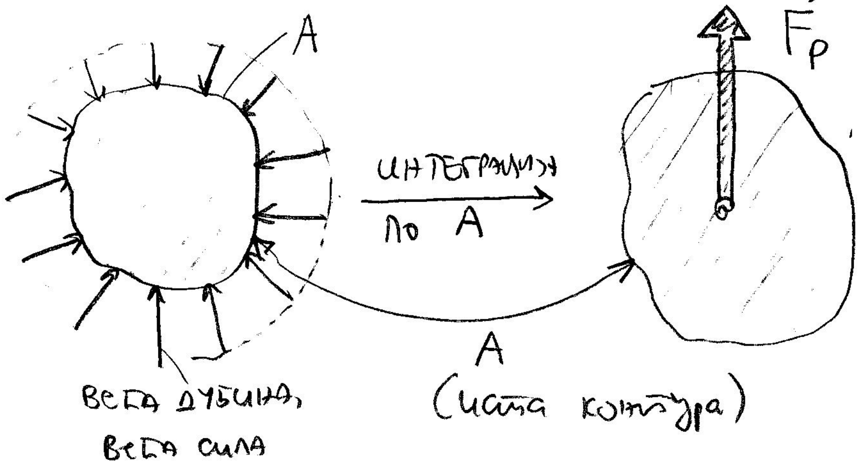




$G > F_A$ ... тело тоне ($\rho_m > \rho$)

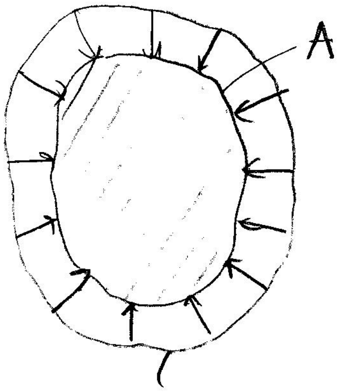
$G < F_A$ ... тело израња ($\rho_m < \rho$)

$G = F_A$ ... тело лебди ($\rho_m = \rho$)



Расподела елементарних сила притиска које делују на затворену површ A (контура тела)

Ако је поље притиска ХОМОГЕНО, онда је на свакој елементарној површи контуре притисак ЈЕДНАК, па је резултујућа сила (интеграл по затвореној површи A) једнака нули!



$$\oiint_A -p_0 \vec{n}\, dA = \iiint_V -\underbrace{\nabla p_0}_{0}\, dV = \emptyset$$

$$\nabla p_0 = \underbrace{\frac{\partial p_0}{\partial x}}_{0}\vec{i} + \underbrace{\frac{\partial p_0}{\partial y}}_{0}\vec{j} + \underbrace{\frac{\partial p_0}{\partial z}}_{0}\vec{k}$$

јер је $p_0 = const.$

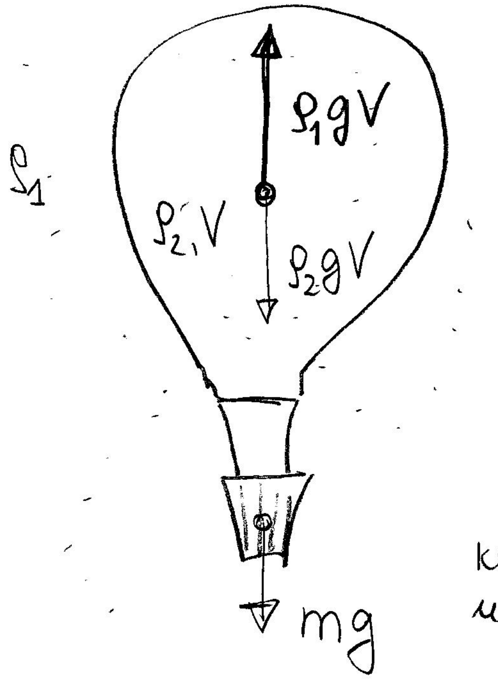
Раније смо рекли да се потпуно оправдано поље притиска у гасу може сматрати ХОМОГЕНИМ, јер је густина гаса веома мала (у поређењу са течностима).

Али, у гасу такође важи (за мало z):

$$p = p_0 + \rho_g g z \,;$$ како је $\rho_g g z \ll p_a$

$p \approx p_0 \to$ НЕМА F_A, тј. $\vec{F}_A = 0$

Некада се та промена притиска услед $\rho_g g z$ не може занемарити, већ је она КРУЦИЈАЛНА → она доводи до генерисања Архимедове силе → БАЛОН КОЈИ ЛЕБДИ У ВАЗДУХУ!



ρ_1 - ГУСТИНА СПОЉАШЊЕГ ВАЗДУХА ($\rho_1 \simeq const.$)

ρ_2 - ГУСТИНА ВАЗДУХА У БАЛОНУ ($\rho_2 = const$), $\rho_2 < \rho_1$

$$\underbrace{mg}_{\substack{\text{ТЕЖИНА}\\ \text{КОРПЕ, ПУТНИКА}\\ \text{И МАТЕРИЈАЛА}\\ \text{БАЛОНА}}} + \underbrace{\rho_2 g V}_{\substack{\text{ТЕЖИНА}\\ \text{ВАЗДУХА}\\ \text{У БАЛОНУ}}} = \underbrace{\rho_1 g V}_{\substack{\text{СИЛА ПОТИСКА}\\ \text{дејство спољашњег}\\ \text{ваздуха}}}$$

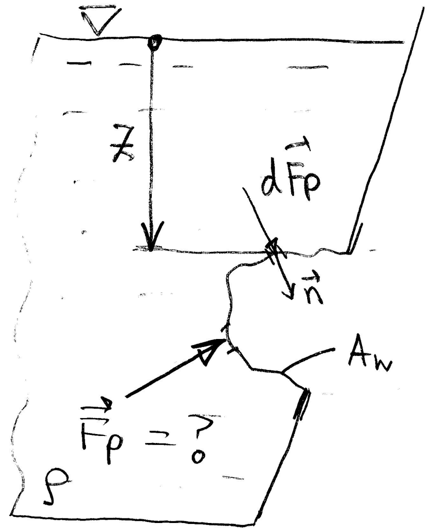
$$\rightarrow \boxed{mg = (\rho_1 - \rho_2) g V}$$

Ваздух у балону се обично загрева, при чему се његова густина ρ_2 СМАЊУЈЕ (притисак остаје исти и једнак је околном притиску, $p_a = \rho_2 R T_2 \rightarrow T_2 \uparrow \; \rho_2 \downarrow$) и на тај начин се контролише положај балона (висина). Ваздух се, дакле, загрева, и балон се подиже, јер је равнотежа нарушена, $(\rho_1 - \rho_2) g V > mg$, све до оне висине када се она поново успоставља и на којој је ρ_1

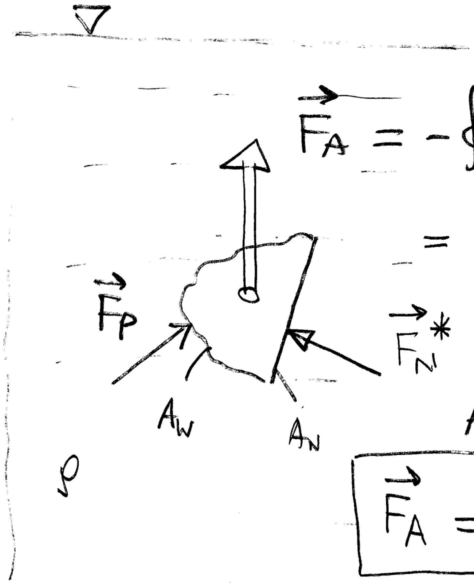
$$\rho_1 = \frac{m}{V} + \rho_2$$

Повећање висине → густина ρ_1 ОПАДА!

Примена методе потиска при одређивању силе притиска на криву површ



$$\vec{F}_p = \iint_{A_W} \rho g z \vec{n}\, dA$$



$$\vec{F}_A = -\oint\!\!\oint_A (p-p_a)\vec{n}\, dA = -\rho V \vec{g}$$

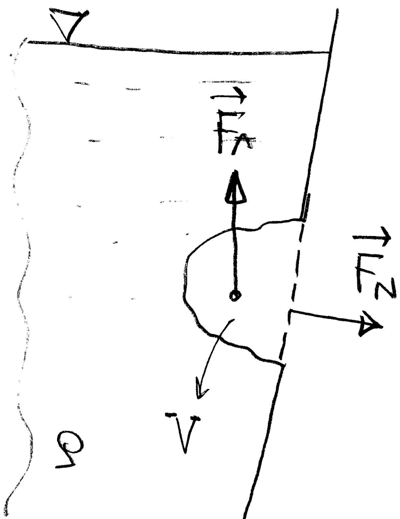
$$A = A_W + A_N$$

$$\boxed{\vec{F}_A = \vec{F}_p + \vec{F}_N^*}$$

Тело потпуно потопљено у течност и налази се на истој дубини као и крива површ → резултујућа сила притиска је $\vec{F}_A$

$$\vec{F}_N = -\vec{F}_N^*$$

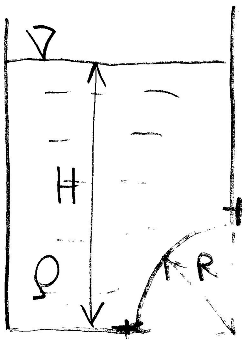
$$\rightarrow \boxed{\vec{F}_p = \vec{F}_N + \vec{F}_A = \vec{F}_N - \rho V \vec{g}}$$

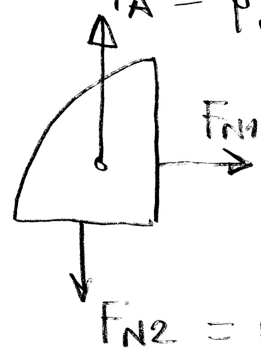


$\vec{F}_N$ – сила на равну површ, усмерена од равне површи ка „околини", тј. ка „спољашности" запремине V

$F_N = (p_{cN} - p_a) A_N$ – интензитет силе F_N

Пример:





$$F_A = \rho g \frac{1}{4} R^2 \pi L$$

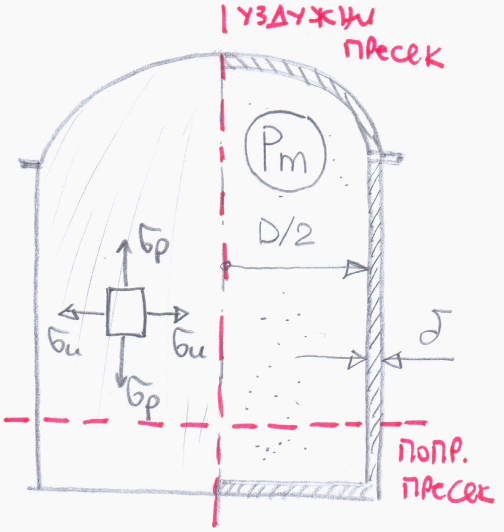
$$F_{N1} = \rho g \left(H - \frac{R}{2}\right) RL$$

$$\boxed{F_{N2} > F_A}$$

$$F_{N2} = \rho g H R L$$

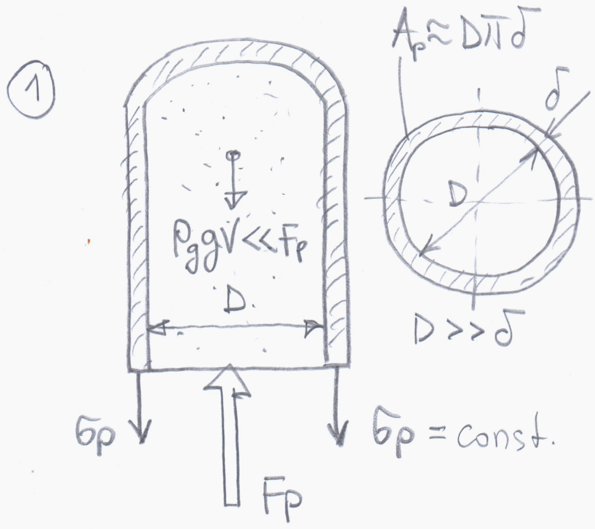
$$\boxed{\vec{F}_p = \vec{F}_A + \vec{F}_{N1} + \vec{F}_{N2}}$$

3.8 Прорачун судова под притиском. Мариотова формула

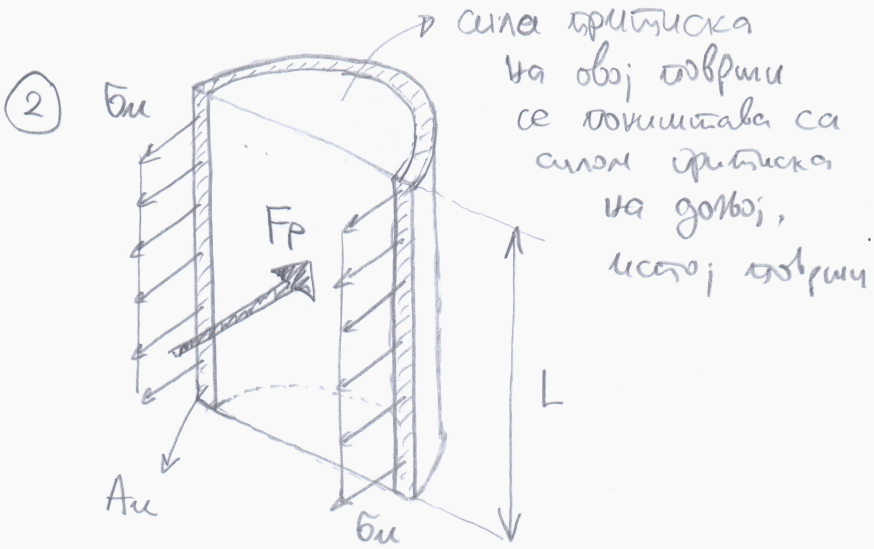


- унутар суда се налази гас у коме влада натпритисак p_m
- материјал од кога је направљен суд може максимално да поднесе напоне истезања σ_{doz} („сигма дозвољено")
- Колико у том случају мора да буде дебљина зида суда δ?

Материјал зида суда је изложен уздужним и попречним напонима истезања



Попречни пресек суда



Уздужни пресек суда

① $F_p = \sigma_p A_p \rightarrow p_m \frac{D^2\pi}{4} = \sigma_p D\pi\delta \rightarrow \sigma_p = p_m \frac{D}{4\delta}$

② $F_p = \sigma_u A_u \rightarrow p_m D L = 2\sigma_u \delta L \rightarrow \sigma_u = p_m \frac{D}{2\delta}$

Дакле $\sigma_u > \sigma_p$, па је он меродаван за димензионисање суда (ако је $\sigma_u < \sigma_{doz}$, онда је сигурно и $\sigma_p < \sigma_{doz}$)

$$\sigma_u < \sigma_{doz} \rightarrow p_m \frac{D}{2\delta} < \sigma_{doz} \rightarrow \boxed{\delta > D \frac{p_m}{2\sigma_{doz}}}$$

Мариотова формула