1. УВОД

МЕХАНИКА ФЛУИДА – део физике који се бави утврђивањем законитости које описују мировање и кретање флуида.

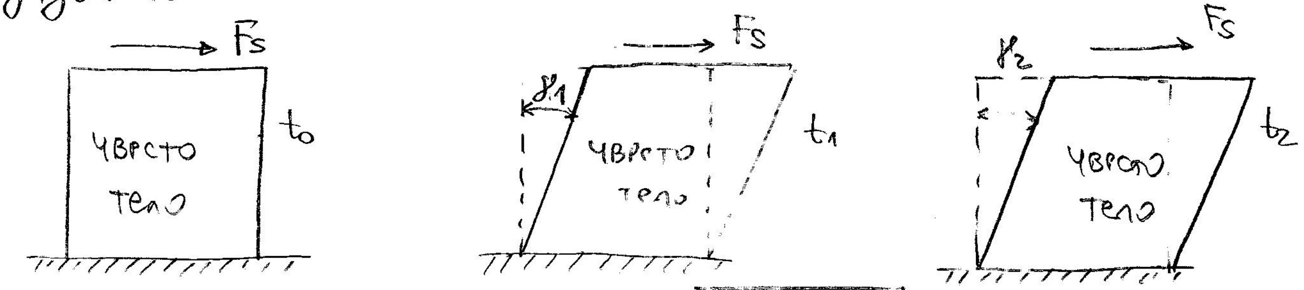
МЕХАНИКА ФЛУИДА – инжењерска наука повезана са одређивањем сила и размењених енергија проузрокованих кретањем или мировањем флуида.

Принципи и методе МЕХАНИКЕ ФЛУИДА су неопходни алати у многим инжењерским и технолошким апликацијама.

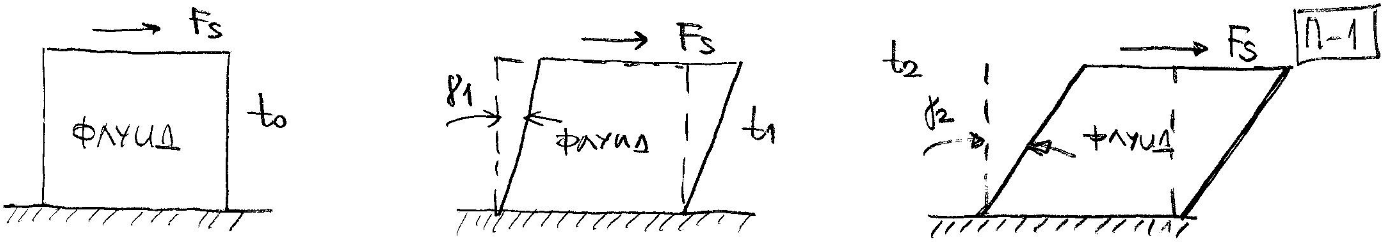
- ГАСОВОДИ, НАФТОВОДИ, ВОДОВОДНЕ МРЕЖЕ (транспорт флуида)
- ЕНЕРГЕТИКА (хидроелектране, термоелектране, ветроелектране)
- ТЕРМОТЕХНИЧКЕ ИНСТАЛАЦИЈЕ И УРЕЂАЈИ (у свакој је присутан флуид)
- КРЕТАЊА АВИОНА, БРОДОВА, АУТОМОБИЛА – сва превозна средства се крећу кроз флуид
- КРЕТАЊЕ КРВИ У КРВНИМ СУДОВИМА (биомеханика флуида)
- и много тога...

Шта је флуид? ФЛУИД ЈЕ СВАКА МАТЕРИЈА КОЈА ТЕЧЕ (СТРУЈИ).

Уобичајено се каже да се под појмом флуида подразумевају течности и гасови, односно да је флуид заједнички назив за ТЕЧНОСТИ И ГАСОВЕ. Међутим, и зрнаста маса, мед, разни полимери се могу сматрати флуидима.



$\boxed{\gamma_1 = \gamma_2}$



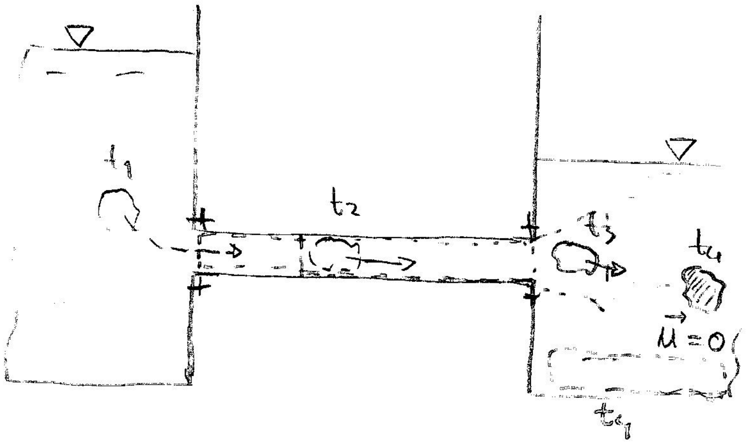
Алтернативна дефиниција флуида:

ФЛУИД ЈЕ МАТЕРИЈА КОЈА СЕ НЕПРЕКИДНО ДЕФОРМИШЕ ПОД ДЕЈСТВОМ СИЛА СМИЦАЊА. ТАЈ ПРОЦЕС НЕПРЕКИДНОГ ДЕФОРМИСАЊА ПРЕДСТАВЉА КРЕТАЊЕ (СТРУЈАЊЕ) ФЛУИДА.

Како је механика флуида суштински део механике, струјање флуида се описује са три основна закона механике:

- ЗАКОН О ОДРЖАЊУ МАСЕ
- ДРУГИ ЊУТНОВ ЗАКОН (ЗАКОН О ПРОМЕНИ КОЛИЧИНЕ КРЕТАЊА)
- ЗАКОН О ОДРЖАЊУ ЕНЕРГИЈЕ

Јавља се практичан проблем – закони важе за материјални систем које се јасно може идентификовати (лопта, аутомобил, авион, део неке машине) – како изоловати део флуида и пратити његово кретање? Шта је почетном деформацијом тог дела флуида?



Од интереса је одредити силу којом вода делује на цев. Праћењем кретања издвојене масе флуида која је у тренутку t_1 била у цеви то није могуће одредити!

ОСНОВНА ХИПОТЕЗА У МЕХАНИЦИ ФЛУИДА – ФЛУИД ЈЕ НЕПРЕКИДНА (КОНТИНУАЛНА) СРЕДИНА.

Ова хипотеза је позната и као ХИПОТЕЗА О КОНТИНУУМУ!

1.1 ДИМЕНЗИЈЕ, ДИМЕНЗИЈСКА ХОМОГЕНОСТ И ЈЕДИНИЦЕ

У механици флуида, и физици уопште, неопходан је КВАЛИТАТИВНИ и КВАНТИТАТИВНИ опис феномена који се проучава.

КВАЛИТАТИВНИ ОПИС – идентификација типа (природе) значајних параметара (физичких величина)

КВАНТИТАТИВНИ ОПИС – нумеричка вредност физичке величине и њена јединица (стандард са којим се врши поређење величина истог типа)

Јединице – основне и изведене.

У механици флуида, обично се користе три основне величине: МАСА, ДУЖИНА и ВРЕМЕ, из којих се изводе димензије осталих физичких величина (ту је наравно и ТЕМПЕРАТУРА, али ће се она користити само у појединим лекцијама; принцип је исти).

	Маса	Дужина	Време
Димензијска ознака	M	L	T
Јединица у SI систему	kg	m	s

$[\cdot]$ – димензијска ознака физичке величине.

$[D] = L$

D – пречник цеви

$[U] = LT^{-1}$, U – брзина кретања (струјања) флуида

$$[a] = \frac{[\text{брзина}]}{[\text{време}]} = \frac{LT^{-1}}{T} = LT^{-2}$$

$$[F] = [\text{маса}]\cdot[\text{убрзање}] = MLT^{-2} \quad \text{– сила}$$

$$[p] = \frac{[\text{сила}]}{[\text{површина}]} = \frac{MLT^{-2}}{L^2} = ML^{-1}T^{-2} \quad \text{– притисак}$$

1.1 Димензије, димензијска хомогеност и јединице

У механици флуида, и физици уопште, неопходан је КВАЛИТАТИВНИ и КВАНТИТАТИВНИ опис феномена који се проучава.

КВАЛИТАТИВНИ ОПИС – идентификација типа (природе) значајних параметара (физичких величина)

КВАНТИТАТИВНИ ОПИС – нумеричка вредност физичке величине и њена јединица (стандард са којим се врши поређење величина истог типа)

Јединице – основне и изведене.

У механици флуида, обично се користе три основне величине: МАСА, ДУЖИНА и ВРЕМЕ, из којих се изводе димензије осталих физичких величина (ту је наравно и ТЕМПЕРАТУРА, али ће се она користити само у појединим лекцијама; принцип је исти).

	Маса	Дужина	Време
Димензијска ознака	M	L	T
Јединица у SI систему	kg	m	s

$[\cdot]$ – димензијска ознака физичке величине.

$[D] = L$

D – пречник цеви

$[U] = LT^{-1}$, U – брзина кретања (струјања) флуида

$$[a] = \frac{[\text{БРЗИНА}]}{[\text{ВРЕМЕ}]} = \frac{LT^{-1}}{T} = LT^{-2}$$

$$[F] = [\text{МАСА}]\cdot[\text{УБРЗАЊЕ}] = MLT^{-2} \quad \text{– сила}$$

$$[p] = \frac{[\text{СИЛА}]}{[\text{ПОВРШИНА}]} = \frac{MLT^{-2}}{L^2} = ML^{-1}T^{-2} \quad \text{– притисак}$$

$$[\rho] = \frac{[\text{маса}]}{[\text{запремина}]} = \frac{M}{L^3} = ML^{-3}$$

	Димензиска ознака	Јединица у SI систему
Сила	MLT^{-2}	$N \equiv \frac{kg\,m}{s^2}$
Притисак	$ML^{-1}T^{-2}$	$Pa \equiv \frac{N}{m^2} = \frac{kg}{m s^2}$
Густина	ML^{-3}	kg/m^3

Постулат димензиске хомогености:

Свака једначина која представља физички закон или је изведена из физичког закона мора бити ДИМЕНЗИСКИ ХОМОГЕНА (сваки члан, тј. сабирак те једначине мора имати исту димензију).

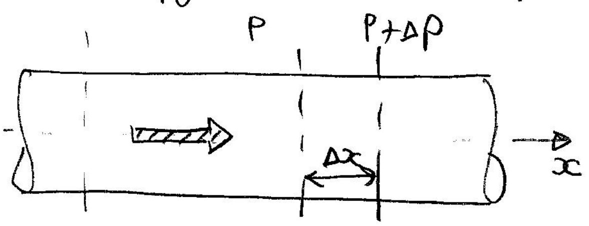
Пример: Једнолико убрзано кретање материјалне тачке:

$$v = v_0 + at \rightarrow LT^{-1} = LT^{-1} + LT^{-2}T$$

$$LT^{-1} = LT^{-1} + LT^{-1}$$

Једначина је димензиски хомогена.

У једначинама механике флуида се често јављају изводи по координатама и времену



$\frac{dp}{dx}$ – градијент притиска у смеру x-осе

$$\left[\frac{dp}{dx}\right] = ?$$

Дефиниција извода:

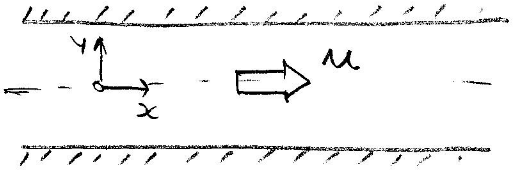
$$\frac{dp}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{p(x+\Delta x) - p(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta p}{\Delta x} \approx \frac{\Delta p}{\Delta x}$$

$$\left[\frac{dp}{dx}\right] = \frac{[\text{притисак}]}{[\text{дужина}]} = \frac{ML^{-1}T^{-2}}{L} = ML^{-2}T^{-2}$$

$$\left[\frac{d^2u}{dx^2}\right] = ? \qquad \frac{d^2u}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{du}{dx}\right)$$

$$\rightarrow \left[\frac{d^2u}{dx^2}\right] = \frac{[\text{БРЗИНА}]}{[\text{ДУЖИНА}^2]} = \frac{LT^{-1}}{L^2} = L^{-1}T^{-1}$$

Пример: Струјање (течење, кретање) течности између паралелних плоча. Која је димензијска ознака за динамичку вискозност η?



$$\frac{dp}{dx} = \eta \frac{d^2u}{dy^2}$$

$$[\eta] = M^x L^y T^z$$

$$\left[\frac{dp}{dx}\right] = ML^{-2}T^{-2}, \qquad \left[\frac{d^2u}{dy^2}\right] = L^{-1}T^{-1}$$

$$\rightarrow ML^{-2}T^{-2} = \underbrace{M^x L^y T^z}_{[\eta]} L^{-1}T^{-1} \Rightarrow ML^{-2}T^{-2} = M^x L^{y-1} T^{z-1}$$

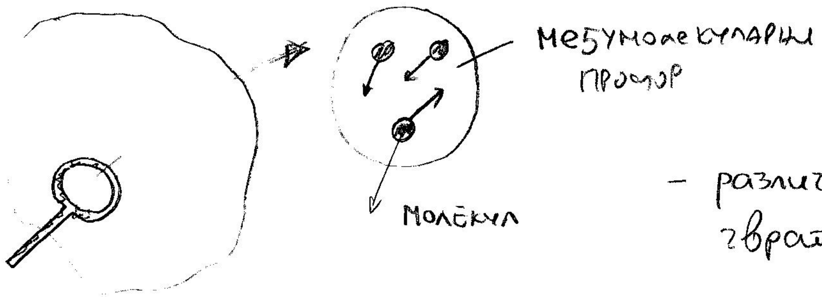
$$\left.\begin{array}{l} x = 1 \\ y - 1 = -2 \\ z - 1 = -2 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{l} x = 1 \\ y = -1 \\ z = -1 \end{array}$$

$$\rightarrow \boxed{[\eta] = ML^{-1}T^{-1} = \frac{M}{LT}}$$

Јединица за динамичку вискозност у SI систему:

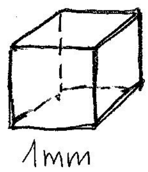
$$\eta \left[\frac{kg}{ms} \text{ или } Pa\cdot s\right]$$

1.2 НЕКА СВОЈСТВА ФЛУИДА КАО МАТЕРИЈЕ. ХИПОТЕЗА О КОНТИНУУМУ



- различита молекуларна структура гасовитог течног и гасовитог стања

- принципски је могуће описати кретање сваког молекула, али је практично то неизводљиво

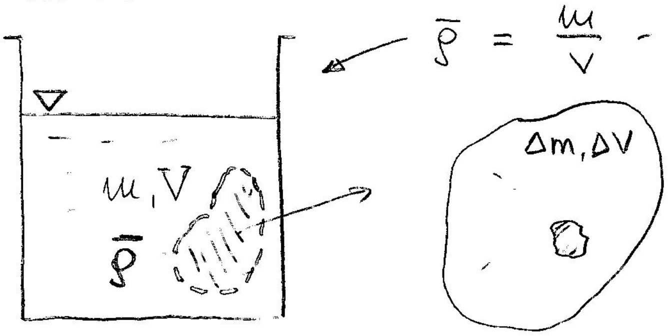


Ваздух: 10^{18} молекула (међумолекуларно растојање 10^{-6} mm)
Вода: 10^{21} молекула (међумолекуларно растојање 10^{-7} mm)

- у свим разматрањима размере проблема су много веће од размера на нивоу молекула - може се сматрати да је простор НЕПРЕКИДНО испуњен материјом → ПРИМЕНА ТЕОРИЈЕ ПОЉА КАО МАТЕМАТИЧКОГ ОРУЂА $f = f(x, y, z, t)$
- ИЗУЗЕТАК: разређен ваздух на великим висинама у Земљиној атмосф. (на 160 km висине у коцки странице 1mm само један молекул)

Са појмом континуума дефинише се и „ФЛУИДНИ ДЕЛИЋ", као и густина непрекидне средине (континуума).

1.2.1 Густина флуида. Флуидни делић



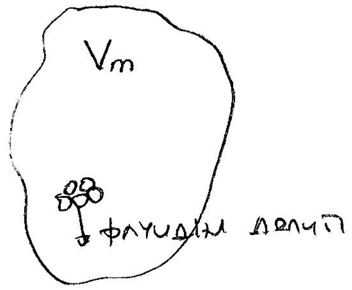
$\bar{\rho} = \frac{m}{V}$ - средња густина

$$\bar{\rho}' = \frac{\Delta m}{\Delta V}$$

$$\rho = \lim_{\Delta V \to dV} \frac{\Delta m}{\Delta V}$$

запремина флуидног делића

Димензије флуидног делића су такве да за њега још увек важи хипотеза о континууму, али су довољно мале да се оне, са математичког становишта може сматрати тачком

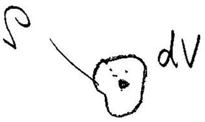


Унутар произвољно изабране запремине флуида се налази бесконачно много флуидних делића.

dm – маса флуидног делића
dV – запремина флуидног делића

$$\boxed{dm = \rho\, dV = const.}$$

Маса флуидног делића је константна → директна последица закона о одржању масе.



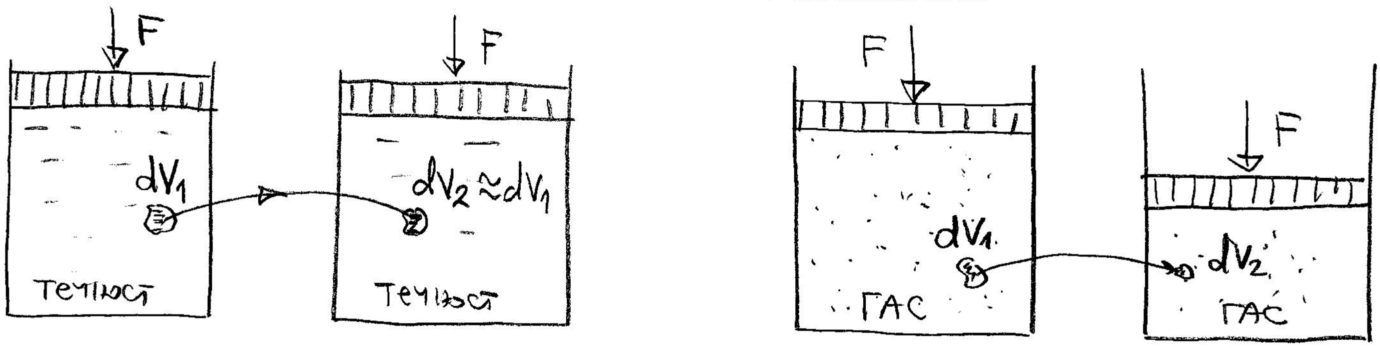
Густина, као физичко својство флуида, зависи од притиска и температуре:

$\rho = \rho(p, T)$ – обично дато у виду табеле или дијаграма, или аналитички на примеру идеалног гаса

$$\boxed{\rho = \frac{p}{RT}} \longleftrightarrow \boxed{p = \rho R T}$$

једначина стања идеалног гаса

1.2.2 Стишљивост (компресибилност) флуида



Практично нема промене запремине

$$\boxed{T \approx const.}$$

Драстична промена запремине при дејству сила притиска

Дефиниција коефицијента стишљивости:

$$s = -\frac{1}{dV}\frac{\partial (dV)}{\partial p}$$ – релативна промена запремине фл. делића под дејством притиска

Дефиниција преко густине ρ:

$$dm = \rho\, dV = const. \rightarrow \frac{\partial}{\partial p}(\rho\, dV) = 0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial p} dV + \rho \frac{\partial (dV)}{\partial p} = 0 \rightarrow -\frac{1}{dV}\frac{\partial (dV)}{\partial p} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial p}$$

$$\rightarrow \boxed{s = \frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial p}, \quad \text{јединица } Pa^{-1}}$$

Уобичајено је користити модул стишљивости $\varepsilon = \frac{1}{s}$

$$\boxed{\varepsilon = \rho \frac{\partial p}{\partial \rho}}, \quad \text{јединица } Pa$$

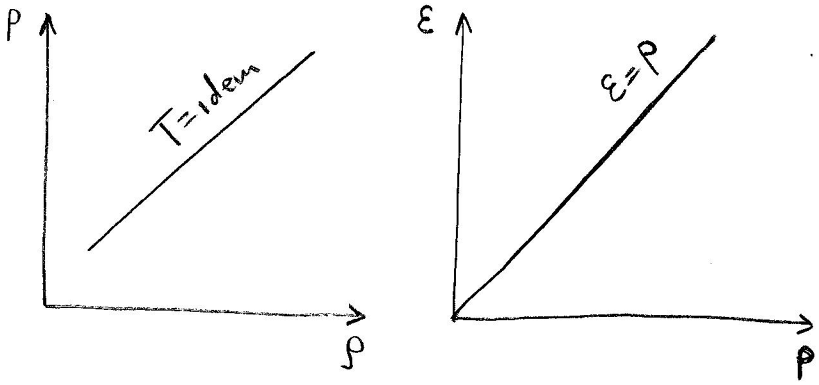
ВОДА: $\varepsilon = 2{,}15 \cdot 10^9\, Pa$ (за $p = 10^5\, Pa$)

ВАЗДУХ: $\varepsilon = p$ (за $T = idem$)

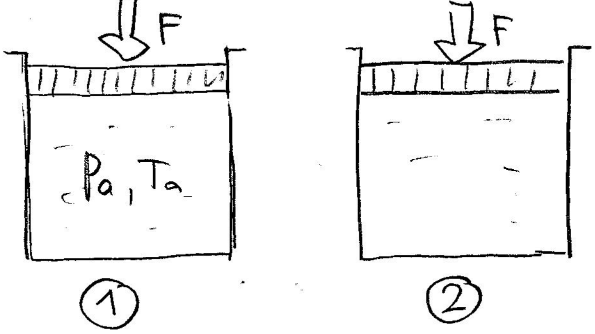
за 1bar: $\varepsilon = 1bar$

Стандардни услови ($p = 101325 Pa$, $T = 288K$):

ВОДА	$\varepsilon = 2{,}15 \cdot 10^9\, Pa$
ВАЗДУХ	$\varepsilon = 1{,}013 \cdot 10^5\, Pa$



Пример: Колики је притисак потребан да би се густина воде на $p_a = 101325 Pa$ и $T_a = 288K$ повећала за 1%? Узети да је ρ у почетном стању $\rho = 1000 kg/m^3$.



p_1, ρ_1 $\quad$ p_2, ρ_2

$$\varepsilon = \rho \frac{\partial p}{\partial \rho} \approx \rho_1 \frac{p_2 - p_1}{\rho_2 - \rho_1} = \rho_1 \frac{\Delta p}{\Delta \rho}$$

$$\rho_2 = \rho_1 + 0.01\rho_1 = 1.01\rho_1$$

$$\Delta p = \varepsilon \frac{\Delta \rho}{\rho_1} = \varepsilon \frac{1.01\rho_1 - \rho_1}{\rho_1} = 0.01\varepsilon$$

$$\frac{\Delta p}{\varepsilon} = \frac{\Delta \rho}{\rho_1}$$

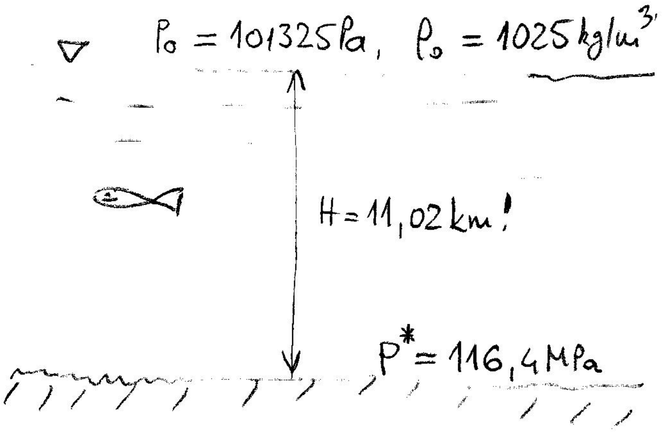
$$\rightarrow \Delta p = 0{,}01 \cdot 2{,}15 \cdot 10^9 = 2{,}15 \cdot 10^7 Pa$$

$$\Delta p = 2{,}15\cdot 10^7\,\text{Pa} = 21{,}5\cdot 10^6\,\text{Pa} \equiv 21{,}5\,\text{MPa} \equiv 215\,\text{bar}$$

$$\boxed{1\,\text{bar} = 10^5\,\text{Pa}} \qquad \boxed{1\,\text{atm} = 101325\,\text{Pa}}$$

Пример: Најдубља тачка у океанима је 11022m, у Маријанској бразди у близини острва Гвам у Тихом океану. Притисак на тој дубини износи 116,4 MPa. Ако је густина на нивоу океана $\rho_0 = 1025\,\text{kg/m}^3$ колика је њена густина на дну Маријанске бразде? Узети да је $\varepsilon = 2{,}15\cdot 10^9\,\text{Pa}$.

На нивоу мора



$$\varepsilon = \rho\frac{\partial p}{\partial \rho} \approx \rho_0 \frac{\Delta p}{\Delta \rho}$$

$$\frac{\rho^* - \rho_0}{\rho_0} = \frac{\Delta p}{\varepsilon}$$

$$\rho^* = \rho_0\left(1 + \frac{\Delta p}{\varepsilon}\right)$$

$$\rho^* = \rho_0\left(1 + \frac{p^* - p_0}{\varepsilon}\right) = 1025\left(1 + \frac{116{,}4\cdot 10^6 - 101325}{2{,}15\cdot 10^9}\right)$$

$$\rightarrow \boxed{\rho^* = 1080{,}4\,\text{kg/m}^3}$$

Други начин:

$$\varepsilon = \rho\frac{dp}{d\rho} \rightarrow \frac{dp}{\varepsilon} = \frac{d\rho}{\rho} \rightarrow \int_{p_0}^{p^*}\frac{dp}{\varepsilon} = \int_{\rho_0}^{\rho^*}\frac{d\rho}{\rho}$$

$$\ln\left(\frac{\rho^*}{\rho_0}\right) = \frac{p^* - p}{\varepsilon} \rightarrow \rho^* = \rho_0 \exp\left(\frac{p^* - p}{\varepsilon}\right)$$

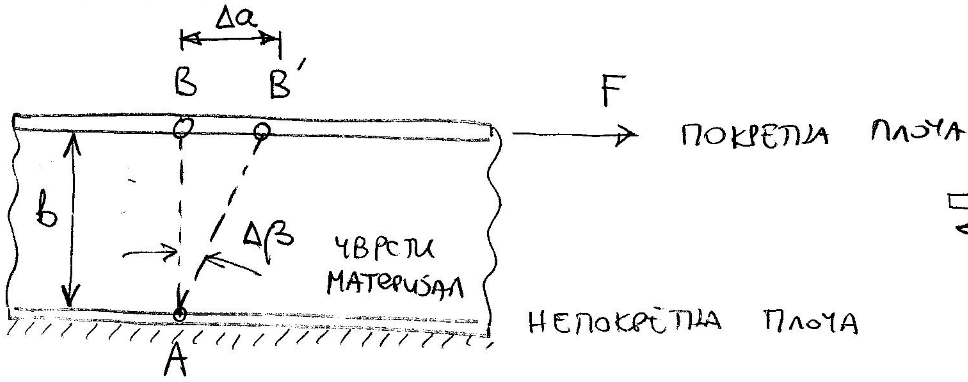
$$\rho^* = 1025 \exp\left(\frac{116{,}4\cdot 10^6 - 101325}{2{,}15\cdot 10^9}\right) = 1025\, e^{0.0541}$$

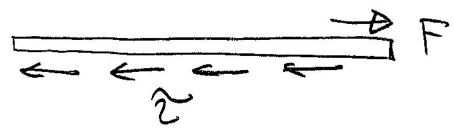
$$\rightarrow \boxed{\rho^* = 1082\,\text{kg/m}^3}$$

1.2.3 Вискозност

- Ово својство флуида је повезано са особином „течљивости“:

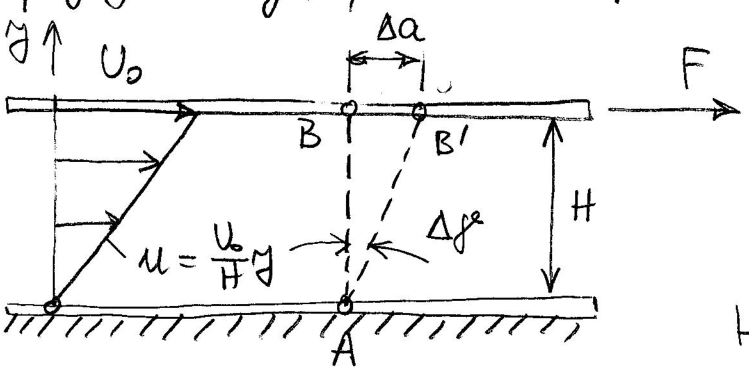
ВЕЋА ВИСКОЗНОСТ → МАЊА ТЕЧЉИВОСТ!





- код чврстог тела (материјала) дејство силе F доводи до коначне деформације Δa: тачка B се померила у тачку B' и ту остаје иако сила и даље делује. Сила F ће изазвати напон смицања у материјалу (напон τ). За ЕЛАСТИЧНУ ДЕФОРМАЦИЈУ МАТЕРИЈАЛА: $\tau \propto \Delta\beta$

- Код флуида је ситуација потпуно другачија! Под дејством силе F флуид ће се непрекидно кретати: И НАЈМАЊИ НАПОН СМИЦАЊА УЗРОКУЈЕ КРЕТАЊЕ ФЛУИДА! При томе ће се флуид на горњој плочи кретати брзином којом се креће плоча, док ће флуид на доњој плочи мировати.



ВАЖНА ОСОБИНА ФЛУИДА:

- БРЗИНА ФЛУИДА НА ЧВРСТОЈ КОНТУРИ ЈЕДНАКА ЈЕ БРЗИНИ ТЕ КОНТУРЕ

Непокретна чврста контура: $\vec{v}=0$

Ово је последица дејства АДХЕЗИОНИХ сила између молекула чврстог тела и молекула флуида. Макроскопски се то манифестује „УСЛОВОМ ЛЕПЉЕЊА“ (no-slip condition) на чврстој контури. То ВАЖИ И ЗА ТЕЧНОСТИ И ЗА ГАСОВЕ!

Под дејством силе тачка B (флуидни делић — тачка у флуиду) ће се константно кретати. Нека је након неког времена Δt она дошла у положај B'. При томе је: $\Delta a = U \Delta t$ $(\Delta a \equiv \overline{BB'})$

За мале углове $\Delta\gamma$: $\tan(\Delta\gamma) \approx \Delta\gamma = \frac{\overline{BB'}}{H} = \frac{U_0 \Delta t}{H}$

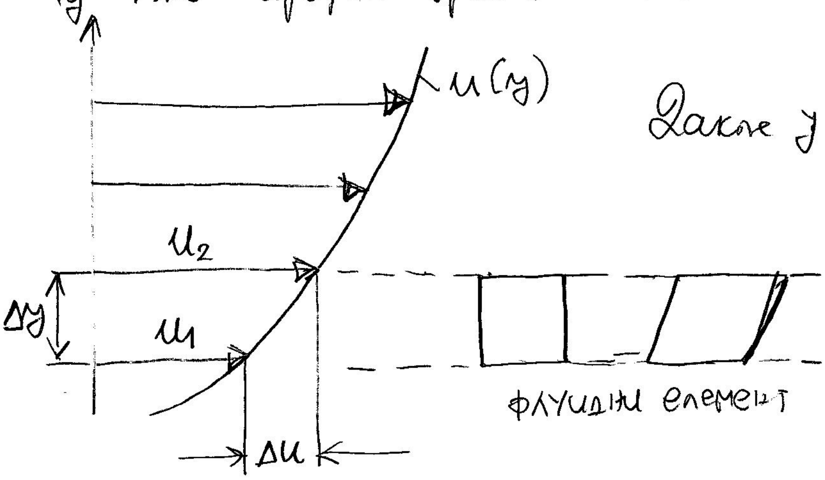
$\rightarrow \quad \dot{\gamma} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\gamma}{\Delta t}$ — БРЗИНА ДЕФОРМИСАЊА (деформације у времену)

У КОНКРЕТНОМ СЛУЧАЈУ: $\dot{\gamma} = \frac{U_0}{H}$

У случају флуида пропорционалност $\tau \propto \Delta\gamma$ није физички оправдана, већ $\tau \propto \dot{\gamma}$

У КОНКРЕТНОМ СЛУЧАЈУ: $\tau \propto \frac{U_0}{H}$

Ако профил брзине НИЈЕ ЛИНЕАРАН, онда је $\dot{\gamma} = \frac{du}{dy}$,

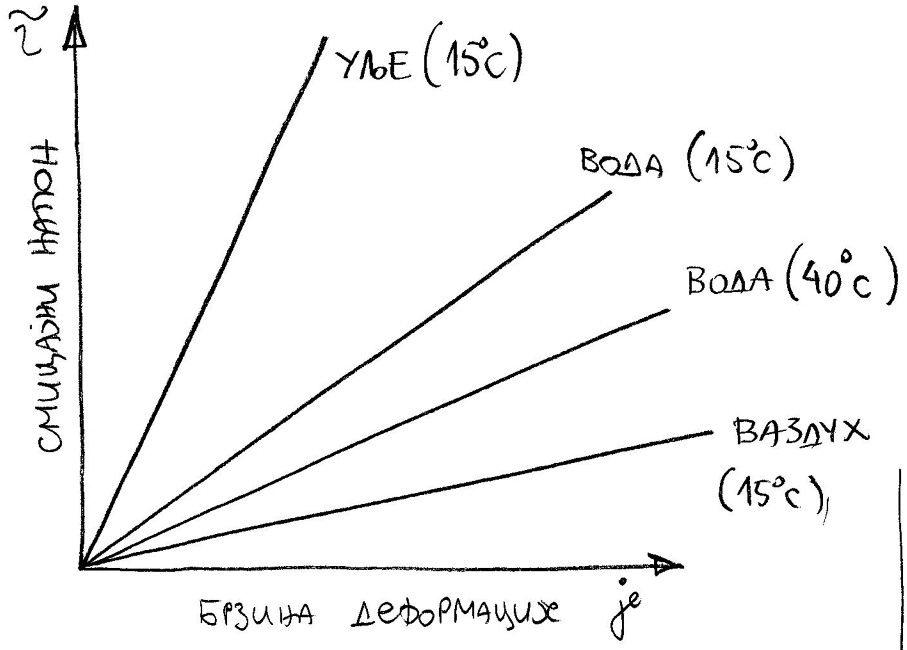


Дакле у ОПШТЕМ СЛУЧАЈУ: $\boxed{\tau \propto \frac{du}{dy}}$

За уобичајене флуиде који се срећу у техничкој пракси (вода, уље, ваздух, и сл.) тај коефицијент пропорционалности је ДИНАМИЧКА ВИСКОЗНОСТ флуида и обележава се са η

$$\boxed{\tau = \eta \frac{du}{dy}}$$

флуиди који задовољавају ову релацију зову се НЈУТНОВСКИ ФЛУИДИ!



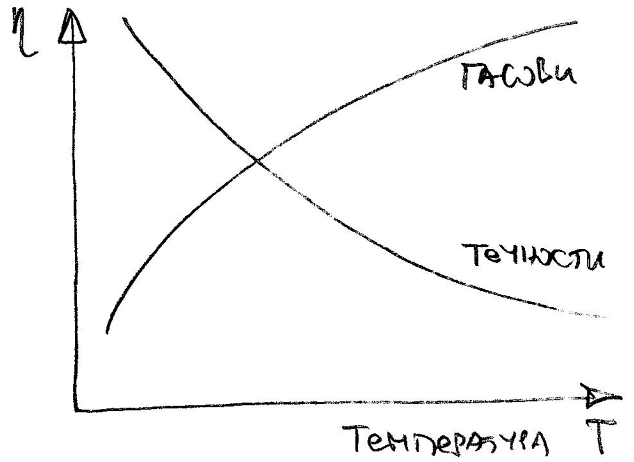
$\eta_{ulja} > \eta_{vode} > \eta_{vazd.}$

На температури од 15°C:

$$\boxed{\begin{aligned} \eta_{vode} &= 0{,}001\ Pas \\ \eta_{vazduha} &= 1{,}8 \cdot 10^{-5}\ Pas \end{aligned}}$$

$$\frac{\eta_{vode}}{\eta_{vazduha}} = \frac{10^{-3}}{1{,}8 \cdot 10^{-5}} = 55{,}56\ !$$

Динамичка вискозност течности ОПАДА са порастом температуре, док код гасова она РАСТЕ са порастом температуре!



За ГАСОВЕ се користи Сатерлендова (Sutherland) формула:

$$\eta = \frac{C T^{3/2}}{T + S}$$

Где су C и S константе које се одређују експериментално.

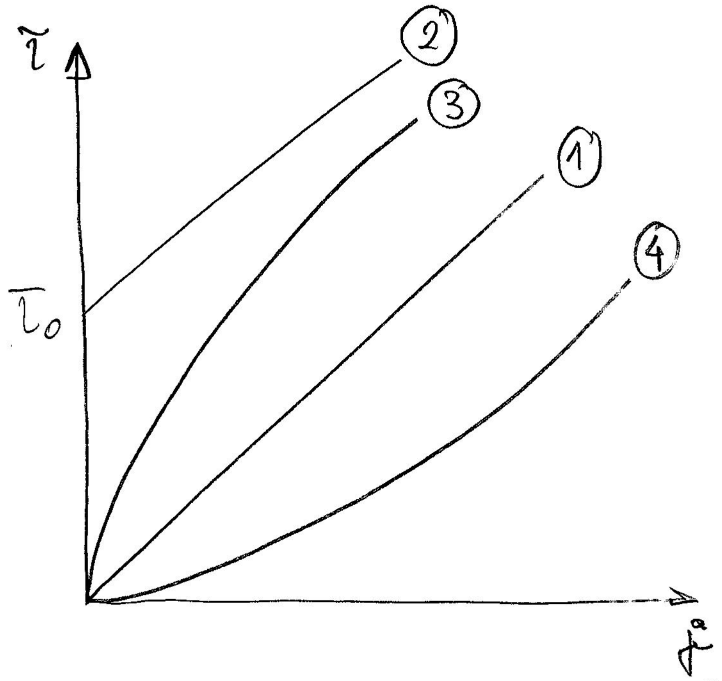
У ОКВИРУ ОВОГ КУРСА: $\boxed{\eta = const.}$ (температурске промене флуида неће бити значајне)

За течности (превасходно се мисли на нафту):

$$\eta = D e^{B/T},$$ D, B емпиријске константе

Постоји и велики број флуида за које не важи Њутнова релација ($\tau = \eta \dot{\gamma}$), као на пример КРВ, мешавине течности и емулзија, полимери, итд.

Наука која се бави истраживањем зависности $\tau = f(\dot{\gamma})$ се назива РЕОЛОГИЈА.



1 – ЊУТНОВСКИ ФЛУИД

2 – БИНГАМОВСКИ ФЛУИД

3 – ПСЕУДОПЛАСТИЧНИ ФЛУИД

4 – ДИЛАТАНТНИ ФЛУИД

$\boxed{\text{У ОВОМ КУРСУ ПРОУЧАВАМО САМО ЊУТНОВСКЕ ФЛУИДЕ!}}$

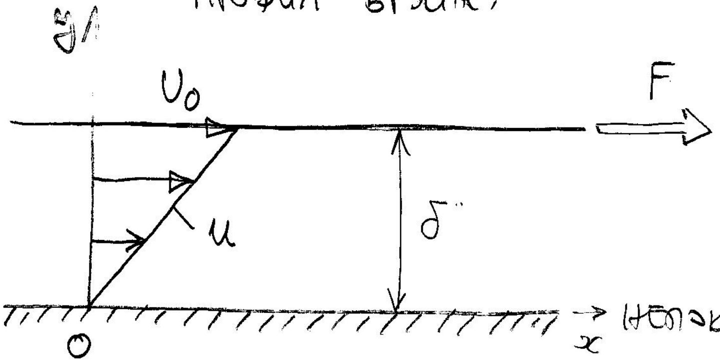
Поред ДИНАМИЧКЕ ВИСКОЗНОСТИ дефинише се и КИНЕМАТИЧКА ВИСКОЗНОСТ флуида као

$$\nu = \frac{\eta}{\rho} \quad \text{– КИНЕМАТИЧКА ВИСКОЗНОСТ ФЛУИДА}$$

На $15^\circ C$: $\nu_{vode} = 10^{-6}\, m^2/s$, $\nu_{vazduha} = 1{,}5 \cdot 10^{-5} \frac{m^2}{s}$

$$\frac{\nu_{vazduh}}{\nu_{vode}} = \frac{1{,}5 \cdot 10^{-5}}{10^{-6}} = 15\,!$$

ПРИМЕР: Одредити вредности смицајног напона на горњој и доњој плочи. Познати подаци: $\eta = 0.1\ Pas$, $U_0 = 1 m/s$, $\delta = 20 mm$. У простору између плоча се формира линеарни профил брзине.



→ НЕПОКРЕТНА ПЛОЧА

Профил брзине:

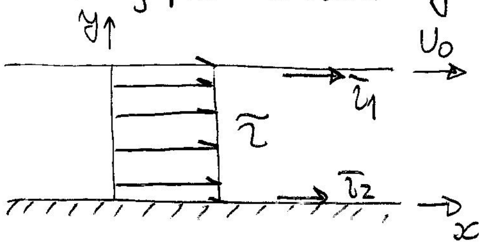
$$u = U_0 \frac{y}{\delta}$$

↓ расподела брзине између плоча

Расподела смицајног напона у простору између плоча:

$$\tau = \eta \frac{du}{dy} = \eta \frac{d}{dy}\left(U_0 \frac{y}{\delta}\right) = \eta \frac{U_0}{\delta} \quad \left(U_0 = const,\ \delta = const. \right)$$

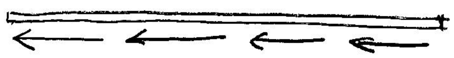
Смицајни напон је константан $[\tau \neq \tau(y)]$!



ГОРЊА ПЛОЧА:

$$\tau_1 = \tau|_{y=\delta} = \eta \frac{U_0}{\delta}$$

$$\tau_2 = \tau|_{y=0} = \eta \frac{U_0}{\delta}$$



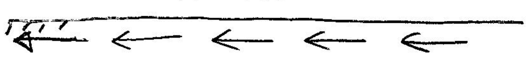
$$\tau_{w,1} = -\tau_1$$

ГОРЊА ПЛОЧА

$\tau_{w,1}$ - дејство ФЛУИДА НА ПЛОЧУ

τ_1 - дејство ПЛОЧЕ НА ФЛУИД

ФЛУИД



$$\tau_{w,2} = -\tau_2$$

ФЛУИД У КОНТАКТУ СА ДОЊОМ ПЛОЧОМ

τ_2 - дејство ФЛУИДА НА ДОЊУ ПЛОЧУ

$\tau_{w,2}$ - дејство ПЛОЧЕ НА ФЛУИД КОЈИ је у контакту са доњом плочом

Дакле, $\tau = \eta \frac{du}{dy} = \eta \frac{U_0}{\delta}$ представља ДЕЈСТВО ГОРЊИХ СЛОЈЕВА флуида на ДОЊЕ!

Пример: Посматра се случај струјања флуида између хоризонталних непокретних плоча. Профил брзине је дат изразом:

$$u = u_m \left[1 - \left(\frac{y}{h}\right)^2\right],$$ где је u_m брзина на половини растојања између плоча ($y = 0$)

Одредити:

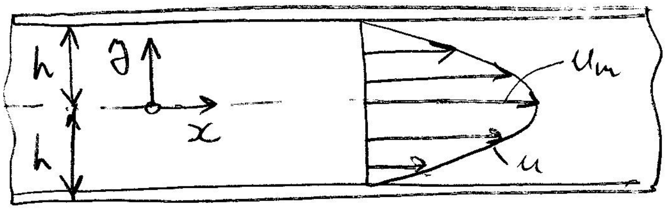
(а) смицајни напон на доњој плочи

(б) смицајни напон на половини растојања између плоча

$u_m = 0{,}9\ m/s$

$\eta = 2\ \frac{N\,s}{m^2} = 2\ Pa\,s$

$h = 5\ mm$



Расподела смицајног напона између плоча. $\tau = \tau(y)$

$$\boxed{\tau} = \eta \frac{du}{dy} = \eta \frac{d}{dy}\left[u_m - u_m \frac{y^2}{h^2}\right] = \boxed{-\eta \frac{2u_m}{h^2}\, y}$$

Смицајни напон на доњој плочи ($y = -h$)

$$\tau_1 = \tau(y)\Big|_{y=-h} = -\eta \frac{2u_m}{h^2}\, y\Big|_{y=-h} = \eta \frac{2u_m}{h}$$

$$\rightarrow \boxed{\tau_1} = 2\, \frac{2 \cdot 0.9}{5 \cdot 10^{-3}} = \boxed{720\ \frac{N}{m^2} = 720\ Pa}$$

Смицајни напон на половини растојања између плоча ($y = 0$):

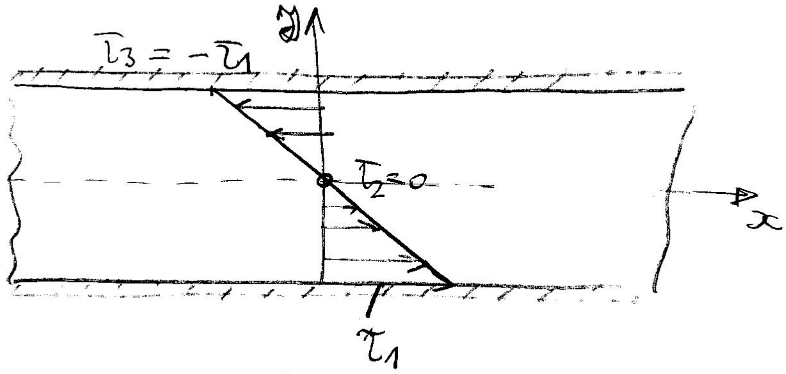
$$\boxed{\tau_2} = \tau(y)\Big|_{y=0} = -\eta \frac{2u_m}{h}\, y\Big|_{y=0} = \boxed{0}$$

Није тражено у задатку, али је врло илустративно:

$$\tau = \tau(y) = -\eta \frac{2u_m}{h^2} y$$ – РАСПОДЕЛА СМИЦАЈНОГ НАПОНА → <u>ЛИНЕАРНА ФУНКЦИЈА</u>

за $y < 0$: $\tau > 0$

за $y > 0$: $\tau < 0$ и за $y = 0$: $\tau = 0$

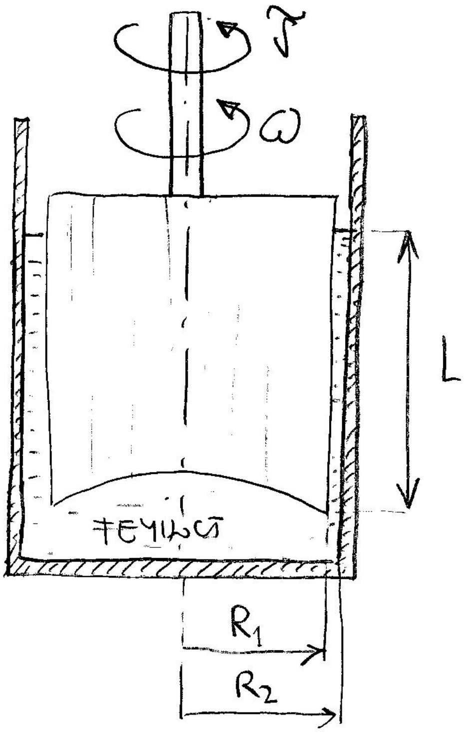


ДЕЈСТВО ГОРЊИХ СЛОЈЕВА (позитиван смер y-осе) НА ДОЊЕ СЛОЈЕВЕ

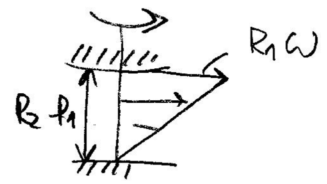
τ_1 – дејство флуида на доњу плочу

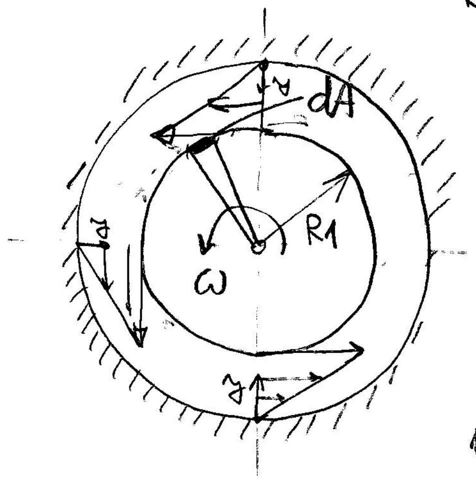
$\tau_3 = -\tau_1$ – дејство горње плоче на флуид

<u>ПРИМЕР:</u> Вискозност течности се може мерити коришћењем тзв. обртног вискозиметра приказаног на слици. Принцип његовог рада је следећи: спољашњи цилиндар је непокретан док унутрашњи ротира константном брзином ω. Да би се то остварило, неопходно је деловати обртним моментом T на вратило унутрашњег цилиндра. Мерењем ω и T, могуће је израчунати динамичку вискозност течности. Извести израз из кога се може израчунати вискозност, сматрајући следеће величине познатим: ω, T, L, R_1, R_2. Претпоставити да се у простору између цилиндара формира линеарни профил брзине.



Поглед одозго:





Услов лепљења!

Спољашњи цил:

$u = 0$

Унутрашњи цил:

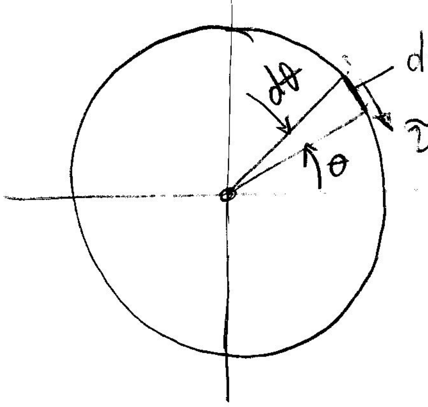
$u = R_1\omega$

На елементарној површи унутрашњег цилиндра делује смицајни напон τ:

$$\tau = \eta \frac{du}{dy} \quad ; \quad u = R_1\omega \frac{y}{R_2-R_1}$$

$$\rightarrow \quad \tau = \eta \frac{R_1}{R_2-R_1}\,\omega$$

Сила трења између унутрашњег цилиндра и флуида (делује на површи dA):



$$dF_\eta = \tau\, dA = \eta \frac{R_1^2 L\omega}{R_2-R_1}\, d\theta$$

Момент силе dF_η у односу на осу ротације:

$$dM_\eta = R_1\, dF_\eta = \eta \frac{R_1^3 L\omega}{R_2-R_1}\, d\theta$$

Укупни момент силе трења:

$$M_\eta = \int dM_\eta = \int_0^{2\pi} \underbrace{\eta \frac{R_1^3 L}{R_2-R_1}}_{\text{const.}}\, d\theta = 2\pi\eta \frac{R_1^3 L\omega}{R_2-R_1}$$

Како је $\omega = \text{const.} \Rightarrow \mathcal{T} = M_\eta$ одакле је:

$$\boxed{\eta = \frac{1}{2\pi}\,\frac{\mathcal{T}(R_2-R_1)}{R_1^3 L\omega}}$$