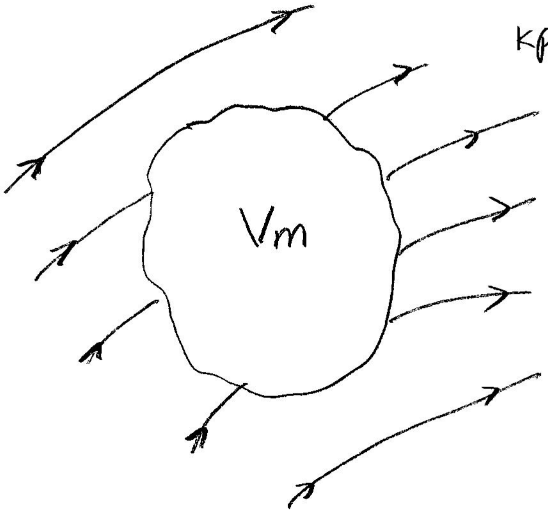
4. КИНЕМАТИКА ФЛУИДА

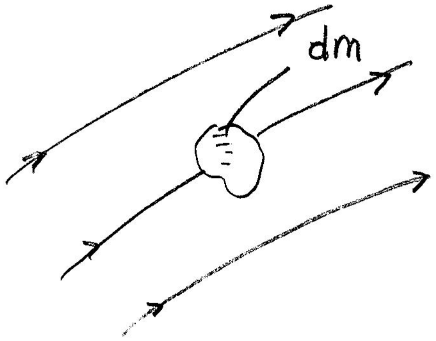
4.1 НАЧИНИ ОПИСА СТРУЈНОГ ПОЉА

Постоје 2 начина описа струјног поља. То су:

- Лагранжева и
- Ојлерова метода (или приступ)

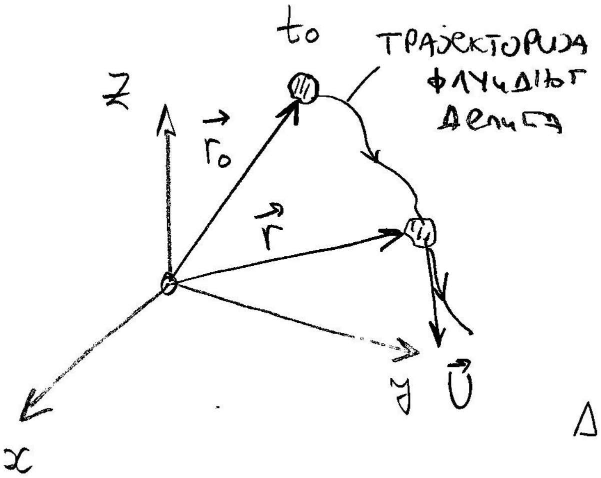
Лагранжева метода: праћење дате масе флуида (материјалне запремине) или флуидног делића при кретању у простору





Флуидни делић чије се кретање прати

МАТЕРИЈАЛНА ЗАПРЕМИНА садржи увек исте флуидне делиће $\longmapsto$ Она мења свој облик, $V_m = V_m(t)$ али се њена маса не мења



$$\vec{r} = \vec{r}(\vec{r}_0, t)$$

$\vec{r}_0$ – вектор положаја флуидног делића у тренутку t_0

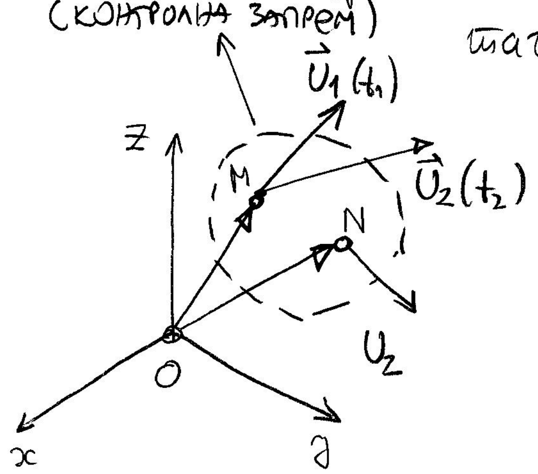
$$\vec{U} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\Delta \vec{r} = \vec{r}(\vec{r}_0, t + \Delta t) - \vec{r}(\vec{r}_0, t)$$

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \qquad x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t)$$

$$\vec{U} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k} \equiv \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}$$

Ојлерова метода: праћења промена физичких величина у фиксној области простора кроз коју струји флуид (или праћење промене у фиксној просторној тачки док кроз њу пролазе флуидни делићи)



M и N – фиксне тачке

$$\boxed{\vec{U} = \vec{U}(\vec{r}, t) = \vec{U}(x, y, z, t)}$$

Поље физичке величине (брзине) – непрекидна функција координата и времена –

x, y, z – фиксне координате (нису функција t!)

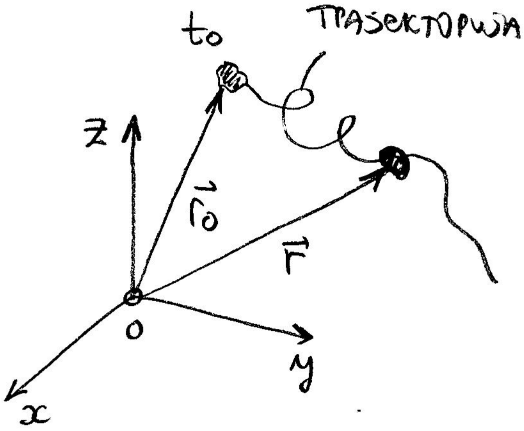
$$\vec{U} = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k}$$

$u = u(x, y, z, t)$; $v = v(x, y, z, t)$ и $w = w(x, y, z, t)$

Векторско поље је описано са три скаларна поља (пројекције тог вектора на осе координатног система).

Трајекторија флуидног делића

Трајекторија је линија коју флуидни делић „напише" током свог кретања.



$$\vec{U} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$ – Лагранжев приступ

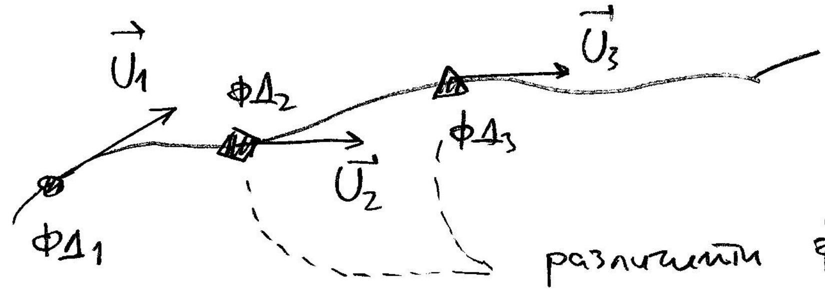
$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= u(\vec{r}_0, t) \\ \frac{dy}{dt} &= v(\vec{r}_0, t) \\ \frac{dz}{dt} &= w(\vec{r}_0, t) \end{aligned}\right\} \rightarrow \boxed{\begin{aligned} x &= x(\vec{r}_0, t) \\ y &= y(\vec{r}_0, t) \\ z &= z(\vec{r}_0, t) \end{aligned}}$$

Елиминацијом времена t из система једначина може се добити једначина трајекторије $z = z(x, y)$ или $f(x, y, z) = 0$

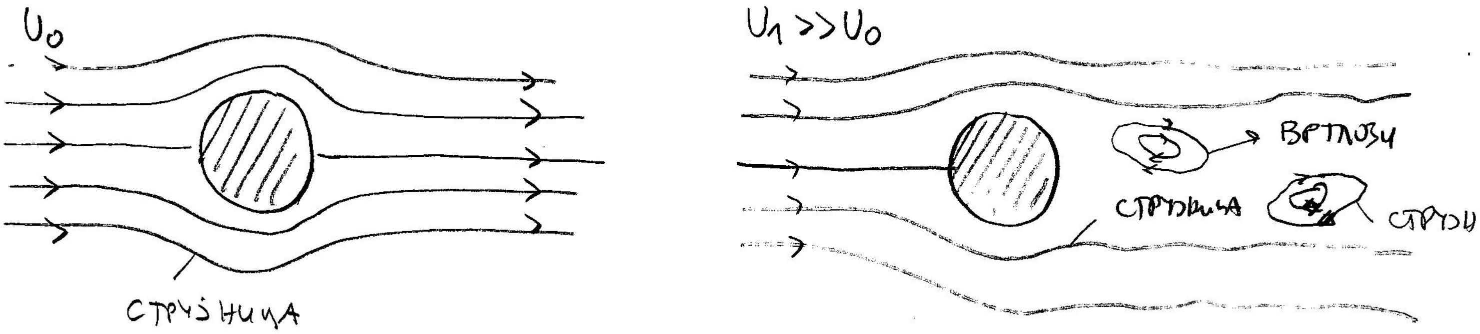
Струјнице

Математичка дефиниција: Струјнице су векторске линије брзинског поља $\vec{U} = \vec{U}(x,y,z,t)$

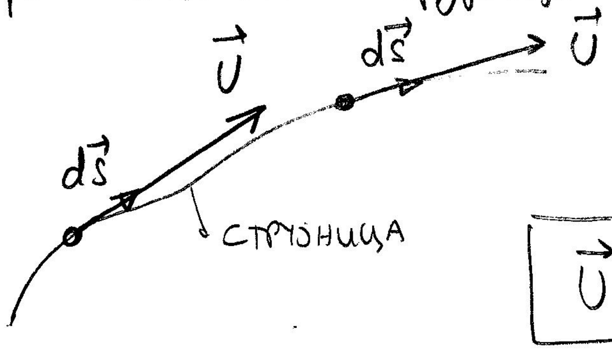
Физичка дефиниција: Струјница је линија која у тренутку времена t спаја <u>различите флуидне делиће</u> са особином да је њихов вектор брзине у правцу тангенте на ту линију.



Струјна слика приликом опструјавања цилиндра



Једначина струјнице се једноставно одређује из њене дефиниције, односно услова да је $\vec{U} \parallel d\vec{s}$, где је $d\vec{s}$ усмерени елемент струјнице



$\vec{a}$ и $\vec{b}$ колинеарни вектори →

→ $\vec{a} \times \vec{b} = 0$

↳ векторски производ

$$\boxed{\vec{U} \times d\vec{s} = 0}$$ јдн. струјнице

$$\vec{U} \times d\vec{s} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u & v & w \\ dx & dy & dz \end{vmatrix} = (v\,dz - w\,dy)\vec{i} + (w\,dx - u\,dz)\vec{j} + (u\,dy - v\,dx)\vec{k}$$

$$(v\,dz - w\,dy)\vec{i} + (w\,dx - u\,dz)\vec{j} + (u\,dy - v\,dx)\vec{k} = \vec{0}$$

$$\rightarrow \left.\begin{aligned} v\,dz - w\,dy &= 0 \\ w\,dx - u\,dz &= 0 \\ u\,dy - v\,dx &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} \frac{dz}{w} &= \frac{dy}{v} \\ \frac{dz}{w} &= \frac{dx}{u} \\ \frac{dx}{u} &= \frac{dy}{v} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dx}{u(x,y,z,t)} = \frac{dy}{v(x,y,z,t)} = \frac{dz}{w(x,y,z,t)}}$$

Систем диференцијалних једначина које одређују једначину струјнице: $f(x,y,z,t) = 0$

РАВАНСКО СТРУЈАЊЕ: $w = 0$, $\frac{\partial}{\partial z}(\cdot) = 0$

↳ струјање се одвија у равни Oxy

$$\Rightarrow \vec{U} = u\vec{i} + v\vec{j} \Rightarrow \boxed{\frac{dx}{u(x,y,t)} = \frac{dy}{v(x,y,t)}}$$

јдн струјнице за случај раванског струјања

$$\vec{U} \times d\vec{l} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & 0 \\ u & v & 0 \\ dx & dy & 0 \end{vmatrix}$$

$$\rightarrow \boxed{u\,dy - v\,dx = 0}$$

ДОДАТАК. факултативно!

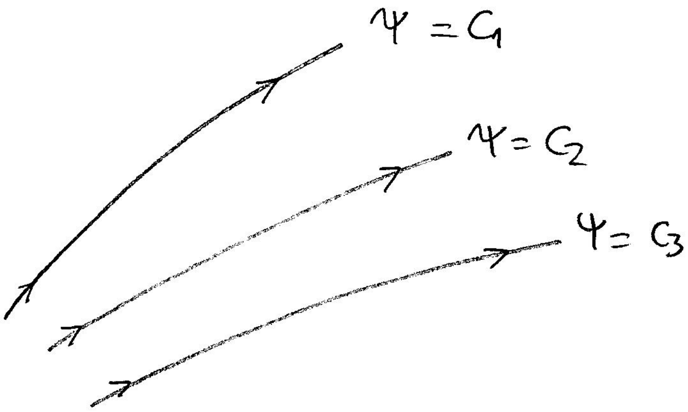
Нека је $\psi = \psi(x,y)$ – СТРУЈНА ФУНКЦИЈА

Тотални диференцијал функције $\psi(x,y)$:

$$\left.\begin{aligned} d\psi &= \frac{\partial\psi}{\partial x}dx + \frac{\partial\psi}{\partial y}dy \\ -v\,dx &+ u\,dy = 0 \end{aligned}\right\} \rightarrow \boxed{u = \frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial\psi}{\partial x}}$$

$$\text{и} \quad d\psi = 0 \Rightarrow \boxed{\psi = \psi(x,y) = \text{const.}}$$

једначина струјница!



Дуж струјница струјна функција има константну вредност, тако да је једначина струјница такође

$$\boxed{\psi = \text{const.}}$$

Постоји додатни услов који брзинско поље МОРА ДА ЗАДОВОЉИ да би се могла дефинисати струјна функција!

$$d\psi = \underbrace{\frac{\partial \psi}{\partial x}}_{\frac{\partial}{\partial y}} dx + \underbrace{\frac{\partial \psi}{\partial y}}_{\frac{\partial}{\partial x}} dy \xrightarrow[\text{да } \psi(x,y)]{\text{услов}} \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)$$

може да се представи преко овог диференцијала

$$-v\,dx + u\,dy = d\psi \Longrightarrow \boxed{\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial y}} \;!$$

Појмови стационарног и нестационарног струјања

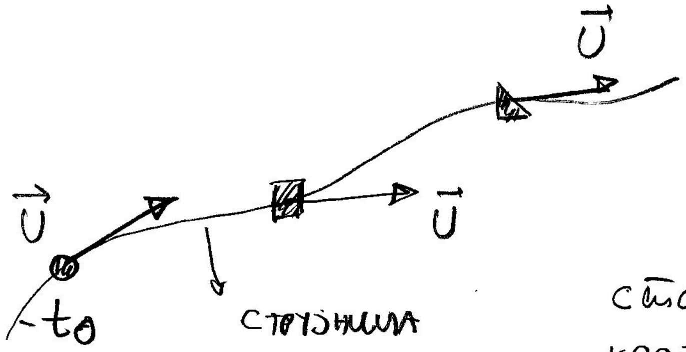
Стационарно струјање: ниједна физичка величина се не мења у времену (у свакој фиксној тачки простора има исту вредност у сваком временском тренутку)

Општи случај: $f = f(x,y,z,t) \xrightarrow[\text{струјање}]{\text{стацион.}} f = f(x,y,z)$

$$\rightarrow \boxed{\frac{\partial}{\partial t}(\ldots) = 0}$$ стационарно струјање

$$\frac{\partial}{\partial t}(\ldots) \neq 0$$ нестационарно струјање

Код СТАЦИОНАРНОГ СТРУЈАЊА трајекторија и струјница се поклапају!



На слици су приказа три различита флуидна делића на једној струјници у тренутку t_0. У случају стационарног струјања они ће кретати дуж струјнице.

Након неког времена t ⊘ ће доћи у тачку где је у временском тренутку t_0 био делић ▨, крећући се дуж струјнице.

$\boxed{\text{Пример:}}$ Задато је брзинско поље преко својих пројекција:

$$u = \frac{x}{1+t}, \quad v = \frac{y}{1+2t}, \quad w = 0.$$

Одредити и нацртати СТРУЈНИЦУ и ТРАЈЕКТОРИЈУ која пролази кроз тачку $(x_0, y_0, 0)$, где је $x_0 > 0$, $y_0 > 0$ у временском тренутку $t_0 = 0\,s$

РЕШЕЊЕ:

На основу задатог поља закључује се да је струјање:

- РАВАНСКО $\left(w = 0 \text{ и } \frac{\partial}{\partial z} = 0\right)$ и
- НЕСТАЦИОНАРНО

Једначина струјнице: $\vec{U} \times d\vec{l} = 0 \xrightarrow[\text{СТРУЈАЊЕ}]{\text{РАВАНСКО}} \frac{dx}{u} = \frac{dy}{v}$

$$\frac{dx}{\frac{x}{1+t}} = \frac{dy}{\frac{y}{1+2t}} \Rightarrow (1+t)\frac{dx}{x} = (1+2t)\frac{dy}{y}$$

Код одређивања једначине струјнице у случају нестационарног струјања време t је параметар, тј. x и y НЕ зависе од t → Ојлеров приступ: x, y, z, t – независне величине.

$$\int (1+t)\frac{dx}{x} = \int (1+2t)\frac{dy}{y} + C_1$$

$$\rightarrow \quad \int \frac{dy}{y} = \frac{1+t}{1+2t}\int \frac{dx}{x} + \ln C$$

$$\ln y = \frac{1+t}{1+2t}\ln x + \ln C$$

$$\ln y = \ln\left[C\, x^{\frac{1+t}{1+2t}}\right] \rightarrow \boxed{y = C\, x^{\frac{1+t}{1+2t}}}$$

– једначина фамилија струјница (разне вредности константе C) – струјна слика у разним временским тренуцима

Струјница која у тренутку времена $t = t_0 = 0\,s$ пролази кроз тачку (x_0, y_0):

ОПШТА ЗАВИСНОСТ:

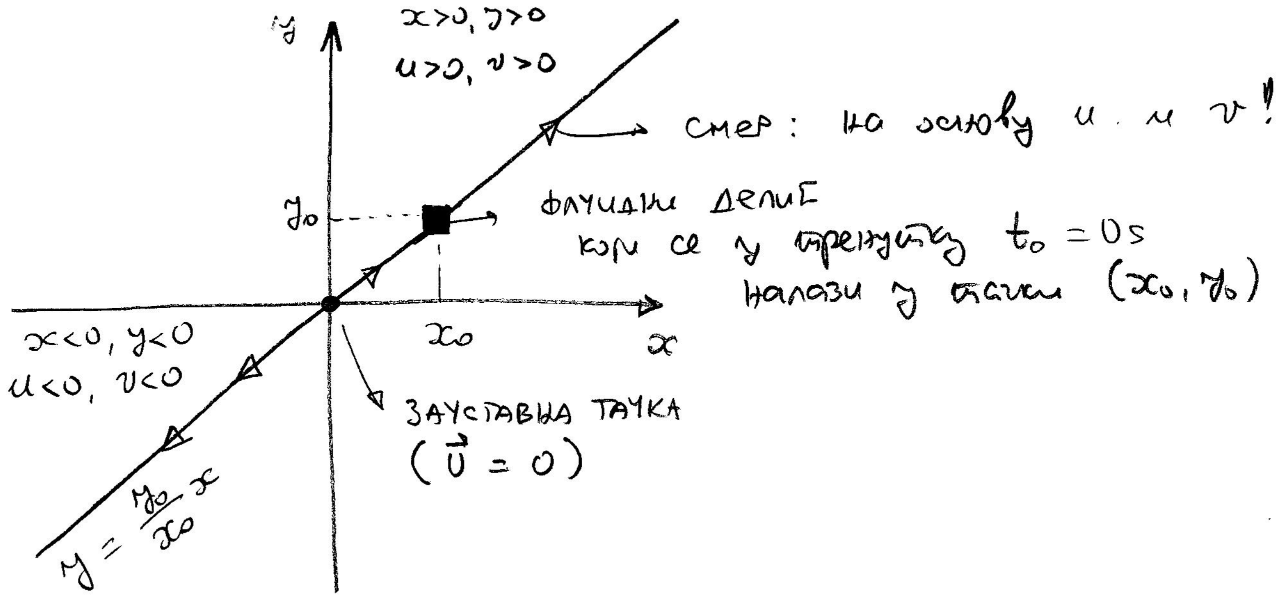
$$y = C\, x^{\frac{1+t}{1+2t}} \xrightarrow[t=0]{\text{временски тренутак}} y = C\,x \xrightarrow[\text{кроз } x_0, y_0]{\text{пролази}}$$

$$y_0 = C\,x_0 \longrightarrow C = \frac{y_0}{x_0}$$

Тражена струјница: $\boxed{y = \frac{y_0}{x_0}\,x}$

У питању је ПРАВА која пролази кроз координатни почетак и тачку (x_0, y_0). Поље брзине у тренутку $t = 0\,s$:

$$u = x \quad и \quad v = y$$



Одређивање једначине трајекторије:

ЛАГРАНЖЕВ ПРИСТУП: $x = x(t)$, $y = y(t)$!

$$u = \frac{dx}{dt} = \frac{x}{1+t} \Rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{dt}{1+t} \quad \dots (1)$$

$$v = \frac{dy}{dt} = \frac{y}{1+2t} \Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{1}{2}\frac{dt}{\frac{1}{2}+t} \quad \dots (2)$$

(1) $$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{dt}{1+t} + \ln C_1 \rightarrow \ln x = \ln(1+t) + \ln C_1$$

$$\rightarrow \boxed{x = C_1(1+t)}$$

(2) $$\int \frac{dy}{y} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\frac{1}{2}+t} + \ln C_2' \rightarrow \ln y = \frac{1}{2}\ln\left(t+\frac{1}{2}\right) + \ln C_2'$$

$$y = C_2'\left(\frac{2t+1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow \boxed{y = C_2\sqrt{2t+1}} \quad C_2 = \frac{C_2'}{\sqrt{2}}$$

Константе C_1 и C_2 одређујемо из почетних услова:

$t = 0$: $x = x_0$ и $y = y_0$

$$\rightarrow C_1 = x_0 \quad \text{и} \quad C_2 = y_0$$

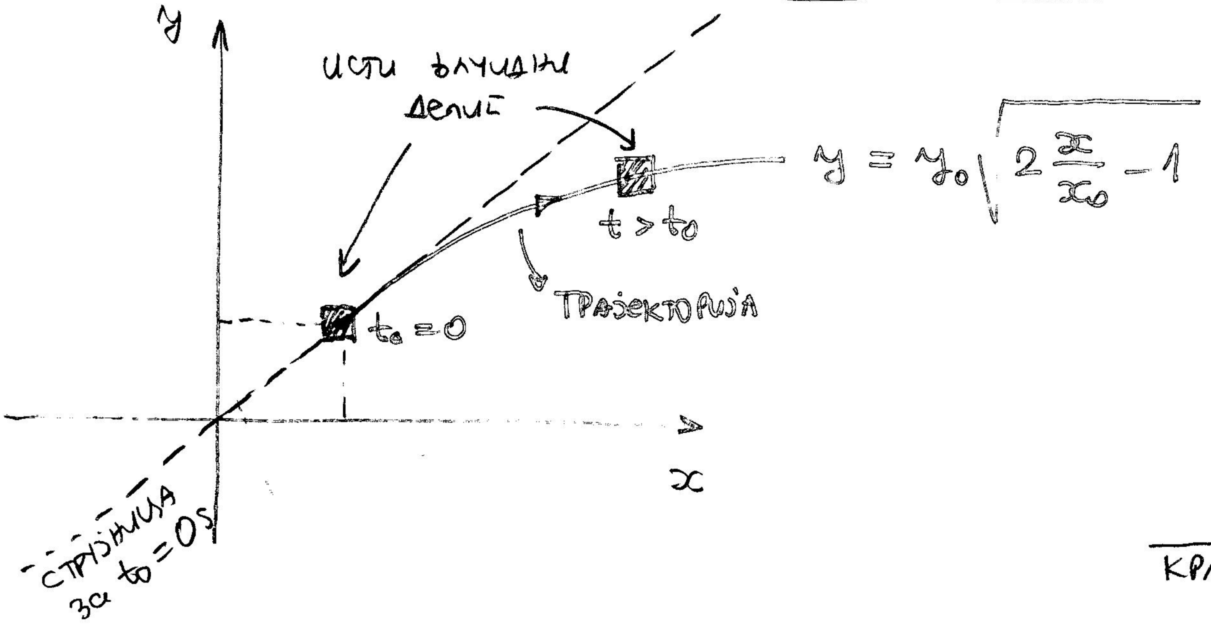
$$\rightarrow \boxed{x = x_0(1+t)} \quad \boxed{y = y_0\sqrt{1+2t}}$$

Елиминација времена t:

$$x = x_0(1+t) \rightarrow t = \frac{x}{x_0} - 1$$

$$y = y_0(1+2t)^{1/2} \rightarrow y = y_0\left[1 + 2\left(\frac{x}{x_0} - 1\right)\right]^{1/2}$$

$$y = y_0\left[2\frac{x}{x_0} - 1\right]^{1/2} \rightarrow \boxed{y^2 = y_0^2\left(2\frac{x}{x_0} - 1\right)}$$



КРАЈ ПРИМЕРА

4.2 Масени и запремински проток

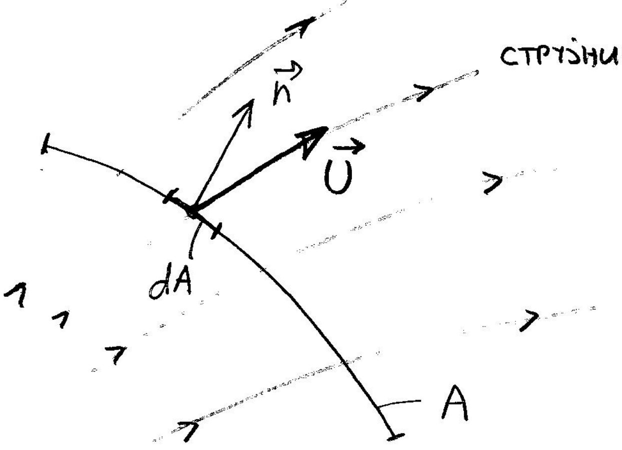
Масени проток: маса флуида која у јединици времена прође (протекне) кроз неку површ.

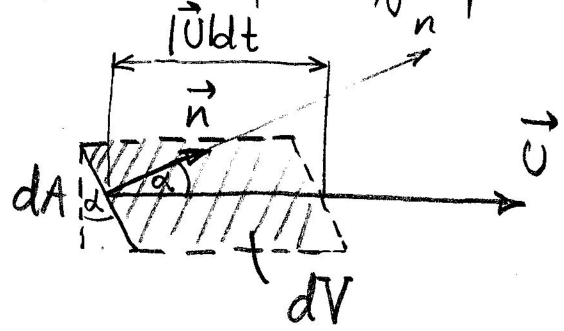
$\dot{m}\left[\frac{kg}{s}\right]$ - масени проток

Запремински проток: запремина флуида која у јединици времена прође (протекне) кроз неку површ.

$\dot{V}\left[\frac{m^3}{s}\right]$ - запремински проток

Посматра се произвољна површ A кроз коју протиче флуид.





dV – запремина која је протекла кроз површ dA за време dt (закошени цилиндар)

$$dV = (dA\cos\alpha)\underbrace{|\vec{U}|\,dt}_{\text{висина}} \rightarrow \underbrace{\frac{dV}{dt}}_{d\dot{V}} = |\vec{U}|\cos\alpha\, dA$$

$\vec{n}$ – јединични вектор нормале $|\vec{n}| = 1$

$d\dot{V}$ – елементарни запремински проток

$$\vec{U}\cdot\vec{n} = |\vec{U}||\vec{n}|\cos(\vec{U},\vec{n}) = U\cos\alpha$$

$\cdot$ – оператор скаларног множења два вектора

Запремински проток кроз површ dA: $d\dot{V} = \vec{U}\cdot\vec{n}\,dA$

Запремински проток кроз површ A (сума елементарних протока)

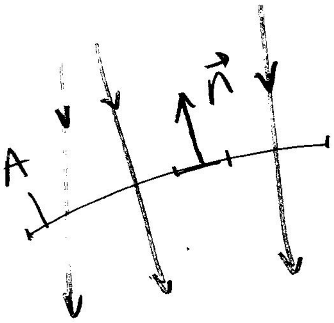
$$\rightarrow \boxed{\dot{V} = \iint_A \vec{U}\cdot\vec{n}\,dA}$$

Елементарни масени проток: $d\dot{m} = \rho\vec{U}\cdot\vec{n}\,dA$

(маса $dm = \rho dV$)

Масени проток кроз површ A:

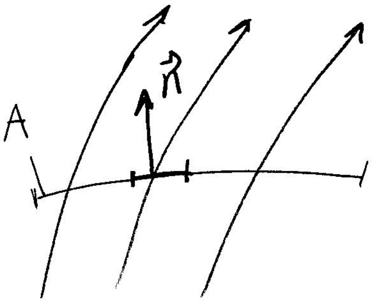
$$\boxed{\dot{m} = \iint_A \rho\vec{U}\cdot\vec{n}\,dA}$$



$\vec{U} \circ \vec{n} < 0$

$(90^\circ < \alpha < 180^\circ)$

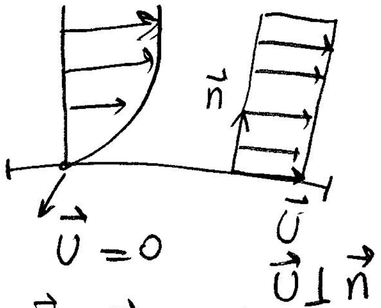
$\boxed{\dot{V} < 0}$



$\vec{U} \circ \vec{n} > 0$

$(0^\circ < \alpha < 180^\circ)$

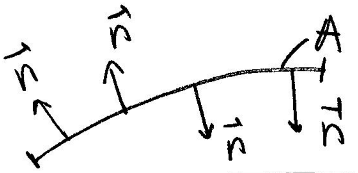
$\boxed{\dot{V} > 0}$



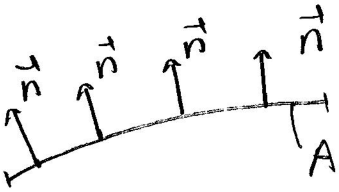
$\vec{U} \perp \vec{n} \rightarrow \vec{U} \cdot \vec{n} = 0$

$\boxed{\dot{V} = 0}$

<u>ВАЖНО</u>: Вектор нормале површи A има исти смер на целој површи A

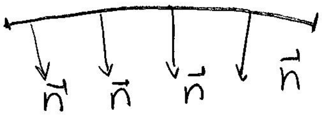


ПОГРЕШНО!



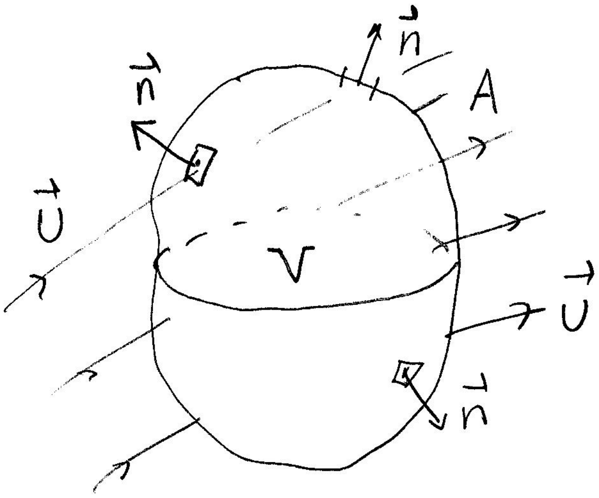
ИСПРАВНО

или



ТАКОЂЕ ИСПРАВНО

Код затворених површи A, договор је да се усваја спољашњи вектор нормале, усмерен од површи ка околини



A - затворена површ

На делу површи A кроз који флуид улази у запремину V:

$\vec{U} \circ \vec{n} < 0$

На делу површи кроз који флуид излази из запремине V:

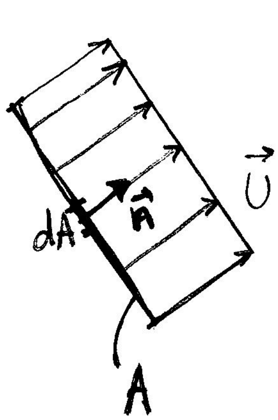
$\vec{U} \circ \vec{n} > 0$

$$\dot{V} = \oint\!\!\oint_A \vec{U} \circ \vec{n}\, dA = \iint_{A_{in}} \vec{U} \circ \vec{n}\, dA + \iint_{A_{out}} \vec{U} \circ \vec{n}\, dA$$

$A = A_{in} + A_{out}$

Специјалан случај:

ако је на целој површи A $\vec{U} = const.$ и ако је и $\vec{U} \parallel \vec{n}$ (вектори $\vec{U}$ и $\vec{n}$ су колинеарни)



$$\dot{V} = \iint_A \underbrace{\vec{U} \circ \vec{n}}\, dA = \iint_A U\, dA =$$

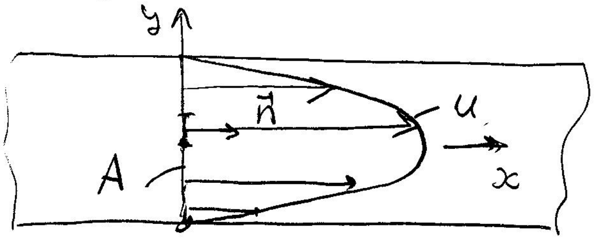
U - интензитет вектора $\vec{U}$

$$\overset{U=const}{\downarrow}{=} \; U \iint_A dA \rightarrow \boxed{\dot{V} = U A}$$

Слично, ако је и на површи A и $\rho = const.$ у свакој тачки површи, онда је масени проток кроз ту површ

$$\dot{m} = \rho U A$$

Случај струјања вискозног флуида у цеви (или каналу)



u - профил брзине

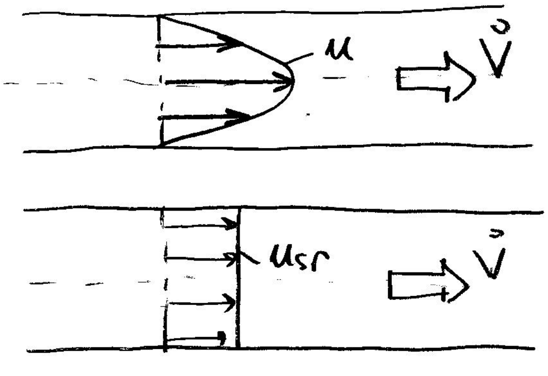
$\vec{U} = u\vec{i}$, $\vec{U} \parallel \vec{n}$

тј $\vec{n} = \vec{i}$

$$\dot{V} = \iint_A \vec{U} \circ \vec{n}\, dA = \iint_A u\, dA,$$ али u није константно на површи A

Дефиниција средње брзине:

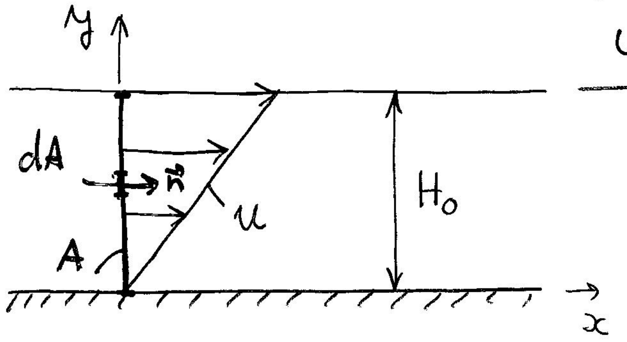
Замишљена, константна брзина у попречном пресеку која остварује исти запремински проток као стварни профил брзине

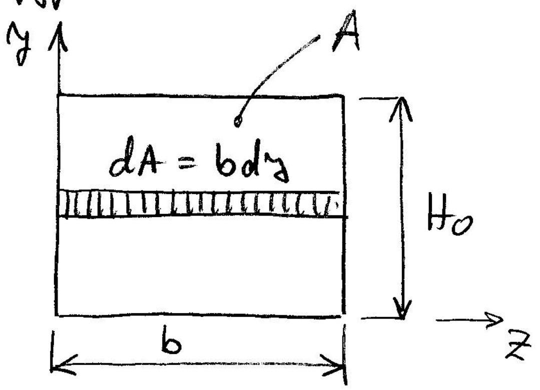


$$\dot{V} = \iint_A u\, dA = u_{sr} A$$

$$\boxed{u_{sr} = \frac{1}{A} \iint_A u\, dA}$$

Пример: Одредити запремински проток између плоча са пример приказан на слици (Куетово струјање).





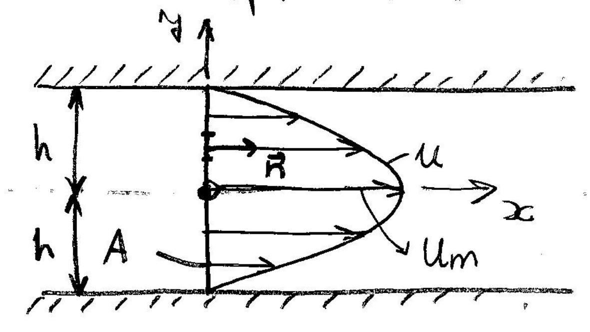
$$\dot{V} = \iint_A \vec{U}\circ\vec{n}\, dA = \iint_A u\, dA = \int_0^{H_0} \underbrace{\frac{U_0}{H_0} y}_{u}\, \underbrace{b\, dy}_{dA} = \frac{U_0 b}{H_0}\int_0^{H_0} y\, dy$$

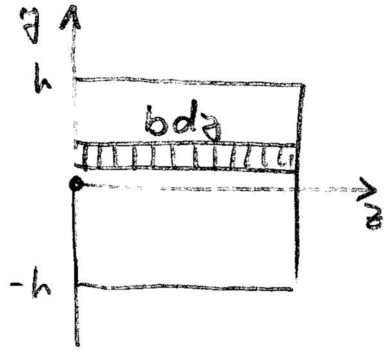
$$= \frac{U_0 b}{H_0}\frac{y^2}{2}\Big|_0^{H_0} = \frac{1}{2} U_0 b H_0$$

На основу дефиниције средње брзине следи:

$$\dot{V} = u_{sr} A = u_{sr} b H_0 \implies \boxed{u_{sr} = \frac{U_0}{2}}$$

Пример: Одредити запремински проток за случај струјања приказан на слици:





Профил брзине је задат:

$$u = U_m\left(1 - \frac{y^2}{h^2}\right)$$

U_m - брзина на половини растојања између плоча

$$\dot{V} = \iint_A \vec{U}\circ\vec{n}\, dA = \iint_A u\, dA$$

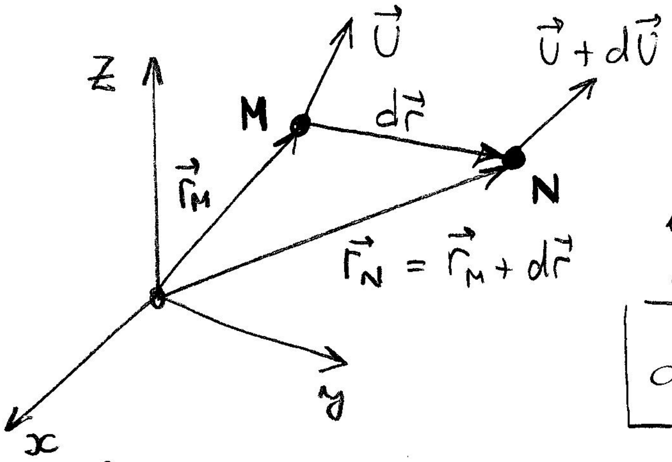
$$\dot{V} = \int_{-h}^{h} U_m\left(1 - \frac{y^2}{h^2}\right) b\, dy = U_m b\int_{-h}^{h}\left(1 - \frac{y^2}{h^2}\right) dy =$$

$$= U_m b\left[y - \frac{y^3}{3h^2}\right]_{-h}^{h} = U_m b\left[h - \frac{h}{3} - \left(-h + \frac{h}{3}\right)\right]$$

$$= \frac{4}{3} U_m b h = \frac{2}{3} U_m \underbrace{b\cdot 2h}_{A} \implies \boxed{u_{sr} = \frac{2}{3} U_m}$$

4.3 КРЕТАЊЕ И ДЕКОМПОЗИЦИЈА БРЗИНЕ ФЛУИДНОГ ДЕЛИЋА

Посматрамо две блиске тачке M и N у струјном пољу које се налазе на растојању $d\vec{r}$



$$\vec{U}_N = \vec{U}_M + d\vec{U}$$

Елементарни прираштај брзине $d\vec{U}$ између две блиске тачке се може написати у облику:

$$\boxed{d\vec{U} = (d\vec{r}\circ\nabla)\vec{U}} \equiv d\vec{r}\circ\nabla\vec{U}$$

(Погледај део из статике флуида: $dp = d\vec{r}\circ\nabla p$)

Дефиниција тоталног прираштаја (диференцијала) за функцију $\vec{U} = \vec{U}(x,y,z)$:

$$d\vec{U} = \frac{\partial\vec{U}}{\partial x}dx + \frac{\partial\vec{U}}{\partial y}dy + \frac{\partial\vec{U}}{\partial z}dz$$

Скаларни оператор $d\vec{r}\circ\nabla$:

$$d\vec{r}\circ\nabla = \left(dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j} + dz\,\vec{k}\right)\circ\left(\vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}\right) =$$

$$= dx\frac{\partial}{\partial x} + dy\frac{\partial}{\partial y} + dz\frac{\partial}{\partial z}$$

$(d\vec{r}\circ\nabla)\vec{U}$ → оператор $d\vec{r}\circ\nabla$ примењен на $\vec{U}$

$$(d\vec{r}\circ\nabla)\vec{U} = dx\frac{\partial\vec{U}}{\partial x} + dy\frac{\partial\vec{U}}{\partial y} + dz\frac{\partial\vec{U}}{\partial z} \equiv \frac{\partial\vec{U}}{\partial x}dx + \frac{\partial\vec{U}}{\partial y}dy + \frac{\partial\vec{U}}{\partial z}dz \equiv d\vec{U}$$

Дакле, доказано је да је:

$$d\vec{U} = (d\vec{r}\circ\nabla)\vec{U} \xleftrightarrow{\text{АНАЛОГИЈА}} dp = (d\vec{r}\circ\nabla)p$$

$$d\vec{U} = d\vec{r}\circ\underbrace{\mathrm{grad}\,\vec{U}}_{\text{тензор 2. реда}} \longleftrightarrow dp = d\vec{r}\circ\underbrace{\mathrm{grad}\,p}_{\text{вектор}}$$

$$d\vec{U} = \frac{\partial \vec{U}}{\partial x}dx + \frac{\partial \vec{U}}{\partial y}dy + \frac{\partial \vec{U}}{\partial z}dz, \qquad \vec{U} = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k}$$

Елементарни прираштаји пројекција u, v, w

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz$$

$$dv = \frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy + \frac{\partial v}{\partial z}dz$$

$$dw = \frac{\partial w}{\partial x}dx + \frac{\partial w}{\partial y}dy + \frac{\partial w}{\partial z}dz$$

ФАКУЛТАТИВНО:

Записано у матричном облику, преко вектор-врста

$$\underbrace{(du \;\; dv \;\; dw)}_{d\vec{U}} = \underbrace{(dx \;\; dy \;\; dz)}_{d\vec{r}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}}_{\nabla\vec{U}}$$

$\nabla\vec{U} \to$ тензор 2. реда

$(\nabla\vec{U} \equiv \mathrm{grad}\,\vec{U})$

Ако уведемо индексно означавање (нотацију):

$(x, y, z) \longrightarrow (x_1, x_2, x_3) \qquad (u, v, w) \longrightarrow (u_1, u_2, u_3)$

прираштај i-те пројекције du_i $(i = 1, 2, 3)$ је:

$$du_i = \frac{\partial u_i}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial u_i}{\partial x_2}dx_2 + \frac{\partial u_i}{\partial x_3}dx_3 = \sum_{j=1}^{3}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}dx_j$$

Следећи АЈНШТАЈНОВУ КОНВЕНЦИЈУ О СУМИРАЊУ ознака за суму $\sum_{j=1}^{3}$ <u>се ИЗОСТАВЉА</u>, и подразумева се да се по индексу који се понавља врши сумирање од 1 до 3.

$$du_i = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx_j \quad \xleftrightarrow[\text{конвенција о } \Sigma]{\text{Ајнштајн}} \quad du_i = \frac{\partial u_i}{\partial x_{\underline{j}}} dx_{\underline{j}}$$

поновљени индекс

За „поновљени индекс" може се користити било које слово абецеде

$$du_i = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx_j \equiv \frac{\partial u_i}{\partial x_n} dx_n \equiv \frac{\partial u_i}{\partial x_k} dx_k \equiv \frac{\partial u_i}{\partial x_m} dx_m$$

Неколико примера индексне нотације:

$$\vec{a} \circ \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = a_i b_i \equiv a_j b_j \equiv a_k b_k$$

$$\nabla p = \rho \vec{f} \rightarrow \operatorname{grad} p = \rho \vec{f} \rightarrow \frac{\partial p}{\partial x_i} = \rho f_i$$

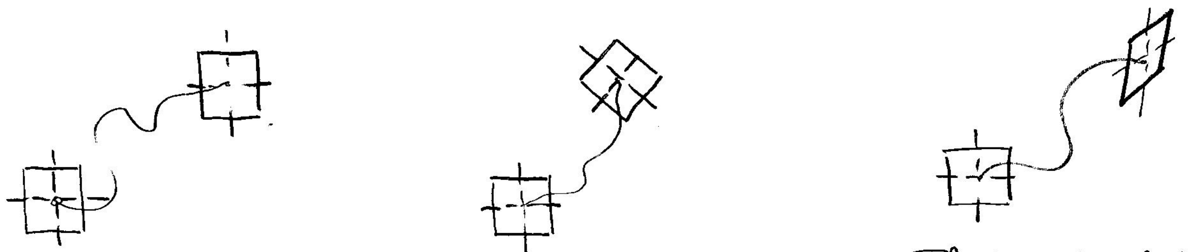
Очигледно је да је компонента $\nabla \vec{U}$, тј. $\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ веома важна величина при кретању флуида. Она се раздваја на два дела:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)}_{S_{ij}} + \underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)}_{\omega_{ij}}$$

S_{ij} – КОМПОНЕНТА ТЕНЗОРА БРЗИНЕ ДЕФОРМИСАЊА

ω_{ij} – КОМПОНЕНТА ТЕНЗОРА ВРТЛОЖНОСТИ

$$\boxed{\text{КРЕТАЊЕ ФЛУИДНОГ ДЕЛИЋА} = \text{ТРАНСЛАЦИЈА} + \text{РОТАЦИЈА} + \text{ДЕФОРМАЦИЈА}}$$

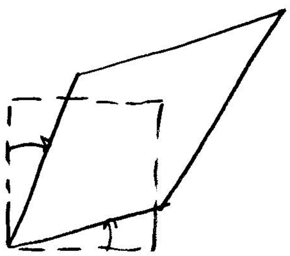


ТРАНСЛАЦИЈА

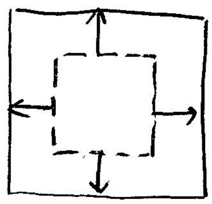
ТРАНСЛАЦИЈА + РОТАЦИЈА

ТРАНСЛАЦИЈА + РОТАЦИЈА + ДЕФОРМАЦИЈА

ДЕФОРМАЦИЈА УГЛА

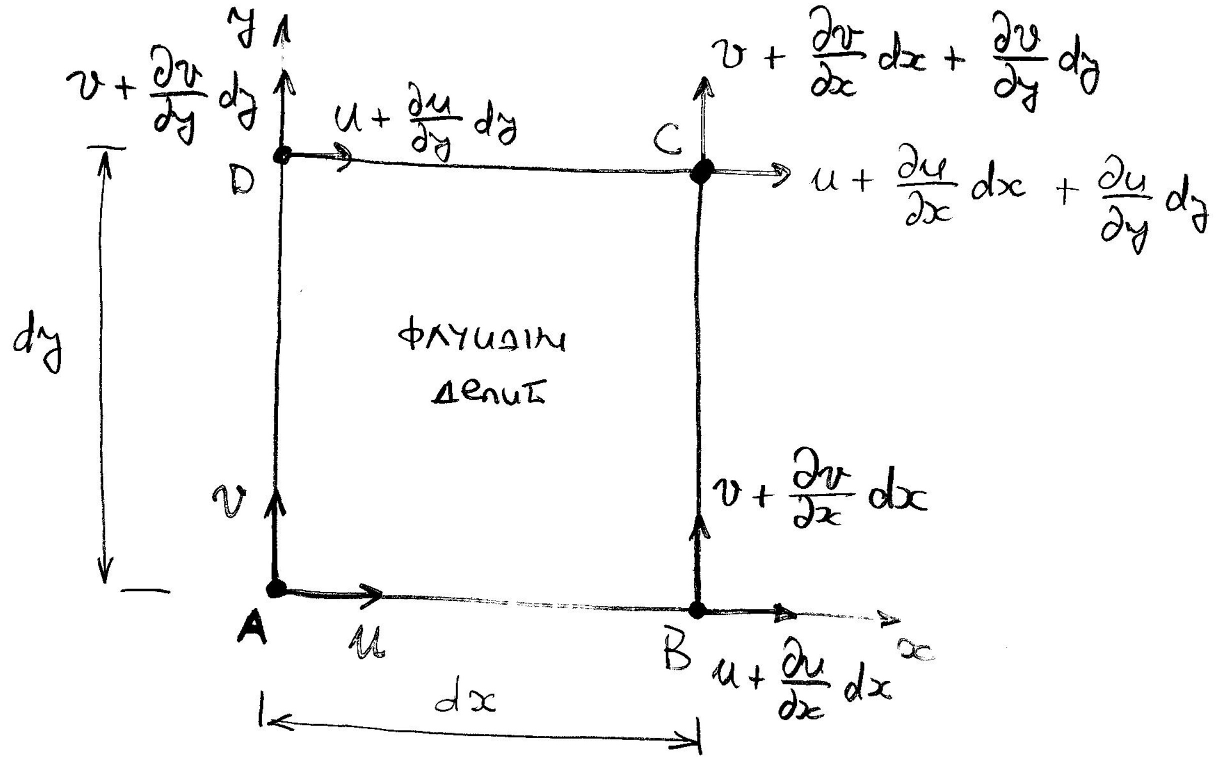


ДИЛАТАЦИЈА
(промена запремине)



АНАЛИЗА ЧЛАНОВА ТЕНЗОРА БРЗИНЕ ДЕФОРМИСАЊА

Посматра се један елементарни део флуида - флуидни делић



Тачке B, C и D су блиске тачке тачки A, тако да су брзине у њима дефинисане одговарајућим прираштајима. Тако, тачке B и A леже на истој хоризонтали, тј. њихова „y"-координата је иста, тако да је $dy=0$. У тачки C, посматрано са стране тачке A имамо прираштај по обе координате, па је:

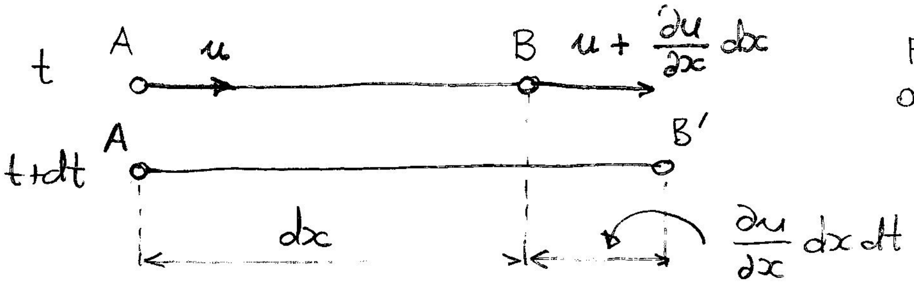
$$u_C = u_A + \underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy}_{du \text{ између тачака C и A}} \quad ; \quad u_B = u_A + \underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}dx}_{du \text{ између тачака B и A}} \quad \boxed{dy=0}$$

$$S_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$

① Анализа компоненти за $i = j$

$$S_{11} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right) = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \quad \text{и} \quad S_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2}, \quad S_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3}$$

Анализирамо промену дужине дужи AB



Релативна брзина тачке B у односу на A:

$$u_B - u_A = \frac{\partial u}{\partial x}dx$$

Промена дужине $\overline{AB}$ у времену:

$$\overline{AB'} - \overline{AB} = \underbrace{d(\overline{AB})}_{} = \frac{\partial u}{\partial x}dx\,dt$$

↳ елементарно мала промена за елементарно мало време dt

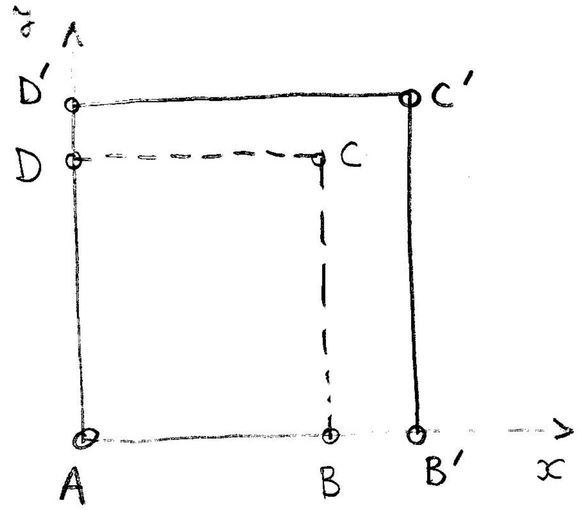
$$\frac{d(\overline{AB})}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x}dx \xrightarrow{\overline{AB} \equiv dx} \boxed{\frac{1}{\overline{AB}}\frac{d(\overline{AB})}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x}}$$

$\frac{1}{\overline{AB}}\frac{d(\overline{AB})}{dt}$ – релативна промена дужине $\overline{AB}$ у времену
(зато што се дели са почетном дужином AB)

Ако je $\frac{\partial u}{\partial x} > 0$ дуж се издужује, и обрнуто.

Сличном анализом добија се да је релативна промена дужине дужи $\overline{AD}$

$$\frac{1}{\overline{AD}}\frac{d(\overline{AD})}{dt} = \frac{\partial v}{\partial y}$$



Релативна промена површине:

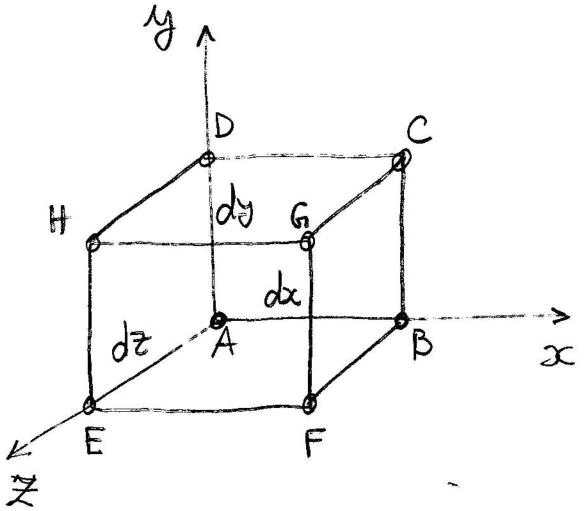
$$dA = \overline{AB} \cdot \overline{AD}$$

$$\frac{1}{dA}\frac{d(dA)}{dt} = \frac{1}{\overline{AB}\cdot\overline{AD}}\frac{d}{dt}\left(\overline{AB}\cdot\overline{AD}\right)$$

$$= \frac{1}{\overline{AB}\cdot\overline{AD}}\left[\overline{AD}\frac{d(\overline{AB})}{dt} + \overline{AB}\frac{d(\overline{AD})}{dt}\right]$$

$$\frac{1}{dA}\frac{d(dA)}{dt} = \frac{1}{\overline{AB}}\frac{d(\overline{AB})}{dt} + \frac{1}{\overline{AD}}\frac{d(\overline{AD})}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}$$

Ако сада проширимо разматрање на запремину dV (запремина флуидног делића) добија се



РЕЛАТИВНА ПРОМЕНА ЗАПРЕМИНЕ ФЛУИДНОГ ДЕЛИЋА:

$$\frac{1}{dV}\frac{d(dV)}{dt} = \underbrace{\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}}_{\nabla\cdot\vec{U}}$$

$$\frac{1}{dV}\frac{d(dV)}{dt} = \operatorname{div}\vec{U}$$

ФИЗИЧКИ СМИСАО ДИВЕРГЕНЦИЈЕ БРЗИНЕ: релативна промена запремине флуидног делића у времену

ДИВЕРГЕНЦИЈА ВЕКТОРА ⟶ НАБЛА скаларно помножено (примењено на вектор)

$$\boxed{\operatorname{div}}\,\vec{U} = \boxed{\nabla\cdot}\,\vec{U} = \left(\vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot\left(u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k}\right)$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial y}$$

Дивергенција вектора је скаларна величина!

$$\operatorname{div}\vec{U} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \equiv \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}$$

индексна нотација: $$\operatorname{div}\vec{U} = \underbrace{\frac{\partial u_i}{\partial x_i} \equiv \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \equiv \frac{\partial u_k}{\partial x_k}}_{\text{сумирање по поновљеном индексу од 1 до 3}}$$

Ако је флуид НЕСТИШЉИВ ($\rho = const$), запремина флуидног делића се НЕ МЕЊА!

$$\rightarrow \boxed{\operatorname{div}\vec{U} \equiv \nabla\cdot\vec{U} = 0} \quad \text{за нестишљив флуид}$$

Примена оператора НАБЛА на скаларна, векторска и тензорска поља

$\nabla(\,) \equiv \text{grad}$ $\longmapsto$ може да се примењује на сва поља

$\nabla\cdot(\,) \equiv \text{div}$ $\longmapsto$ само за векторе и тензоре 2. и вишег реда

$\nabla\times(\,) \equiv \text{rot}$ $\longmapsto$ само за векторе и тензоре

ОПЕРАТОР	ВЕЛИЧИНА	ДОБИЈА СЕ
∇	СКАЛАР	ВЕКТОР
	ВЕКТОР	ТЕНЗОР 2. РЕДА
	ТЕНЗОР 2. РЕДА	ТЕНЗОР 3. РЕДА

grad – подиже ред тензора за 1

$\rightarrow \nabla p = \text{grad}\, p$

$\rightarrow \nabla\vec{U} = \text{grad}\,\vec{U}$

ОПЕРАТОР	ВЕЛИЧИНА	ДОБИЈА СЕ
$\nabla\cdot$	СКАЛАР	НЕ ПОСТОЈИ
	ВЕКТОР	СКАЛАР
	ТЕНЗОР 2. РЕДА	ВЕКТОР

div – смањује ред тензора за 1

скалар

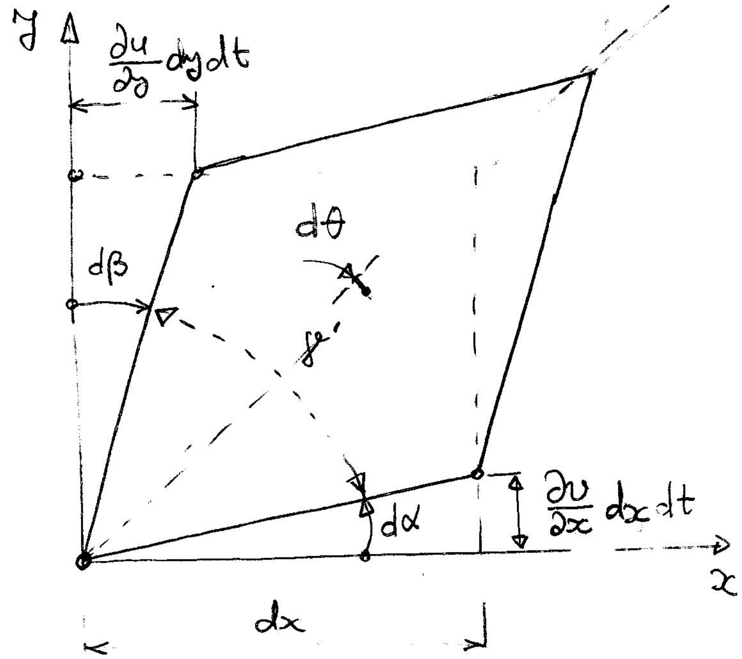
$\nabla\cdot p \rightarrow$ не постоји

$\nabla\cdot\vec{U} = \operatorname{div}\vec{U}$

$\nabla\cdot\tilde{T} \equiv \operatorname{div}\tilde{T}$

Компоненте тензора S_{ij} за $i \neq j$

– анализира се компонента тензора $S_{12} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)$



$\gamma = 90°$ – у почетном стању

$\gamma' = \gamma - (d\alpha + d\beta)$

$\gamma' - \gamma = -(d\alpha + d\beta)$

$d\gamma = -(d\alpha + d\beta)$

$$tg(d\alpha) \approx d\alpha = \frac{\frac{\partial v}{\partial x} dx dt}{dx}$$

$$\rightarrow \frac{d\alpha}{dt} = \frac{\partial v}{\partial x}$$

Аналогно: $\frac{d\beta}{dt} = \frac{\partial u}{\partial y}$

Промена угла γ: $$\frac{d\gamma}{dt} = -\left(\frac{d\alpha}{dt} + \frac{d\beta}{dt}\right) = -\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) = -2S_{12}$$

Аналогно је и за остале правце, па је

$$[\underset{\sim}{S}] = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}$$

$S_{11} + S_{22} + S_{33} = div\,\vec{U} = \nabla \cdot \vec{U}$ – компоненте одговорне за промену угла

Тензор брзине деформисања је СИМЕТРИЧНИ ТЕНЗОР другог реда!

$S_{ij} = S_{ji}$, $tr(\tilde{S}) = \nabla \cdot \vec{U}$

Када ће флуидни делић и да РОТИРА? Одговор: када су углови $d\alpha$ и $d\beta$ различити!

Ротација у ПОЗИТИВНОМ МАТЕМАТИЧКОМ СМЕРУ:

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{d\alpha}{dt} - \frac{d\beta}{dt} \rightarrow \frac{d\theta}{dt} = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 2\omega_{21} = -2\omega_{12}$$

$$
[\tilde{\omega}] = \begin{bmatrix} 0 & \omega_{12} & \omega_{13} \\ \omega_{21} & 0 & \omega_{23} \\ \omega_{31} & \omega_{32} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x}\right) & 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) & 0 \end{bmatrix}
$$

Тензор вртложности је АНТИСИМЕТРИЧНИ тензор другог реда

$$\omega_{ji} = -\omega_{ij}$$

Тензор вртложности је описан са три (независне) компоненте, па се може дефинисати ВЕКТОР ВРТЛОЖНОСТИ!

$$
\vec{\omega} = \frac{1}{2}\operatorname{rot}\vec{U} = \frac{1}{2}\nabla\times\vec{U} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u & v & w \end{vmatrix}
$$

Раванско струјање

$$\vec{\omega} = \omega_z\vec{k} = \omega\vec{k}$$

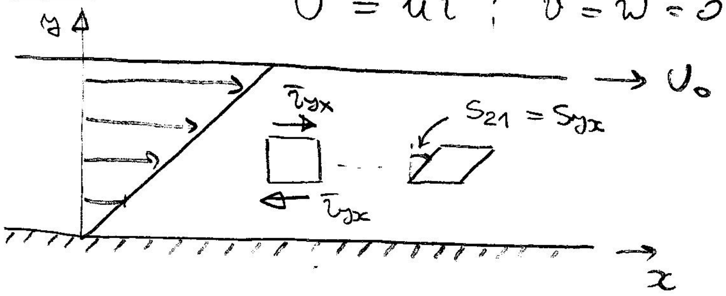
$$\omega = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

$$
\vec{\omega} = \underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right)}_{\omega_x \equiv \omega_{32}}\vec{i} + \underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right)}_{\omega_y \equiv \omega_{13}}\vec{j} + \underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)}_{\omega_z \equiv \omega_{21}}\vec{k}
$$

$$\omega_1 = \omega_{32} \qquad \omega_2 = \omega_{13} \qquad \omega_3 = \omega_{21}$$

Пример 1:

$$\vec{U} = u\vec{i}\ ; \quad v = w = 0$$



Њутновски нестишљиви флуид:

$$\tilde{T} = 2\eta\tilde{S}$$

↓ тензор вискозних напона

Одредити тензор $\tilde{S}$, и вектор вртложности $\vec{\omega}$

Вртложна и невртложна струјања (факултативно!)

ВРТЛОЖНА СТРУЈАЊА: $\nabla \times \vec{U} \neq 0$, тј. $\vec{\omega} \neq 0$ у свакој тачки струјног поља (флуидни делићи се обрћу током свог кретања)

НЕВРТЛОЖНА СТРУЈАЊА: $\nabla \times \vec{U} = 0$, тј. $\vec{\omega} = 0$ у свакој тачки струјног поља (флуидни делићи НЕ РОТИРАЈУ)

За било коју скаларну функцију $\varphi(x,y,z)$ важи

$$\mathrm{rot}(\mathrm{grad}\,\varphi) = \nabla \times (\nabla\varphi) = 0$$

→ невртложно струјање: $\boxed{\vec{U} = \nabla\varphi = \mathrm{grad}\,\varphi}$

$\varphi = \varphi(x,y,z,t)$ — ПОТЕНЦИЈАЛ БРЗИНЕ

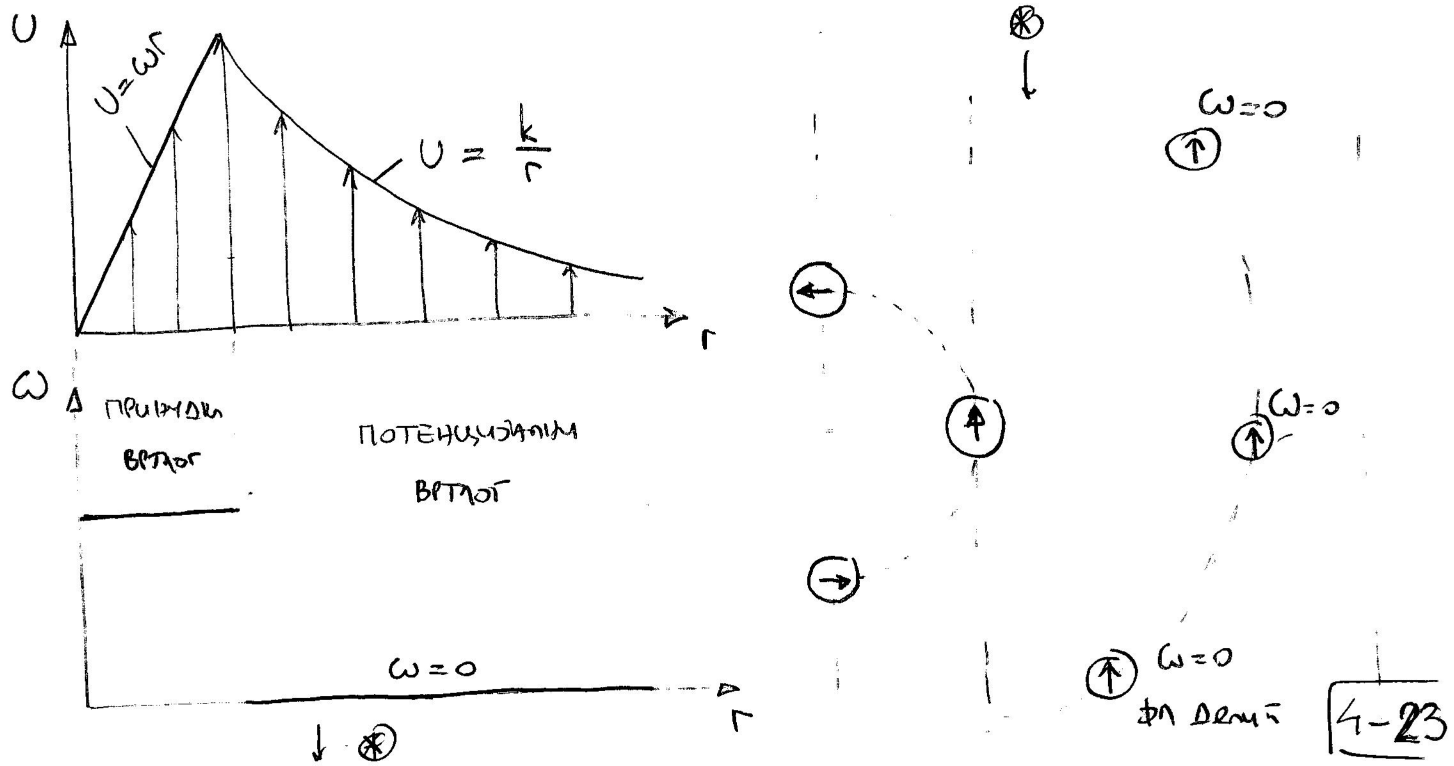
↓

ако је струјање нестационарно

$$\boxed{\text{НЕВРТЛОЖНА СТРУЈАЊА} \longleftrightarrow \text{ПОТЕНЦИЈАЛНА СТРУЈАЊА}}$$

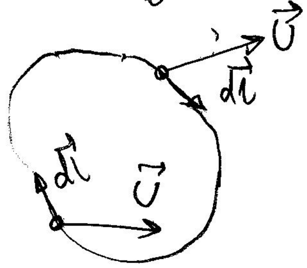
Вртлог представља одговарајућу струјну структуру различитих размера у брзинском пољу, које настаје кретањем флуидних делића дуж затворених линија (путања) око заједничког центра.

Модел Ранкиновог вртлога (равански вртлог)



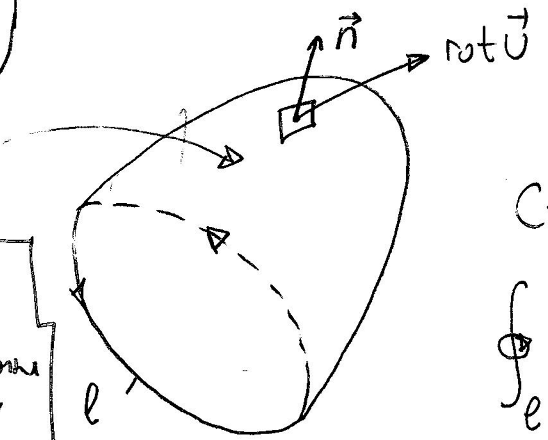
4.3 Циркулација брзине

$$\Gamma \overset{\text{def}}{=} \oint_l \vec{U} \circ d\vec{l} \quad \rightarrow \quad \Gamma = \oint_l (u\,dx + v\,dy)$$ – за раванско струјање



Циркулација је суштински повезана за појмом вртложности!

Било која површ



Смер обилажења криве и вектор нормале $\vec{n}$ повезани „правилом десне руке"

Површ A се ослања на криву l (ограничена је кривом l)

Стоксова теорема:

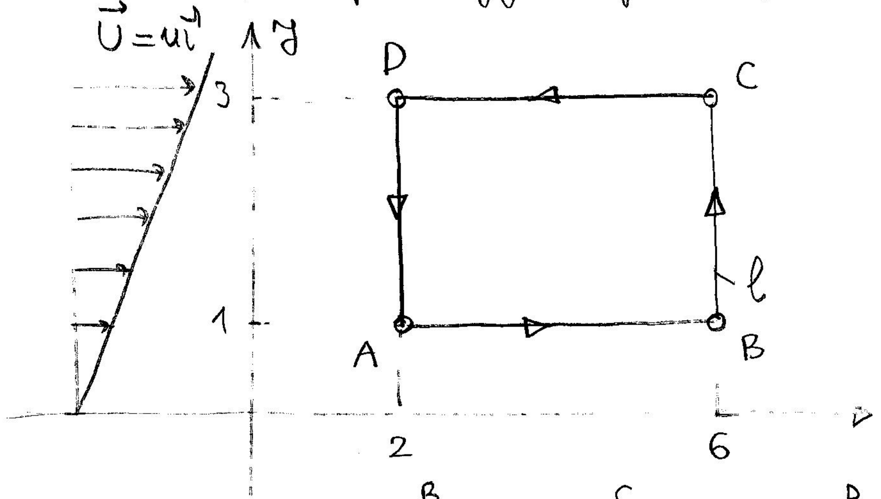
$$\oint_l \vec{U} \circ d\vec{l} = \iint_A \text{rot}\,\vec{U} \cdot \vec{n}\,dA$$

На основу дефиниције вртложности $\vec{\omega}$:

$$\boxed{\oint_l \vec{U} \cdot d\vec{l} = 2\iint_A \vec{\omega} \cdot \vec{n}\,dA}$$

Пример: Задато је поље брзине неког раванског струјања:

$u = Cy$ и $v = 0$, $C \in \mathbb{R}^+$. Одредити вредност циркулације брзине дуж криве приказане на слици.



$$\Gamma = \oint_l \vec{U} \cdot d\vec{l}$$

$$\vec{U} = u\vec{i} \quad (v = 0)$$

$$d\vec{l} = dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j}$$

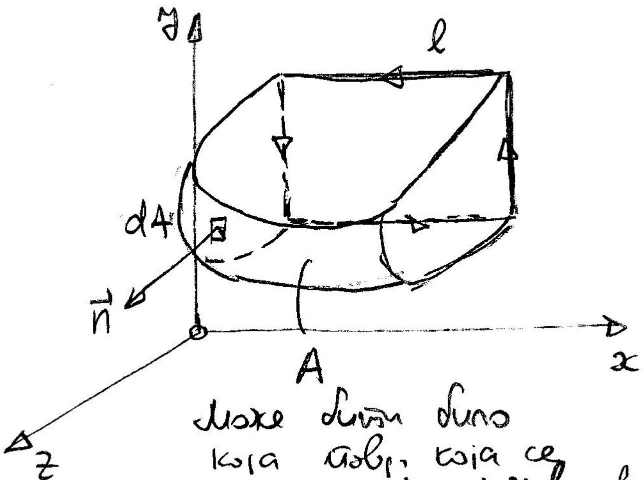
$$\Gamma = \oint_l u\,dx$$

$$\boxed{\Gamma} = \oint_l u\,dx = \int_A^B u\,dx + \underbrace{\int_B^C u\,\cancel{dx}}_{0} + \int_C^D u\,dx + \underbrace{\int_D^A u\,\cancel{dx}}_{0} =$$

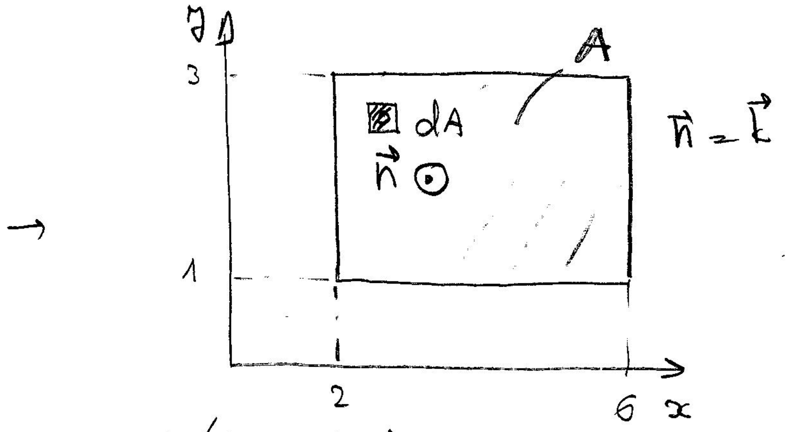
$$= \int_2^6 C\,dx + \int_6^2 3C\,dx = 4C + 3C(-4) = \boxed{-8C}$$

Стоксова теорема

$$\Gamma = \oint_l \vec{U}\cdot d\vec{l} = 2\iint_A \vec{\omega}\cdot\vec{n}\, dA$$



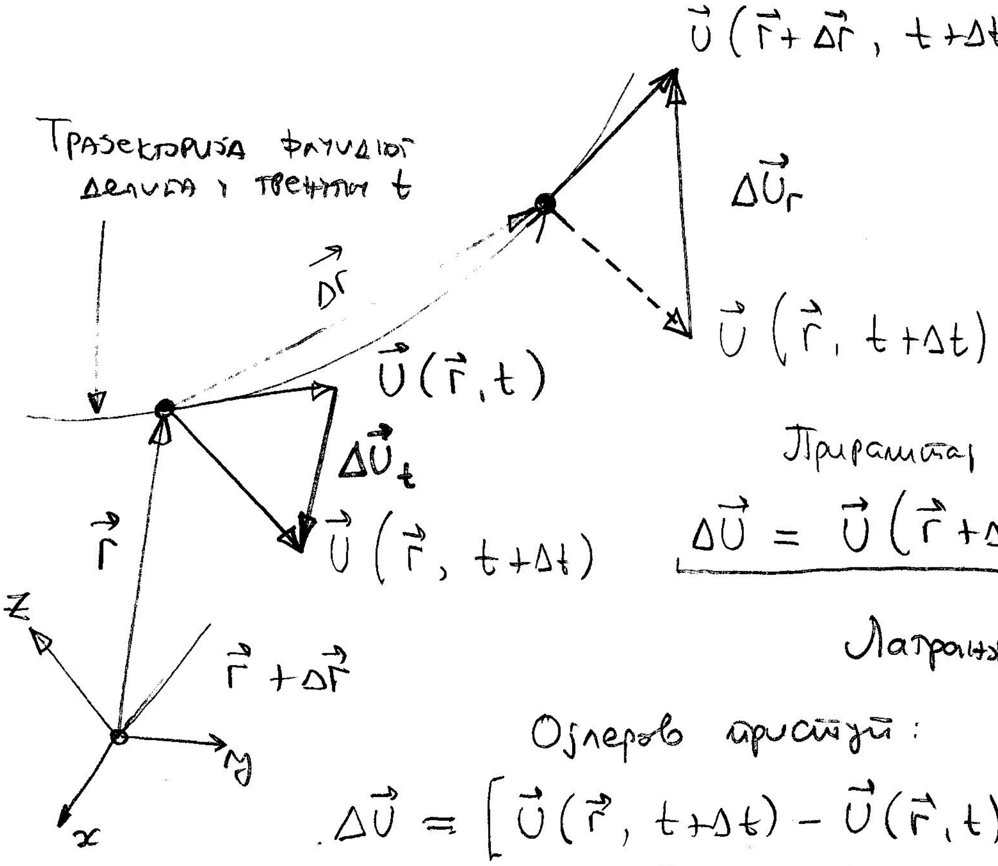
Може бити било која површ која се ослања на криву l



$$\vec{\omega} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\vec{k} = -\frac{C}{2}\vec{k}$$

$$\boxed{\Gamma} = 2\iint_A -\frac{C}{2}\vec{k}\cdot\vec{k}\, dA = -C\int_2^6 dx \int_1^3 dy = \boxed{-8C}$$

4.4 Убрзање флуидног делића



$$\vec{a} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{U}}{\Delta t}$$

Прираштај брзине флуидног делића

$$\underbrace{\Delta\vec{U} = \vec{U}(\vec{r}+\Delta\vec{r},\ t+\Delta t) - \vec{U}(\vec{r},t)}_{\text{Лагранжев приступ}}$$

Ојлеров приступ:

$$\Delta\vec{U} = \left[\vec{U}(\vec{r},\ t+\Delta t) - \vec{U}(\vec{r},t)\right] + \left[\vec{U}(\vec{r}+\Delta\vec{r},\ t+\Delta t) - \vec{U}(\vec{r},\ t+\Delta t)\right] = \Delta\vec{U}_t + \Delta\vec{U}_r$$

$$\Delta\vec{U} = \Delta\vec{U}_t + \Delta\vec{U}_r$$

$\Delta\vec{U}_r$ → разлика брзина између две блиске тачке

$\Delta\vec{U}_t$ → промена брзине у тачки у времену

$$\frac{\Delta \vec{U}}{\Delta t} = \frac{\vec{U}(\vec{r}, t+\Delta t) - \vec{U}(\vec{r}, t)}{\Delta t} + \frac{\vec{U}(\vec{r}+\Delta\vec{r}, t+\Delta t) - \vec{U}(\vec{r}, t+\Delta t)}{\Delta t}$$

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0}\left[\frac{\vec{U}(\vec{r}, t+\Delta t) - \vec{U}(\vec{r}, t)}{\Delta t}\right] + \lim_{\substack{\Delta t \to 0 \\ \Delta r \to 0}}\left[\frac{\vec{U}(\vec{r}+\Delta\vec{r}, t+\Delta t) - \vec{U}(\vec{r}, t+\Delta t)}{\Delta t}\right]$$

$$\vec{a} = \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{U}}{\partial x}\underbrace{\frac{dx}{dt}}_{u} + \frac{\partial \vec{U}}{\partial y}\underbrace{\frac{dy}{dt}}_{v} + \frac{\partial \vec{U}}{\partial z}\underbrace{\frac{dz}{dt}}_{w}$$

$$\rightarrow \boxed{\vec{a} = \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + u\frac{\partial \vec{U}}{\partial x} + v\frac{\partial \vec{U}}{\partial y} + w\frac{\partial \vec{U}}{\partial z}}$$

или :

$$\boxed{\vec{a} = \underbrace{\frac{\partial \vec{U}}{\partial t}}_{\text{локално убрзање}} + \underbrace{(\vec{U} \cdot \nabla)\vec{U}}_{\text{конвективно убрзање}}}$$

$$\vec{U} \cdot \nabla = \left(u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k}\right) \cdot \left(\vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}\right) =$$

$$= u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y} + w\frac{\partial}{\partial z}$$ - диференцијален оператор!

$$(\vec{U} \cdot \nabla) f \equiv \vec{U} \cdot \nabla f = u\frac{\partial f}{\partial x} + v\frac{\partial f}{\partial y} + w\frac{\partial f}{\partial z}$$

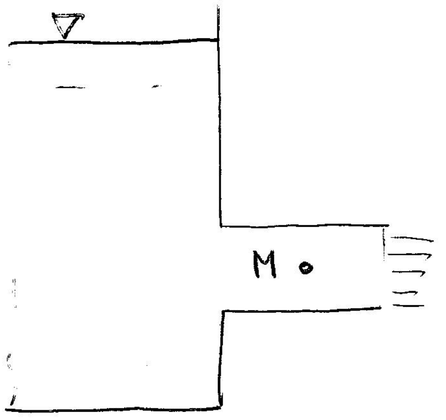
f - било која функција!

Компонента забрзања a_x :

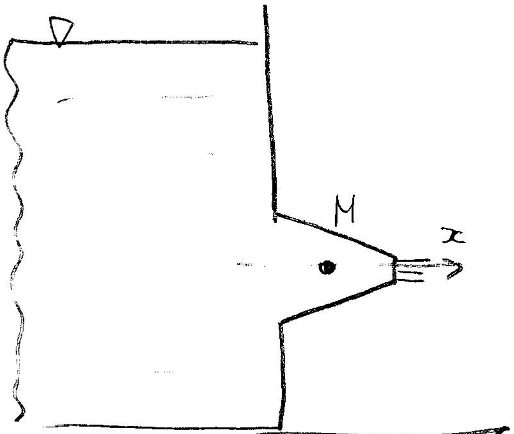
$$a_x = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} \quad v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}$$

Индексна нотација: $$\boxed{a_i = \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}}$$

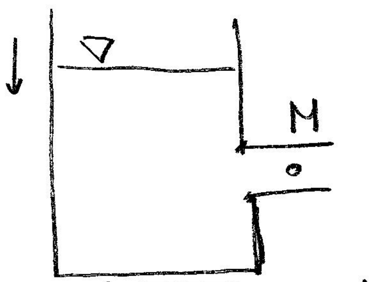
сумирање со повторени индекс



$a_{lok} = a_{konv} = 0$



$a_{lok,M} = 0$, $\boxed{a_{konv,M} \neq 0}$



$\boxed{a_{lok,M} \neq 0}$

$\boxed{a_{konv,M} = 0}$

Израз за убрзање на основу дефиниције ТОТАЛНОГ ДИФЕРЕНЦИЈАЛА

$\vec{U} = \vec{U}(t, x, y, z)$ – функција 4 променљиве

$$d\vec{U} = \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} dt + \frac{\partial \vec{U}}{\partial x} dx + \frac{\partial \vec{U}}{\partial y} dy + \frac{\partial \vec{U}}{\partial z} dz$$

$$\boxed{\frac{d\vec{U}}{dt}} = \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{U}}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial \vec{U}}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial \vec{U}}{\partial z}\frac{dz}{dt}$$

↳ тотална (укупна) промена $\vec{U}$ у времену

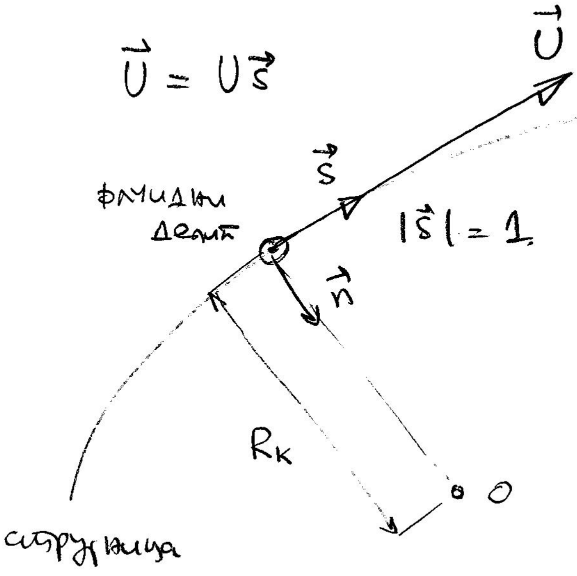
МЕХАНИКА ФЛУИДА : $u = \frac{dx}{dt}$ – пројекција брзине флуидног делића

$\frac{d}{dt} \rightarrow \frac{D}{Dt}$ – материјални извод

$$\underbrace{\frac{D\vec{U}}{Dt}}_{\text{Лагранжев приступ}} = \underbrace{\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + u\frac{\partial \vec{U}}{\partial x} + v\frac{\partial \vec{U}}{\partial y} + w\frac{\partial \vec{U}}{\partial z}}_{\text{Ојлеров приступ}}$$

$$\rightarrow \quad \underbrace{\boxed{\frac{D(\ )}{Dt} = \frac{\partial(\ )}{\partial t} + (\vec{U} \circ \nabla)(\ )}}_{\text{дифер. оператор материјалног извода}}$$

Убрзање у природним координатама



$\vec{U} = U\vec{s}$

Handout, 4.6.4

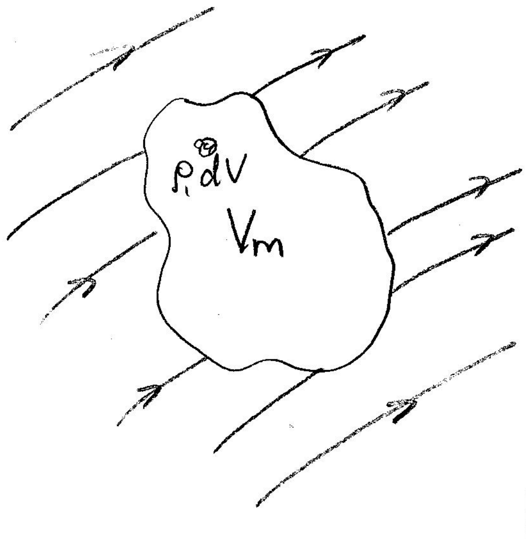
$$\vec{a} = \frac{D\vec{U}}{Dt} = \left(\frac{\partial U}{\partial t} + U\frac{\partial U}{\partial s}\right)\vec{s} + \frac{U^2}{R_K}\vec{n} = \vec{a}_t + \vec{a}_N$$

$$a_s = \frac{\partial U}{\partial t} + U\frac{\partial U}{\partial s}$$

$$a_n = \frac{U^2}{R_K}$$

4.5 Закон о одржању масе. Једначина континуитета

Посматра се материјална запремина V_m која се креће.



- облик материјалне запремине се мења, а у општем случају и њена запремина (бројна вредност у m^3)

$\rightarrow \quad V_m = V_m(t)$

Али како та МАТЕРИЈАЛНА ЗАПРЕМИНА УВЕК САДРЖИ ИСТЕ ФЛУИДНЕ ДЕЛИЋЕ, ЊЕНА МАСА СЕ НЕ МЕЊА!

$m = \iiint_{V_m} \rho\, dV$ - маса флуида у материјалној запремини

Закон о одржању масе: $\boxed{\dfrac{Dm}{Dt} = 0}$

Зашто $\dfrac{D}{Dt}$? $\rightarrow$ пратимо издвојену масу флуида која се креће заједно са флуидом

— Лагранжев приступ

Закон о одржању масе (Лагранжев приступ):

$$\frac{Dm}{Dt} = 0 \quad \longleftrightarrow \quad \boxed{\frac{D}{Dt}\iiint_{V_m(t)} \rho\, dV = 0}$$

Како је $\underline{V_m = V_m(t)}$, онда извод $\frac{D}{Dt}$ __не може__ да се примени на подинтегралну функцију, већ се теоријски прво мора решити интеграл и добити нека зависност од t, па онда диференцирати добијено решење.

Међутим, како је $\rho dV = dm = const.$ (маса флуидног делића), онда следи

$$\frac{D}{Dt}\iiint_{V_m(t)} \underbrace{\rho\, dV}_{dm} = \frac{D}{Dt}\iiint_{\substack{\text{МАСА}\\ m=const}} dm = \iiint_{\text{МАСА}} \frac{D}{Dt}(dm) = \iiint_{V_m(t)} \frac{D}{Dt}(\rho dV)$$

$$= \iiint_{V_m(t)} \left[\frac{D\rho}{Dt} dV + \rho \frac{D}{Dt}(dV)\right] = \iiint_{V_m(t)} \left[\frac{D\rho}{Dt} dV + \rho \nabla\cdot\vec{U}\, dV\right]$$

Физички смисао дивергенције брзине (стр. 4-19):

$$\operatorname{div}\vec{U} \equiv \nabla\cdot\vec{U} = \frac{1}{dV}\frac{D(dV)}{Dt} \longrightarrow \frac{D(dV)}{Dt} = \operatorname{div}\vec{U}\, dV$$

$$\rightarrow \boxed{\frac{D}{Dt}\iiint_{V_m} \rho\, dV = \iiint_{V_m} \left[\frac{D\rho}{Dt} + \rho\nabla\cdot\vec{U}\right] dV = 0}$$

$$\iiint_{V_m}\left(\frac{D\rho}{Dt} + \rho\nabla\cdot\vec{U}\right) dV = 0$$

Запремина V_m је произвољно изабрана, па је последњи интеграл једнак нули само када је подинтегрална функција ЈЕДНАКА НУЛИ.

$$\iiint_{V_m}\left(\frac{D\rho}{Dt}+\rho\nabla\cdot\vec{U}\right)dV=0 \xrightarrow[\text{је произвољно изабран}]{\text{домен интеграције}} \boxed{\frac{D\rho}{Dt}+\rho\nabla\cdot\vec{U}=0}$$

Диференцијални облик једначине континуитета

$$\frac{D\rho}{Dt}=\frac{\partial\rho}{\partial t}+\vec{U}\cdot\nabla\rho \equiv \frac{\partial\rho}{\partial t}+\vec{U}\cdot\operatorname{grad}\rho$$

Облик једначине континуитета у „строгој форми одржања":

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\underbrace{\vec{U}\cdot\nabla\rho+\rho\nabla\cdot\vec{U}}_{\nabla\cdot(\rho\vec{U})}=0 \rightarrow \boxed{\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho\vec{U})=0}$$

$$\Updownarrow$$

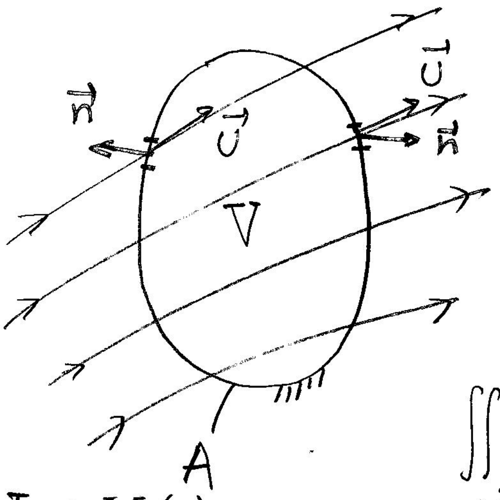
$$\boxed{\frac{\partial\rho}{\partial t}+\operatorname{div}(\rho\vec{U})=0}$$

Ако је флуид нестишљив и хомоген ($\rho=\rho_0=\text{const.}$ у свакој тачки поља)

$$\longrightarrow \boxed{\operatorname{div}\vec{U}=0}$$ једначина континуитета за нестишљив флуид

Једначина континуитета за контролну запремину V:

Посматрамо фиксну област простора кроз коју протиче флуид – – контролна запремина V



$V \neq V(t)$

$A \neq A(t)$

Интегралимо диф. јдн по домену V:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho\vec{U})=0$$

$$\iiint_V\left[\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho\vec{U})\right]dV=0$$

$$\iiint_V\frac{\partial\rho}{\partial t}dV+\iiint_V\nabla\cdot(\rho\vec{U})\,dV=0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint_V\rho\,dV+\oint\!\!\oint_A\vec{n}\cdot(\rho\vec{U})\,dA=0$$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}\iiint_V \rho \, dV = -\oiint_A \rho(\vec{U}\cdot\vec{n})\, dA}$$

Једначина континуитета за контролну запремину

① ②

① – Промена масе у времену у контролној запремини (К.З)

② – Разлика улазног и излазног масеног протока

$$-\oiint_A \rho(\vec{U}\cdot\vec{n})\,dA = -\left[\iint_{A_{in}} \rho(\vec{U}\cdot\vec{n})\,dA + \iint_{A_{out}} \rho(\vec{U}\cdot\vec{n})\,dA\right]$$

A_{in} - део површи A кроз коју флуид улази у К.З.

A_{out} – део површи A кроз коју флуид излази из К.З

На A_{in} : $\vec{U}\cdot\vec{n} < 0$ (јер је $\measuredangle \vec{U},\vec{n}$ између 90° и 180°)

На A_{out} : $\vec{U}\cdot\vec{n} > 0$ (јер је угао $\measuredangle(\vec{U},\vec{n})$ између 0 и 90°)

$$\rightarrow \quad -\oiint_A \rho(\vec{U}\cdot\vec{n})\,dA = -\left[-\dot{m}_{in} + \dot{m}_{out}\right] = \dot{m}_{in} - \dot{m}_{out}$$

Дакле, за једначина континуитета за контролну запремину се може писати и у облику:

$$\boxed{\frac{dm}{dt} = \dot{m}_{in} - \dot{m}_{out}}$$

$\dot{m}_{in} - \dot{m}_{out} > 0 \implies \frac{dm}{dt} > 0$ маса флуида у К.З расте

$\dot{m}_{in} - \dot{m}_{out} < 0 \implies \frac{dm}{dt} < 0$ маса флуида у К.З опада

$\dot{m}_{in} - \dot{m}_{out} = 0 \implies \frac{dm}{dt} = 0$ маса остаје иста (не мења се у времену)