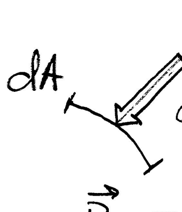
5. ДИНАМИКА ВИСКОЗНОГ ФЛУИДА

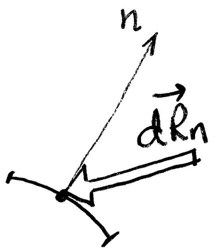
Основна и ЈЕДИНА разлика у односу на невискозан флуид је у површинској сили:



$$d\vec{R}_n = -p\vec{n}\,dA$$

$$\vec{p}_n = -p\vec{n}$$

$\boxed{\text{НЕВИСКОЗАН ФЛУИД}}$



$$d\vec{R}_n = \vec{p}_n\,dA$$

$$\vec{p}_n = -p\vec{n} + \vec{\tau}_n$$

$\vec{\tau}_n$ - вектор вискозних напона

$$d\vec{R}_n = (-p\vec{n} + \vec{\tau}_n)\,dA$$

$\boxed{\text{ВИСКОЗАН ФЛУИД}}$

Или: $\underset{\sim}{P} = -p\underset{\sim}{E} + \underset{\sim}{T}$; $\underset{\sim}{T}$ - тензор вискозних напона

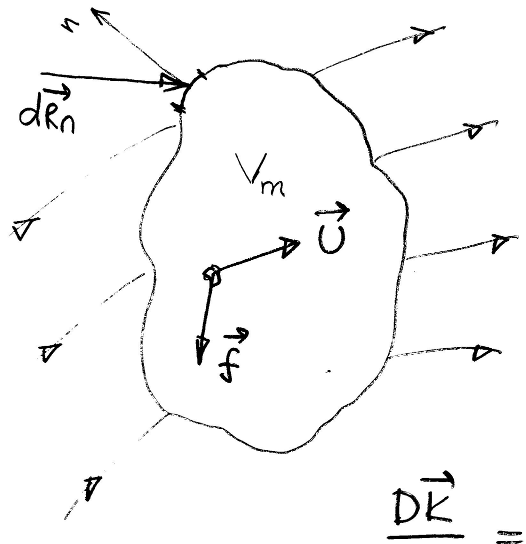
↳ тензор (укупних) напона

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{bmatrix}$$

Веза између притиска и нормалних напона: $p = -\frac{1}{3}\left(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}\right)$

$$\Rightarrow \quad \tau_{xx} + \tau_{yy} + \tau_{zz} = 0$$

5.1 ЗАКОН О ПРОМЕНИ КОЛИЧИНЕ КРЕТАЊА.



Промена количине кретања МАТЕРИЈАЛНОГ СИСТЕМА једнака је суми свих сила које на тај материјални систем делују.

$$\frac{D\vec{K}}{Dt} = \vec{R}_m + \vec{R}_n \quad \ldots \quad (5.1)$$

$\vec{R}_n$ ↳ РЕЗУЛТУЈУЋА ПОВРШ. СИЛА

$\vec{R}_m$ → РЕЗУЛТУЈУЋА МАСЕНА СИЛА

$$\frac{D\vec{K}}{Dt} = \frac{D}{Dt}\iiint_{V_m} \rho\vec{U}\,dV = \iiint_{V_m} \rho\frac{D\vec{U}}{Dt}\,dV \ldots (5.2)$$

$$\vec{R}_m = \iiint_{V_m} \rho \vec{f}\, dV \quad , \quad \vec{R}_n = \oiint_{A_m} \vec{P}_n\, dA$$

Кошијева једначина: $\vec{P}_n = \vec{P}_x n_x + \vec{P}_y n_y + \vec{P}_z n_z$

Једначина количине кретања:

$$\iiint_{V_m} \rho \frac{D\vec{U}}{Dt}\, dV = \iiint_{V_m} \rho \vec{f}\, dV + \oiint_{A_m} \vec{P}_n\, dA \quad \ldots \quad (5.3)$$

$$\boxed{\iiint_{V_m} \rho \frac{D\vec{U}}{Dt}\, dV = \iiint_{V_m} \rho \vec{f}\, dV + \oiint_{A_m} (\vec{P}_x n_x + \vec{P}_y n_y + \vec{P}_z n_z)\, dA} \quad (5.4)$$

Једначина кретања НЕПРЕКИДНЕ СРЕДИНЕ у интегралном облику

Ако искористимо: $\vec{P}_n = -p\vec{n} + \vec{\tau}_n$, добија се алтернативни облик:

$$\underbrace{\iiint_{V_m} \rho \frac{D\vec{U}}{Dt}\, dV = \iiint_{V_m} \rho \vec{f}\, dV + \oiint_{A_m} -p\vec{n}\, dA}_{\text{Ојлерова јдн динамике невискозног флуида } (\vec{\tau}_n = 0)} + \oiint_{A_m} \vec{\tau}_n\, dA \quad \ldots \quad (5.5)$$

Вектор вискозних напона: $\vec{\tau}_n = \vec{\tau}_x n_x + \vec{\tau}_y n_y + \vec{\tau}_z n_z$

$$\iiint_{V_m} \rho \frac{D\vec{U}}{Dt}\, dV = \iiint_{V_m} \rho \vec{f}\, dV + \oiint_{A_m} -p\vec{n}\, dA + \oiint_{A_m} (\vec{\tau}_x n_x + \vec{\tau}_y n_y + \vec{\tau}_z n_z)\, dA \quad (5.6)$$

Теорема Гаус-Остроградског:

$$\oiint_A n_x(\ldots)\, dA = \iiint_V \frac{\partial(\ldots)}{\partial x}\, dV \quad ; \quad \oiint_A n_y(\ldots)\, dA = \iiint_V \frac{\partial(\ldots)}{\partial y}\, dV$$

Даље следи:

$$\iiint_{V_m} \rho \frac{D\vec{U}}{Dt} = \iiint_{V_m} \rho \vec{f}\, dV + \iiint_{V_m} \left(\frac{\partial \vec{P}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{P}_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{P}_z}{\partial z} \right) dV$$

$$\iiint_{V_m}\left[\rho\frac{D\vec{U}}{Dt}-\rho\vec{f}-\left(\frac{\partial\vec{p}_x}{\partial x}+\frac{\partial\vec{p}_y}{\partial y}+\frac{\partial\vec{p}_z}{\partial z}\right)\right]dV=0$$

Запремина V_m је произвољно изабрана → следи да подинтеграл-на функција мора бити ЈЕДНАКА НУЛИ.

$$\Rightarrow\quad \boxed{\rho\frac{D\vec{U}}{Dt}=\rho\vec{f}+\frac{\partial\vec{p}_x}{\partial x}+\frac{\partial\vec{p}_y}{\partial y}+\frac{\partial\vec{p}_z}{\partial z}}\quad\ldots\;(5.7)$$

ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИ ОБЛИК ЈЕДНАЧИНЕ КРЕТАЊА НЕПРЕКИДНЕ СРЕДИНЕ

Једначина (5.7) се може написати у другачијем облику, имајући у виду јдн. (5.5)

$$\boxed{\rho\frac{D\vec{U}}{Dt}=\rho\vec{f}-\nabla p+\frac{\partial\vec{\tau}_x}{\partial x}+\frac{\partial\vec{\tau}_y}{\partial y}+\frac{\partial\vec{\tau}_z}{\partial z}}\quad\ldots\;(5.8)$$

До истог израза се долази заменом израза: $\vec{p}_x=-p\vec{i}+\vec{\tau}_x$; $\vec{p}_y=-p\vec{j}+\vec{\tau}_y$ и $\vec{p}_z=-p\vec{k}+\vec{\tau}_z$

$$\boxed{\rho\frac{D\vec{U}}{Dt}=\rho\vec{f}-\nabla p}+\underbrace{\frac{\partial\vec{\tau}_x}{\partial x}+\frac{\partial\vec{\tau}_y}{\partial y}+\frac{\partial\vec{\tau}_z}{\partial z}}$$

Ојлерова једначина динамике невискозног флуида

ДОПУНСКИ ЧЛАНОВИ – УТИЦАЈ ВИСКОЗНОСТИ (овај члан представља ДИВЕРГЕНЦИЈУ ТЕНЗОРА ВИСКОЗНИХ НАПОНА)

$$\oiint_{A_m}\vec{\tau}_n\,dA=\oiint_{A_m}\vec{n}\cdot\underset{\sim}{T}\,dA\overset{\text{Г.О.}}{=}\iiint_{V_m}\nabla\cdot\underset{\sim}{T}\,dV$$

ГАУС-ОСТРОГРАДСКИ

Једначина кретања непрекидне средине (ИНВАРИЈАНТНИ ОБЛИК)

$$\boxed{\rho\frac{D\vec{U}}{Dt}=\rho\vec{f}-\nabla p+\nabla\cdot\underset{\sim}{T}}\quad\ldots\;(5.9)$$

$$\rho\frac{D\vec{U}}{Dt}=\rho\vec{f}-\text{grad}\,p+\text{div}\,\underset{\sim}{T}$$

5.2 ЗАКОН О ПРОМЕНИ КОЛИЧИНЕ КРЕТАЊА ЗА ЊУТНОВСКИ ФЛУИД. НАВИЈЕ-СТОКСОВА ЈЕДНАЧИНА

Навије-Стоксова једначина представља ЈЕДНАЧИНУ КОЛИЧИНЕ КРЕТАЊА за њутновски флуид, и добија се тако што се у једначину кретања непрекидне средине уврсти РЕОЛОШКА ЗАВИСНОСТ (веза између тензора напона и тензора брзине деформисања) која важи за њутновски флуид.

Општа реолошка зависност за њутновске флуиде:

$$\underset{\sim}{P} = -p\underset{\sim}{E} + 2\eta \underset{\sim}{S} + \eta' \nabla\cdot\vec{U}\,\underset{\sim}{E} \;;\quad \eta' = \frac{2}{3}\eta$$

$\nabla\cdot\vec{U}$ у индексној нотацији

или преко компоненти: $$P_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\eta S_{ij} + \eta' \frac{\partial u_k}{\partial x_k}\delta_{ij}$$

η - динамичка вискозност

Њутновски НЕСТИШЉИВ, ХОМОГЕН флуид ($\rho = const. \Rightarrow \nabla\cdot\vec{U} = 0$):

$$\underset{\sim}{P} = -p\underset{\sim}{E} + 2\eta\underset{\sim}{S} \iff \underset{\sim}{T} = 2\eta\underset{\sim}{S} \iff \tau_{ij} = 2\eta S_{ij} \quad \dots (5.10)$$

Полази се од једначине (5.8), уз

$$\vec{\tau}_x = \tau_{xx}\vec{i} + \tau_{xy}\vec{j} + \tau_{xz}\vec{k}, \quad \vec{\tau}_y = \tau_{yx}\vec{i} + \tau_{yy}\vec{j} + \tau_{yz}\vec{k} \text{ и}$$
$$\vec{\tau}_z = \tau_{zx}\vec{i} + \tau_{zy}\vec{j} + \tau_{zz}\vec{k}$$

$$\rho\frac{D\vec{U}}{Dt} = \rho\vec{f} - \nabla p + \left(\frac{\partial\tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{zy}}{\partial z}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial z} + \frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{zz}}{\partial z}\right)\vec{k} \quad \dots (5.11)$$

Пројекција једначине (5.11) на правац x:

$$\rho\frac{Du}{Dt} = \rho f_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z} \quad \dots (5.12)$$

↳ једначина важи и за НЕЊУТНОВСКИ ФЛУИД

$$\tau_{ij} = 2\eta s_{ij} = \eta\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$

$$\tau_{xx} = 2\eta\frac{\partial u}{\partial x}, \quad \tau_{yx} = \eta\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right), \quad \tau_{zx} = \eta\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)$$

Заменом у једначину (5.12), уз $\eta = const.$

$$\rho\frac{Du}{Dt} = \rho f_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \eta\left[2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x\partial z} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right].$$

$$\rho\frac{Du}{Dt} = \rho f_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \eta\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial x}\underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)}_{div\vec{U} = 0}\right]$$

(јдн. континуитета)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \equiv \Delta u \equiv \nabla\cdot\nabla u \equiv \nabla^2 u$$

$\Delta \equiv \nabla\cdot\nabla \equiv \nabla^2$ – Лапласов оператор (лапласијан)

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$ ... диференцијални оператор

Добија се пројекција Навије-Стоксове јдн. на x-правац:

$$\rho\frac{Du}{Dt} = \rho f_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \eta\,\Delta u \quad \ldots\ldots (5.13)$$

Слично се добијају и пројекције на y и z правац:

$$\rho\frac{Dv}{Dt} = \rho f_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \eta\,\Delta v \quad \ldots\ldots (5.14)$$

$$\rho\frac{Dw}{Dt} = \rho f_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \eta\,\Delta w \quad \ldots\ldots (5.15)$$

Из ових једначина следи и инваријантни запис, тј. Навије-Стоксова једначина у свом векторском облику (НЕСТИШЉИВ ФЛУИД):

$$\boxed{\rho\frac{D\vec{U}}{Dt} = \rho\vec{f} - \nabla p + \eta\nabla^2\vec{U}} \quad \ldots\ldots (5.16)$$

У случају стишљивог њутновског флуида на десној страни ће се појавити додатни члан који обухвата утицај стишљивости:

$$\rho \frac{D\vec{U}}{Dt} = \rho\vec{f} - \nabla p + \eta\nabla^2\vec{U} + \frac{1}{3}\eta\nabla(\nabla\cdot\vec{U})$$

$$\rho \frac{D\vec{U}}{Dt} = \rho\vec{f} - \mathrm{grad}\,p + \eta\nabla^2\vec{U} + \frac{1}{3}\eta\,\mathrm{grad}(\mathrm{div}\vec{U}) \quad \ldots \quad (5.17)$$

До краја курса разматрано струјање НЕСТИШЉИВОГ њутновског флуида. Једначина (5.16) се дељењем са ρ може написати у облику:

$$\frac{D\vec{U}}{Dt} = \vec{f} \underbrace{- \frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\nabla^2\vec{U}}_{\text{јединична површинска сила – сила притиска + вискозна сила}} \quad \ldots\ldots \quad (5.18)$$

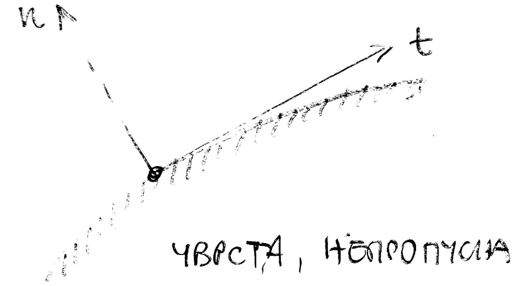
Пројекција јдн. (5.18) на x-осу (развијени облик)

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} = f_x - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)$$

Записано у индексној нотацији:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = f_i - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} \quad \ldots \quad (5.19)$$

Навије-Стоксове јдн. су НЕЛИНЕАРНЕ ПАРЦИЈАЛНЕ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНЕ ЈЕДНАЧИНЕ 2. РЕДА (конвективни члан је нелинеаран, ред ПДЈ је одређен највећим изводом у једначини).



ЧВРСТА, НЕПРОПУСНА
НЕПОКРЕТНА КОНТУРА

Гранични услов уз Н-С једначину:

На контури: $\vec{U} = 0$

$(U_t = 0,\ U_n = 0)$

Гранични услов за невискозан флуид за исту контуру:

$\vec{U} = U_t\vec{t}, \quad U_n = 0, \quad U_t = U$

5.3 РЕЖИМИ СТРУЈАЊА ФЛУИДА

У механици флуида разликујемо два режима струјања:
- ЛАМИНАРНИ и ТУРБУЛЕНТНИ

Код ЛАМИНАРНОГ струјања флуид се креће у тзв. слојевима (laminae – слој), струјнице су правилне. Турбулентно струјање се карактерише хаотичним кретањем флуида

ЛАМИНАРНО СТРУЈАЊЕ (вентил врло мало отворен)

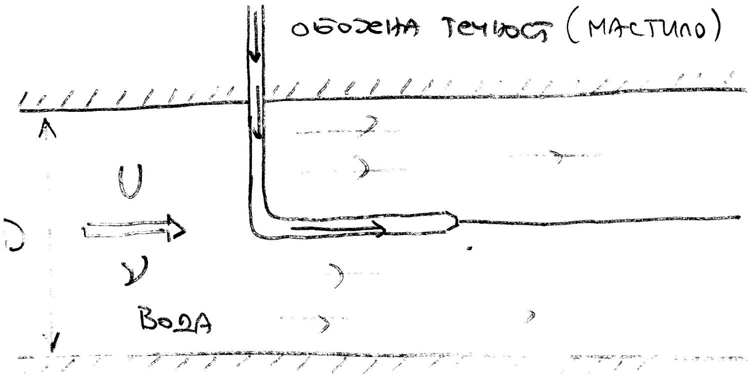
ТУРБУЛЕНТНО СТРУЈАЊЕ (отворен вентил)

Турбулентно струјање је увек нестационарно и тродимензијско – у фиксној тачки простора увек постоје 3 компоненте брзине, чије се вредности мењају током времена.

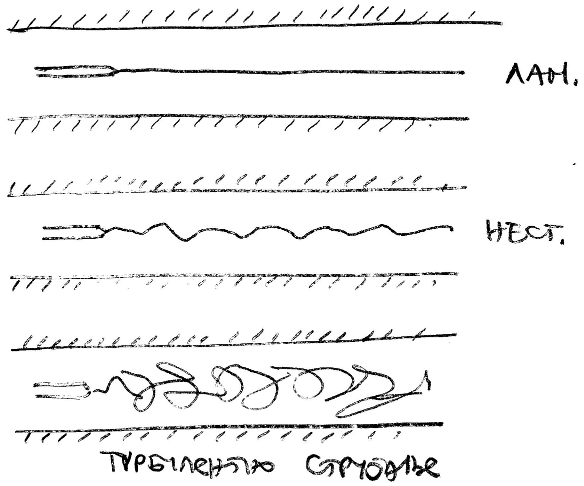
Прелазак ЛАМИНАРНО → ТУРБУЛЕНТНО СТРУЈАЊЕ је тема истраживања у теорији ХИДРОДИНАМИЧКЕ СТАБИЛНОСТИ.

Први научник који је утврдио услове под којима ће струјање у цевима бити ЛАМИНАРНО је Озборн Рејнолдс (Osborne Reynolds, 1842 – 1912). 1883. године он је изводио експерименте чији су резултати међу најзначајнијим у историји развоја механике флуида.

Рејнолдсов експеримент



Варирали су параметри
U, D, ν



$$\boxed{Re = \frac{UD}{\nu}}$$ Рејнолдсов број

$$\boxed{Re_{kr} = 2320}$$ критична вредност Рејнолдсовог броја

Ако је $Re < 2320$ струјање у цеви ће сигурно бити ЛАМИНАРНО, и оно ће се одржавати ламинарним без обзира на спољашње поремећаје.

У строго контролисаним условима могуће је да струјање буде ЛАМИНАРНО и при већим вредностима Re броја.

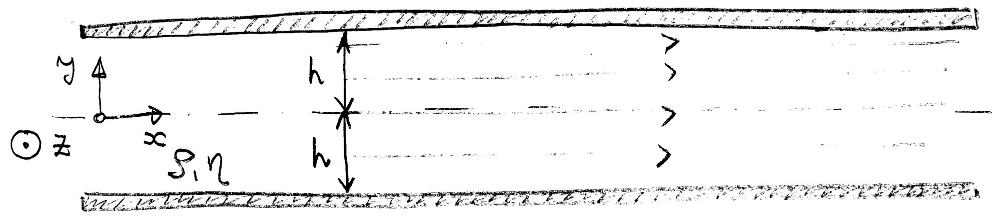
Математичка анализа ТУРБУЛЕНТНИХ СТРУЈАЊА је знатно компликованија од анализе ЛАМИНАРНИХ СТРУЈАЊА. Оба режима струјања су описана истом једначином – то је НАВИЈЕ-СТОКСОВА једначина

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \underbrace{u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k}}_{\substack{\text{НЕЛИНЕАРНИ}\\ \text{КОНВЕКТИВНИ}\\ \text{ЧЛАН}\\ \text{(ИНЕРЦИЈАЛНА СИЛА)}}} = f_i - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i} + \underbrace{\nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_k}}_{\text{ВИСКОЗНА СИЛА}}$$

$$Re = \frac{\text{ИНЕРЦИЈАЛНА СИЛА}}{\text{ВИСКОЗНА СИЛА}}$$; Турбулентна струјања: велике вредности Re-броја (million dollar prize)

Тачна решења НС једначина постоје само у одређеним случајевима ЛАМИНАРНОГ СТРУЈАЊА. Нека од њих се обрађују у наставку.

5.4 Стационарно ламинарно струјање нестишљивог флуида између хоризонталних паралелних плоча



$\vec{f} = -g\vec{j}$

$\vec{g}$

Нестишљив флуид: $\rho = const.$; стационарно струјање: $\frac{\partial}{\partial t} = 0$

На основу геометрије проблема: $\vec{U} = u\vec{i}$, тј. $v = w = 0$

струјање је равањско: $\frac{\partial}{\partial z} = 0$, $w = 0$

За анализу користимо једначину континуитета и Навије-Стоксове једначине за правце x и y.

Једначина континуитета: $\frac{\partial u}{\partial x} + \cancel{\frac{\partial v}{\partial y}}^{0} + \cancel{\frac{\partial w}{\partial z}}^{0} = 0 \rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = 0$

$\rightarrow \boxed{u = u(y)}$ На основу јдн континуитета $\boxed{u \neq u(x)}$ (потпуно развијено струјање

$$НС\ x: \quad \cancel{u\frac{\partial u}{\partial x}}^{0} + \cancel{v\frac{\partial u}{\partial y}}^{0} + \cancel{w\frac{\partial u}{\partial z}}^{0} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\left(\cancel{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}^{0} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \cancel{\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}}^{0}\right)$$

$$НС\ y: \quad \cancel{u\frac{\partial v}{\partial x}}_{0} + \cancel{v\frac{\partial v}{\partial y}}_{0} + \cancel{w\frac{\partial v}{\partial z}}_{0} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} - g + \nu\left(\cancel{\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}}_{0} + \cancel{\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}}_{0} + \cancel{\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}}_{0}\right)$$

Једначине се своде на:

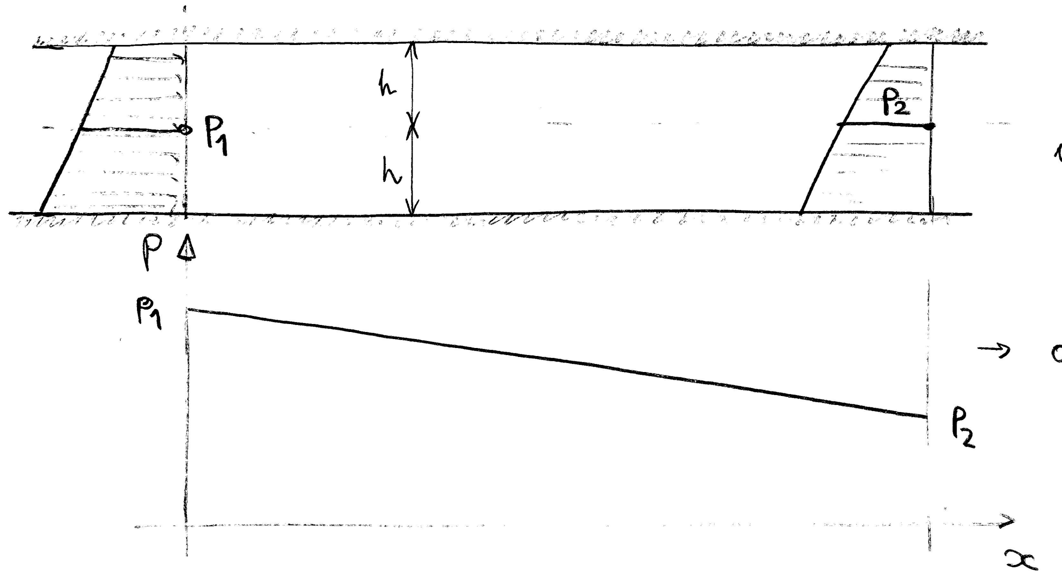
$$\left.\begin{aligned} -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= 0 \\ -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} - g &= 0 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} &= \eta\frac{d^2 u}{dy^2} \quad \ldots (5.20) \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= -\rho g \quad \ldots (5.21) \end{aligned}$$

Интеграција једначине 2:

$$p(x,y) = -\rho g y + C(x)$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = C'(x) \rightarrow \boxed{\frac{\partial p}{\partial x} = f(x)} \quad \ldots \quad (5.22)$$

Расподела притиска у случају НЕПОКРЕТНИХ ПЛОЧА



P_1, P_2 је исто што и осредњени притисак

→ ова расподела важи за било коју хоризонталну линију $y = const.$

Одређивање профила брзине:

$$\eta \frac{d^2 u}{dy^2} = k \rightarrow \frac{d}{dy}\left(\frac{du}{dy}\right) = \frac{k}{\eta} \rightarrow \frac{du}{dy} = \frac{k}{\eta} y + C_1$$

$$\boxed{u(y) = \frac{k}{2\eta} y^2 + C_1 y + C_2}$$ опште решење (5.25)

① Случај НЕПОКРЕТНИХ ПЛОЧА:

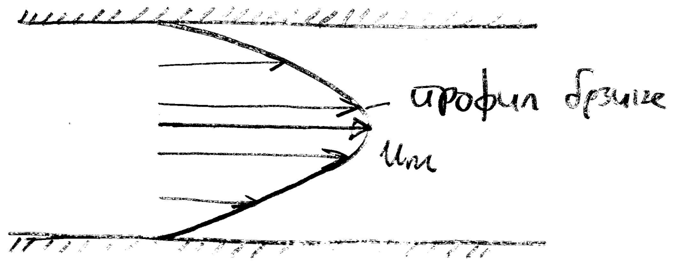
Гранични услови: $y = -h: \; u = 0$, $y = h: \; u = 0$

$$\left.\begin{aligned} 0 &= \frac{k}{2\eta} h^2 - C_1 h + C_2 \\ 0 &= \frac{k}{2\eta} h^2 + C_1 h + C_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} C_2 &= -\frac{k}{2\eta} h^2 \\ C_1 &= 0 \end{aligned}$$

Решење у случају НЕПОКРЕТНИХ ПЛОЧА

$$u(y) = \frac{k}{2\eta}\left(y^2 - h^2\right) = -\frac{\partial p}{\partial x}\frac{1}{2\eta}\left(h^2 - y^2\right)$$

$$\boxed{u(y) = -\frac{kh^2}{2\eta}\left[1 - \left(\frac{y}{h}\right)^2\right] \equiv \frac{\Delta p h^2}{2\eta L}\left[1 - \left(\frac{y}{h}\right)^2\right]} \quad (5.26)$$



u_m ... максимална брзина (брзина на половини растојања између плоча)

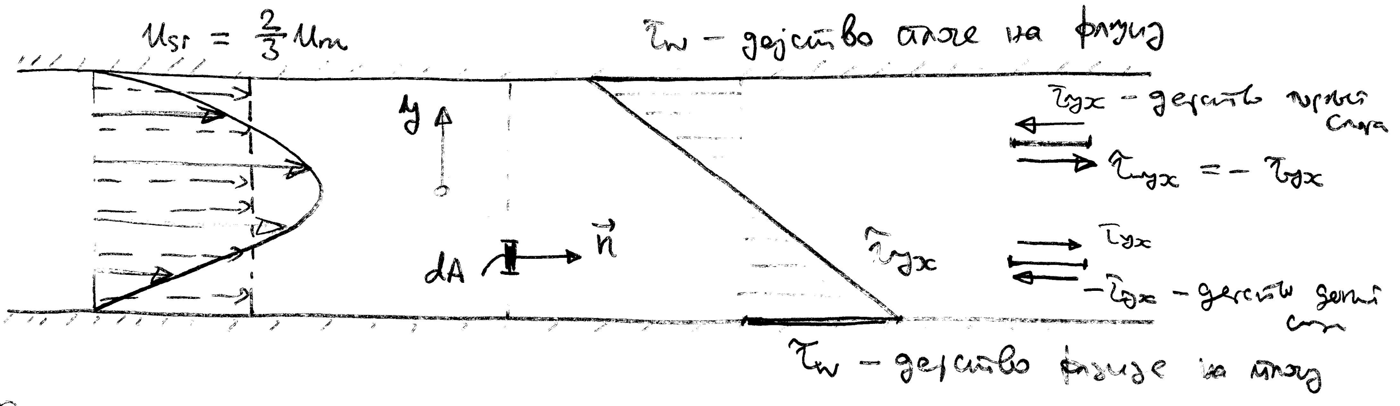
$$\boxed{u_m = \frac{\Delta p h^2}{2\eta L}} \; \dots \; (5.27)$$

Профил брзине се може написати и у облику:

$$u = u_m\left[1-\left(\frac{y}{h}\right)^2\right] \quad \ldots \quad (5.28)$$

Расподела смицајног напона τ_{yx}

$$\tau_{yx} = \eta\frac{du}{dy} = -\eta u_m \frac{2y}{h^2} = -2\eta\frac{u_m}{h^2}y \quad \ldots \quad (5.29)$$



Запремински проток између плоча:

$$\dot{V} = \iint_A \vec{U}\cdot\vec{n}\,dA = \iint_A u\,dA = \int_{-h}^{h} u(y)\,b\,dy = b\int_{-h}^{h} u_m\left[1-\left(\frac{y}{h}\right)^2\right]dy =$$

$$= b u_m\left[y - \frac{y^3}{3h^2}\right]_{-h}^{h} = u_m b\left[h-(-h) - \frac{h^3-(-h)^3}{3h^2}\right] =$$

$$= u_m b\left(2h - \frac{2h}{3}\right) = \frac{4}{3}u_m b h = \frac{2}{3}u_m(b\cdot 2h) \quad \ldots (5.30)$$

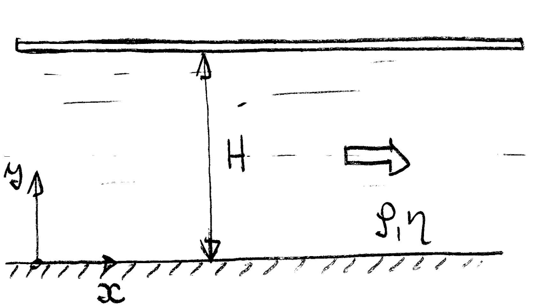
Средња брзина – замишљена, константна брзина која остварује исти запремински проток као и стварни профил брзине:

$$\dot{V} = u_{sr}A = u_{sr}b\,2h \Rightarrow \boxed{u_{sr} = \frac{2}{3}u_m} \quad \ldots \quad (5.31)$$

Заменом јдн. (5.27) у (5.31) добија се:

$$u_{sr} = \frac{2}{3}\frac{\Delta p h^2}{2\eta L} \rightarrow \boxed{u_{sr} = \frac{1}{3}\frac{\Delta p h^2}{\eta L}} \quad \ldots \quad (5.32)$$

② Ламинарно струјање између једне покретне и једне непокретне плоче



Опште решење је исто у оба случаја. Разлика је у граничним условима!!

$$u = \frac{k}{\eta}\frac{y^2}{2} + C_1 y + C_2$$

Гранични услови: $y = 0: \ u = 0$ и $y = H: \ u = U_0$

$$\left.\begin{aligned} 0 &= C_2 \\ U_0 &= \frac{k}{2\eta}H^2 + C_1 H \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} C_1 &= \frac{U_0}{H} - \frac{k}{2\eta}H^2 \\ C_2 &= 0 \end{aligned}$$

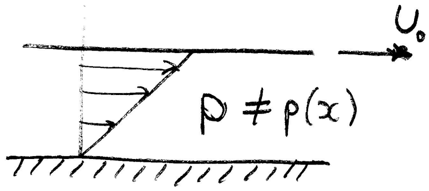
Профил брзине:

$$u = \frac{k}{2\eta}y^2 + \frac{U_0}{H}y - \frac{k}{2\eta}yH^2 = \frac{U_0}{H}y + \frac{k}{2\eta}\left(y^2 - yH\right)$$

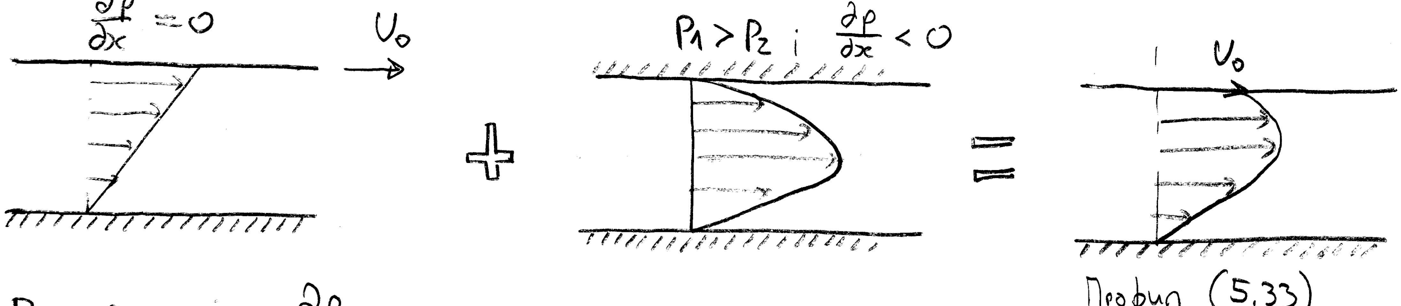
$$\rightarrow \boxed{u(y) = \underbrace{\frac{U_0}{H}y}_{\text{услед кретања плоче}} - \underbrace{\frac{k}{2\eta}\left(yH - y^2\right)}_{\text{услед градијента притиска}}} \quad \ldots \quad (5.33)$$

Ако је поље притиска хомогено, онда је $k = \frac{\partial p}{\partial x} = 0$, па се профил своди на: у x-правцу

$$u(y) = U_0\frac{y}{H} \quad - \text{ Куетово струјање}$$



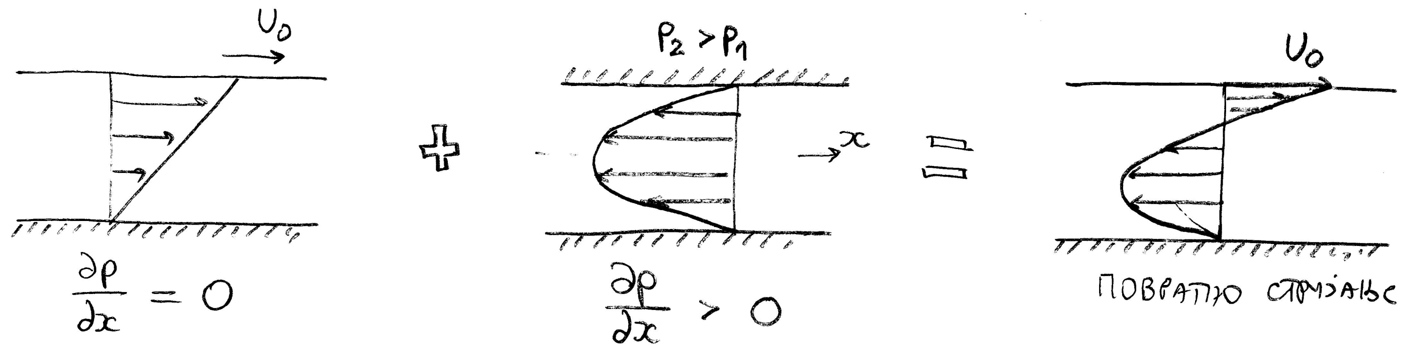
Кретање флуида је узроковано само кретањем плоче



Профил (5.33) за $k < 0$ ($p_1 > p_2$)

$p_1 > p_2 \longrightarrow \frac{\partial p}{\partial x} < 0 \ldots$ НЕГАТИВАН ГРАДИЈЕНТ ПРИТИСКА

Ако је узрочник струјања флуида само разлика притиска, онда је смер струјања од већег ка мањем притиску (у обрнутом смеру од grad p)



Запремински проток између плоча:

$$\dot{V} = \int_0^H u(y)\, b\, dy = \int_0^H \left[\frac{U_0}{H} y - \frac{k}{2\eta}\left(yH - y^2\right)\right] b\, dy =$$

$$= b\left[\frac{U_0}{H}\frac{y^2}{2} - \frac{k}{2\eta}\left(H\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3}\right)\right]_0^H = b\left[\frac{U_0 H^{\cancel{2}}}{2\cancel{H}} - \frac{k}{2\eta}\left(\frac{H^3}{2} - \frac{H^3}{3}\right)\right]$$

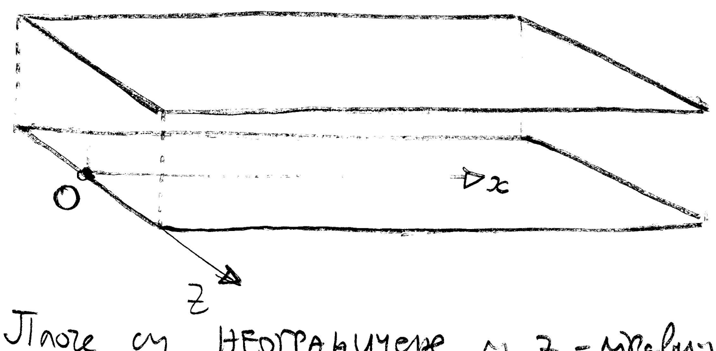
$$\dot{V} = b\left(\frac{U_0 H}{2} - \frac{kH^3}{12\,\cancel{6}\,\eta}\right) \rightarrow \boxed{\dot{V} = \frac{1}{2}\left(U_0 - \frac{kH^2}{6\,\cancel{3}\,\eta}\right) bH} \quad \ldots (5.34)$$

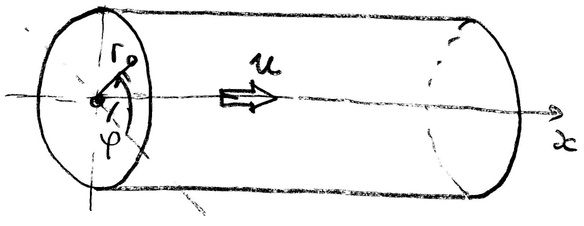
За $U_0 = \frac{kH^2}{\cancel{3}\,6\,\eta} = \frac{\partial p}{\partial x}\frac{H^2}{\cancel{3}\,6\,\eta}$ запремински проток ће бити једнак нули!!

5.5 Стационарно ламинарно струјање нестишљивог флуида кроз праву кружну цев

Hagen - Pouiselle

u – аксијална брзина
v – радијална брзина
w – обимска брзина





Плоче су неограничене у z-правцу

→ $\boxed{\text{РАВАНСКО СТРУЈАЊЕ}}$

у свакој равни паралелној са равни Oxy имамо исту струјну слику

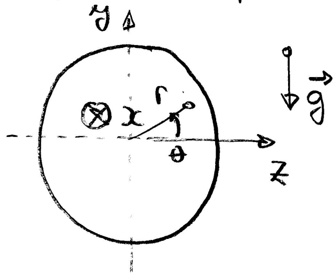
$w = 0, \quad \frac{\partial}{\partial z} = 0$

Струјна слика је иста у свакој равни која садржи осу цеви

$\boxed{\text{ОСНОСИМЕТРИЧНО СТРУЈАЊЕ}}$

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} = 0$$

Приликом разматрања овог проблема занемарићемо утицај гравитације, тако да ће се добити да је

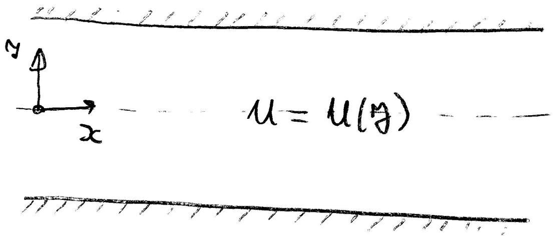


$$p = p(x)$$

$$p = p(x) - \rho g r \sin\theta$$

Ако се $\vec{g}$ узме у обзир онда је $p = p(x) + C(r,\theta)$

НЕПОКРЕТНЕ ПАРАЛЕЛНЕ ПЛОЧЕ



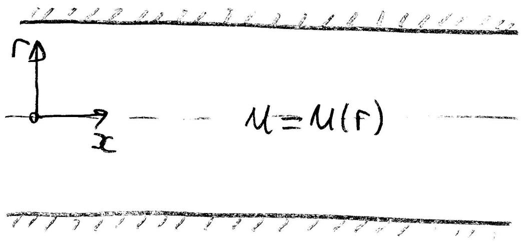
$\vec{v} = u\vec{i}$, $\dfrac{\partial}{\partial z} = 0$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \underbrace{\eta \frac{d^2 u}{dy^2}}_{\eta \Delta u}$$

у Декартовим коорд.

аналогија $\Longleftrightarrow$

КРУЖНА ЦЕВ



$\vec{v} = u\vec{i}$, $\dfrac{\partial}{\partial \varphi} = 0$

$$\frac{dp}{dx} = \underbrace{\eta \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{du}{dr}\right)}_{\eta \Delta u}$$

у поларно цилиндр. координатама

Лапласов оператор у поларно-цилиндричним координатама:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$$

У нашем случају: $u = u(r)$

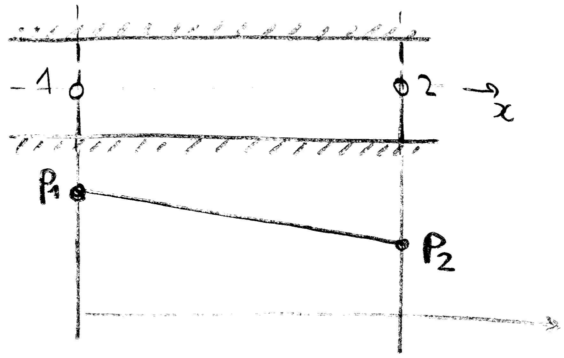
$$\Delta u = \frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{du}{dr} = \frac{1}{r}\left(r\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{du}{dr}\right) = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{du}{dr}\right)$$

Решавамо једначину:

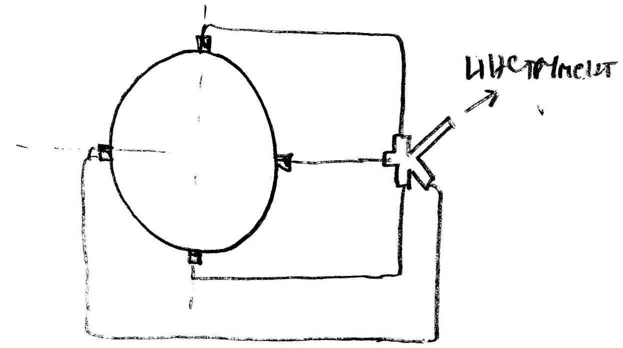
$$\underbrace{\frac{dp}{dx}}_{f(x)} = \underbrace{\eta \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{du}{dr}\right)}_{g(r)} \quad \ldots \quad (5.35)$$

Једначина (5.35) је могућа једино ако су лева и десна страна једнаке истој константи k, јер су x и r независне координате.

$$\frac{dp}{dx} = k \Rightarrow p = kx + C \rightarrow \boxed{p = -\frac{P_1 - P_2}{L}x}$$



Притисак се сматра константним у попречном пресеку. Практично одређивање притиска у пресеку

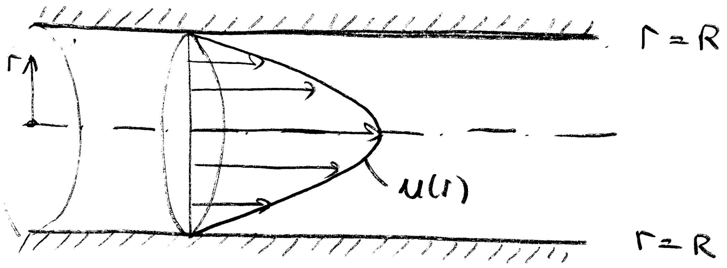


Профил брзине:

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{du}{dr}\right) = \frac{k}{\eta}$$

$$r\frac{du}{dr} = \frac{k}{2\eta}r^2 + C_1 \rightarrow du = \left(\frac{k}{2\eta}\cdot r + \frac{C_1}{r}\right)\cdot dr$$

$\Rightarrow$ Опште решење: $\boxed{u(r) = \frac{k}{4\eta}r^2 + C_1 \ln r + C_2}$ (5,36)



(r=0)

$C_1 = 0$ јер брзина у оси мора бити коначна!!

Гранични услов:

$r = R: \quad u = 0$

$$0 = \frac{k}{4\eta}R^2 + C_2 \Rightarrow C_2 = -\frac{k}{4\eta}R^2$$

$$\rightarrow u(r) = \frac{k}{4\eta}\left(r^2 - R^2\right) \Rightarrow u(r) = \frac{kR^2}{4\eta}\left[\left(\frac{r}{R}\right)^2 - 1\right]$$

Односно: $\boxed{u(r) = -\frac{kR^2}{4\eta}\left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right]}$ Профил брзине (обртни параболоид) (5,37)

Максимална брзина је у оси цеви:

$$u_m = -\frac{kR^2}{4\eta} = -\frac{dp}{dx}\frac{R^2}{4\eta} = \frac{\Delta p R^2}{4\eta L} \quad \ldots (5,38)$$

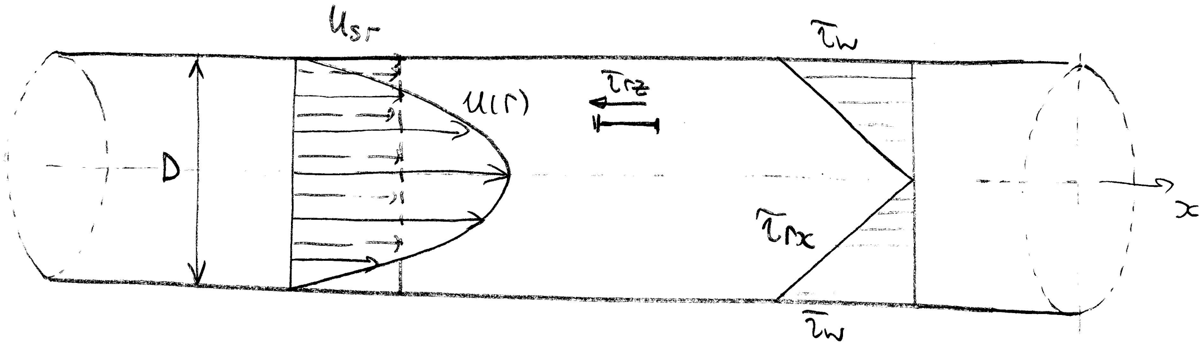
Профил брзине се може написати и у облику:

$$\boxed{u(r) = u_m\left[1-\left(\frac{r}{R}\right)^2\right]} \quad \ldots\ (5.38)$$

⊛⊛ окрени!!

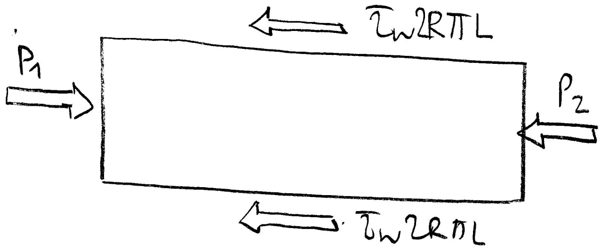
Расподела смицајног напона - једино постоји τ_{rx}

$$\tau_{rx} = \eta\frac{du}{dr} = -\eta\frac{2u_m}{R^2}r$$



Смицајни напон на зиду цеви: $\tau_w = \tau_{rx}\big|_{r=R} = -\eta\frac{2u_m}{R^2}R$

$$\rightarrow \quad \tau_w = -\eta\frac{2u_m}{R} \quad \rightarrow \quad |\tau_w| = \eta\frac{2u_m}{R} \quad \ldots\ (5.39)$$



$$\tau_w 2R\pi L = \underbrace{(p_1-p_2)}_{\Delta p}R^2\pi$$

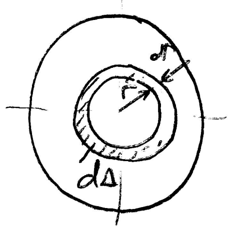
$$\Delta p = \tau_w\frac{2L}{R} \iff \boxed{\Delta p = \tau_w\frac{4L}{D}}$$

Заменом (5.38) у (5.39):

$$\tau_w = \eta\frac{2}{R}\frac{\Delta p R^2}{4\eta L} = \cancel{\eta}\frac{\Delta p R}{2\cancel{\eta}L} \Rightarrow \Delta p = \tau_w\frac{2L}{R}$$

Веза између пада притиска и смицајног напона на зиду цеви:

$$\boxed{\Delta p = \tau_w\frac{4L}{D}} \quad \ldots\ (5.40)$$



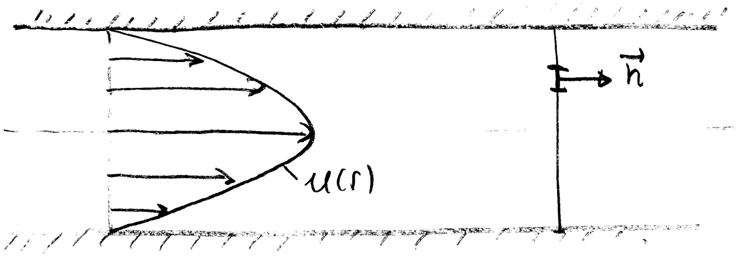
елементарни пресек

$dA = 2r\pi dr$

Запремински проток кроз цев:

$$\dot V = \iint_A u\,dA = \int_0^R u_m\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right)2r\pi\,dr = 2\pi u_m\int_0^R\left(r-\frac{r^3}{R^2}\right)dr$$

Одређивање флукса количине кретања:



$$\phi_{KK,x} = \iint_A \rho \vec{U}\underbrace{(\vec{U}\cdot\vec{n})}_{u} dA$$

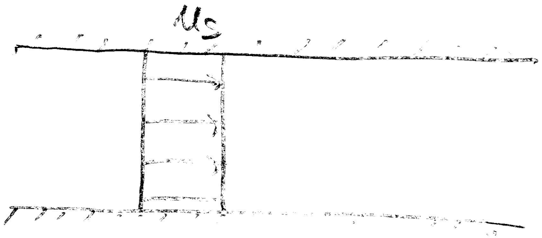
$$\phi_{KK,x} = \iint_A \rho u u \, dA$$

$$\phi_{KK,x} = \int_0^R \rho u^2 2r\pi \, dr = \int_0^R \rho \left[2u_s\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right)\right]^2 2r\pi \, dr =$$

$$= 4u_s^2 \rho 2\pi \int_0^R r\left(1 - 2\frac{r^2}{R^2} + \frac{r^4}{R^4}\right) dr =$$

$$= 8\rho u_s^2 \pi \left[\frac{r^2}{2} - \frac{1}{2}\frac{r^4}{R^2} + \frac{r^6}{6R^4}\right]_0^R =$$

$$= 8\rho u_s^2 \pi \left(\cancel{\frac{R^2}{2}} - \cancel{\frac{R^2}{2}} + \frac{R^2}{6}\right) = \frac{4}{3}\rho u_s^2 R^2 \pi = \boxed{\frac{4}{3}} \dot{m} u_s$$



$$\boxed{\beta = \frac{4}{3}}$$ Бусинесков коефицијент

$$\iint_A \rho \vec{U}(\vec{U}\cdot\vec{n}) dA = \dot{m}\vec{U}$$, за $\vec{U} \perp \vec{n}$ и $\vec{U}$=const на A

ако имамо профил који се мења на површи A

$$\iint_A \rho \vec{U}(\vec{U}\cdot\vec{n}) dA = \beta \dot{m} \vec{U}$$

β зависи од профила у попречном пресеку

За ЛАМИНАРНО СТРУЈАЊЕ У ЦЕВИМА:

$$\boxed{\beta_{лам} = \frac{4}{3}}$$

$$\dot V = 2\pi u_m \left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4R^2}\right]_0^R = 2\pi u_m \left(\frac{R^2}{2} - \frac{R^2}{4}\right) = \frac{u_m}{2} R^2 \pi$$

$$\rightarrow \quad \boxed{\dot V = \frac{u_m}{2} R^2 \pi = \frac{\Delta p \pi}{8 \eta L} R^4}$$

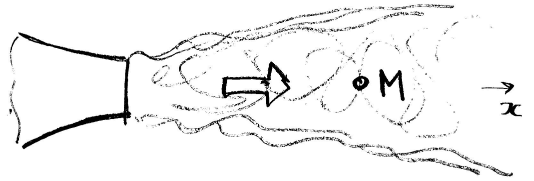
$$\boxed{\dot V \propto R^4}$$

крвни судови у старости: $R_2 = 0.9 R_1$

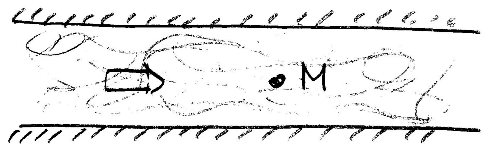
$$\frac{\dot V_2}{\dot V_1} = \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^4 = 0,656 \rightarrow$$ Проток крви се смањи за 35% !

Средња брзина: $$\boxed{u_{sr} = \frac{u_m}{2} = \frac{\Delta p R^2}{8 \eta L}}$$

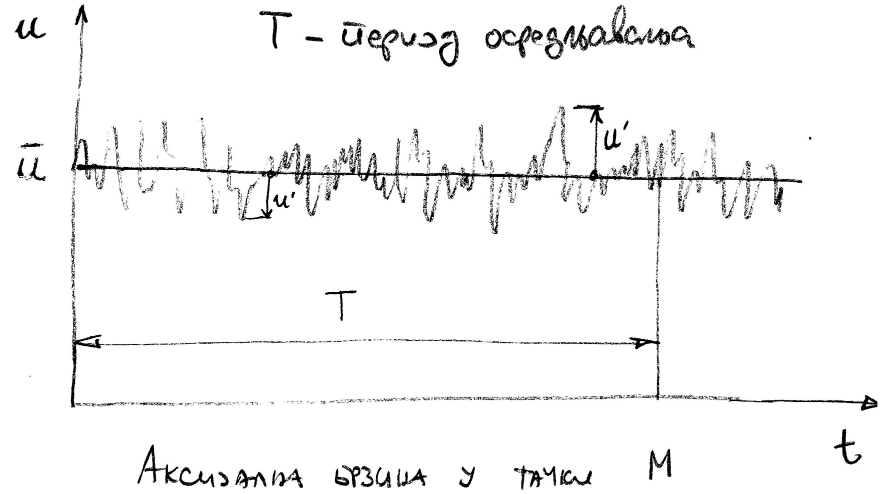
5.6 Анализа турбулентног струјања применом Рејнолдсове статистике. Рејнолдсове једначине



ТУРБУЛЕНТНИ МЛАЗ



ТУРБУЛЕНТНО СТРУЈАЊЕ ИЗМЕЂУ ПЛОЧА (У ЦЕВИ)



Аксијална брзина у тачки M

- брзина се мења у времену са одређеном фреквенцијом
- свако турбулентно струјање је тродимензијско и нестационарно

Рејнолдсова статистика: $\boxed{u = \bar u + u'}$ $\quad \bar u = \bar u(x,y,z)$

$$\boxed{\bar u = \frac{1}{T}\int_0^T u(x,y,z,t)\,dt}$$

u – (тренутна) брзина

$\bar u$ – временски осредњена брзина

u' – флуктуација брзине

Теоријски: $T \rightarrow \infty$

Практично је немогуће да $T \rightarrow \infty$, па се ПЕРИОД ОСРЕДЊАВАЊА бира тако да се статистичке карактеристике и не мењају са даљим повећањем T

Особине „оператора" временског осредњавања:

$$\overline{u'} = \frac{1}{T}\int_0^T u'\,dt = \frac{1}{T}\int_0^T (u-\bar{u})\,dt = \bar{u} - \bar{u} = 0$$

$$\overline{\frac{\partial u}{\partial y}} = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{\partial u}{\partial y}\,dt = \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{1}{T}\int_0^T u\,dt\right] = \frac{\partial \bar{u}}{\partial x}$$

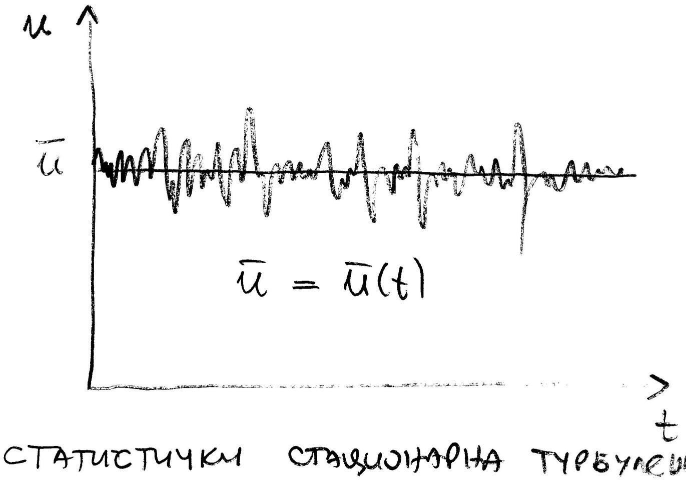
↳ границе интеграла не зависе од y

$$\overline{uv} = \overline{(\bar{u}+u')(\bar{v}+v')} = \overline{\bar{u}\bar{v} + \bar{u}v' + u'\bar{v} + u'v'} =$$

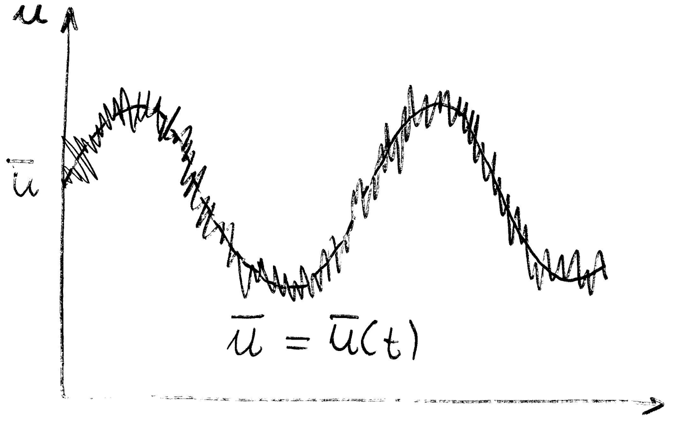
$$= \bar{u}\bar{v} + \bar{u}\underbrace{\cancel{\overline{v'}}}_{0} + \underbrace{\cancel{\overline{u'}}}_{0}\bar{v} + \overline{u'v'} = \bar{u}\bar{v} + \overline{u'v'}$$

Сада ћемо применити Рејнолдсову статистику на Навије-Стоксову једначину. Једначина која се при томе добија је РЕЈНОЛДСОВА ЈЕДНАЧИНА.

Разматраћемо СТАТИСТИЧКИ СТАЦИОНАРНУ турбуленцију код које временски осредњене вредности не зависе од времена: $\bar{u} \neq \bar{u}(t)$



СТАТИСТИЧКИ СТАЦИОНАРНА ТУРБУЛЕНЦ.



СТАТИСТИЧКИ НЕСТАЦИОНАРНА ТУРБ.

Код статистички нестационарне турбуленције врши се осредњавање по АНСАМБЛУ:

$$\langle u \rangle = \frac{1}{N}\sum_{N=1}^{N} u$$ – серија експеримената изведених под истим условима

Статистички стационарна турбуленција:

$$\overline{\frac{\partial u}{\partial t}} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = \emptyset$$

Једначина континуитета и Навије-Стоксова јдн (нестишљив флуид):

$$\frac{\partial u_k}{\partial x_k} = 0$$

$$\rho\left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k}\right) = \rho f_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \eta \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_k}$$

Трансформација конвективног члана.

$$u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} = \frac{\partial (u_i u_k)}{\partial x_k} - \cancel{u_i \frac{\partial u_k}{\partial x_k}}^{0} = \frac{\partial (u_i u_k)}{\partial x_k}$$

Осредњавање јдн. континуитета.

$$\frac{\partial u_k}{\partial x_k} = 0 \quad / \ \frac{1}{T}\int_0^T (\ldots)\, dt \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_k} = 0}$$

такође следи да је и $\frac{\partial u_k'}{\partial x_k} = 0$

Осредњавање Навије-Стоксове једначине:

$$\rho \cancel{\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t}}_{0} + \rho \frac{\partial (\overline{u_i u_k})}{\partial x_k} = \rho \bar{f}_i - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \eta \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_k \partial x_k}$$

$$\rho \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\bar{u}_i \bar{u}_k + \overline{u_i' u_k'}\right) = \rho \bar{f}_i - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\eta \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k}\right)$$

$$\rho \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\bar{u}_i \bar{u}_k\right) = \rho \bar{f}_i - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\eta \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} - \rho \overline{u_i' u_k'}\right)}_{*}$$

Трансформација члана *

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\eta \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} - \rho \overline{u_i' u_k'}\right) = \frac{\partial}{\partial x_k}\left[\underbrace{\eta\left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_i}\right)}_{\bar{\tau}_{ik}} - \underbrace{\rho \overline{u_i' u_k'}}_{\tilde{\tau}_{ik}^{turb}}\right]$$

$$\boxed{\tilde{\tau}_{ik}^{turb} = -\rho \overline{u_i' u_k'}}$$ - компонента тензора турбулентних (Рејнолдсових) напона

Укупни напон:

$$(\bar{\tau}_{ik})_{,\,ukup} = \bar{\tau}_{ik} + \tau_{ik}^{turb} \iff \boxed{\underset{\sim}{T}_{ik} = \underset{\sim}{\bar{T}} + \underset{\sim}{R}}$$

Тензор Рејнолдсових напона:

$$[\underset{\sim}{R}] = \begin{bmatrix} -\rho\overline{u'^2} & -\rho\overline{u'v'} & -\rho\overline{u'w'} \\ -\rho\overline{v'u'} & -\rho\overline{v'^2} & -\rho\overline{v'w'} \\ -\rho\overline{w'u'} & -\rho\overline{w'v'} & -\rho\overline{w'^2} \end{bmatrix}$$

Тензор Рејнолдсових напона је симетричан тензор 2. реда - 6 независних компоненти

Навије - Стоксова једначина.

$$\rho\left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k}\right) = \rho f_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\eta \frac{\partial u_i}{\partial x_k}\right)$$

Рејнолдсова једначина:

$$\bar{u}_k \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} = \rho \bar{f}_i - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\eta \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k}\right) + \overbrace{\frac{\partial}{\partial x_k}\left(-\rho\overline{u_i' u_k'}\right)}^{\text{додатни члан}}$$

Рејнолдсов (турбулентни) напон - додатни флукс количине кретања, интеракција између временски осредњеног и флуктуационог брзинског поља.

Пројекција Рејнолдсове једначине на x - правац:

$$\bar{u}\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v}\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \bar{w}\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = \rho \bar{f}_x - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \eta\left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2}\right)$$
$$+ \underbrace{\frac{\partial}{\partial x}\left(-\rho\overline{u'^2}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(-\rho\overline{u'v'}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(-\rho\overline{u'w'}\right)}$$

допунски чланови - осредњени флукс количине кретања изазван флуктуацијама брзине

Слично се добијају и пројекције на правце y и z. Систем Рејнолдсових једначина, заједно са једначином континуитета (4 једначине) је НЕЗАТВОРЕН јер имамо 10 непознатих величина: $\overline{u}, \overline{v}, \overline{w}$ и $\overline{p}$ и 6 турбулентних напона.

Одређивање нових, допунских релација и једначина којима се систем једначина затвара – МОДЕЛИРАЊЕ ТУРБУЛЕНЦИЈЕ. Постоји велики број турбулентних модела (додатних релација).

Бусинескова (Boussinesq) хипотеза:

$$-\rho \overline{u_i' u_j'} = \eta_t \left(\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \rho k \delta_{ij}$$

$$k = \frac{1}{2}\left(\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2} \right)$$ – кинетичка енергија турбуленције

односно: $$-\overline{u_i' u_j'} = \nu_t \left(\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} k \delta_{ij}$$

$\boxed{\nu_t}$ – турбулентна вискозност (карактеристика струјања)

За одређивање ТУРБУЛЕНТНЕ ВИСКОЗНОСТИ користе се ДОПУНСКЕ ЈЕДНАЧИНЕ. Најпознатији турбулентни модел $k-\varepsilon$ модел:

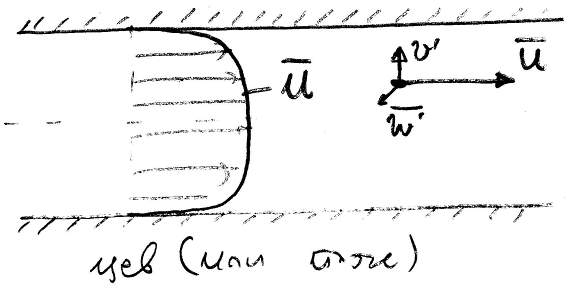
$$\boxed{\nu_t = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}}$$

k – кинетичка енергија турбуленције

ε – дисипација кинетичке енергије тур.

За k и ε изводе се допунске једначине преноса!

Турбулентно струјање које има ЈЕДНОДИМЕНЗИЈСКИ КАРАКТЕР



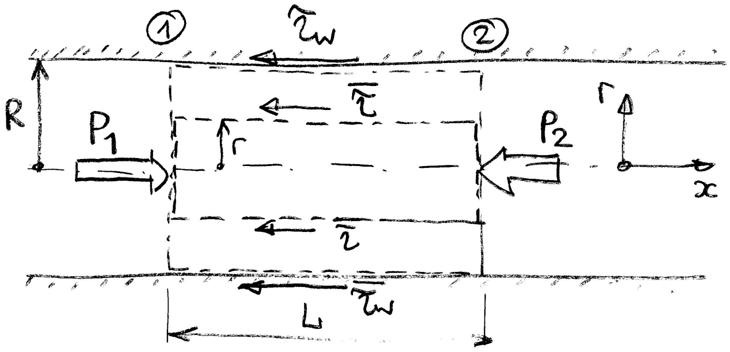
цев (или плоче)

$$\overline{u}, \quad \overline{v} = \overline{w} = 0$$

$$v' \neq 0, \quad w' \neq 0$$

5.7 ТУРБУЛЕНТНО СТРУЈАЊЕ У ЦЕВИМА

Примена закона количине кретања



Струјање је потпуно развијено:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = 0$$

→ флуксеви количине кретања кроз површи 1 и 2 су једнаки!

→ Једначина количине кретања се своди на равнотежу сила:

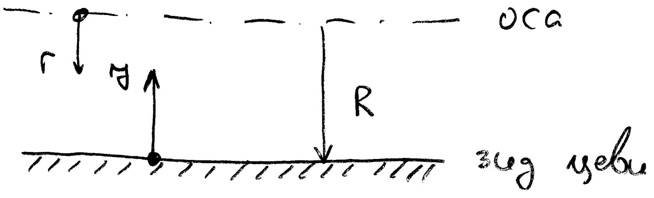
$$\bar{p}_1 R^2\pi - \bar{p}_2 R^2\pi - \bar{\tau}_w 2R\pi L = 0 \Rightarrow \boxed{\Delta\bar{p} = \bar{\tau}_w \frac{2L}{R}}$$

Једначина количине кретања за цилиндар полупречника r:

$$\bar{p}_1 r^2\pi - \bar{p}_2 r^2\pi - \bar{\tau}_{\text{ук}} 2r\pi L = 0 \Rightarrow \boxed{\Delta\bar{p} = \bar{\tau}_{\text{ук}} \frac{2L}{r}}$$

Следи да је расподела укупног напона у попречном пресеку

$$\bar{\tau}_{\text{ук}} = \bar{\tau}_w \frac{r}{R} \quad \text{или} \quad \bar{\tau}_{\text{ук}} = \tau_w\left(1 - \frac{y}{R}\right)$$



y – координата која се мери од зида цеви

$$y = R - r \quad \rightarrow \quad r = R - y$$

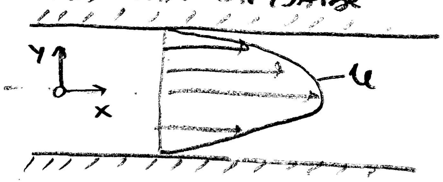
$\bar{\tau}_w \equiv \bar{\tau}_{\text{ук},w}$ – обухвата смицајне вискозне и смицајне турбулентне напоне на зиду!

Код струјања у цевима турбулентни смицајни напон је $\overline{u'v'}$, тако да је:

$$\bar{\tau}_{\text{ук}} = \eta \frac{d\bar{u}}{dr} - \rho\overline{u'v'} = \eta \frac{d\bar{u}}{dy} - \rho\overline{u'v'}$$

Аналогија (струјање између плоча)

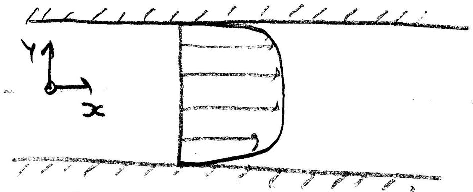
ЛАМИН. СТРУЈАЊЕ



$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{d\tau}{dy}$$

$$\tau = \eta \frac{du}{dy}$$

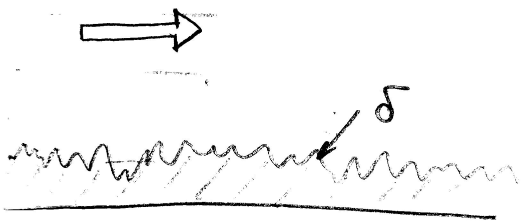
ТУРБУЛЕНТНО СТР.



$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} = \frac{d\bar{\tau}_{uk}}{dy}$$

$$\bar{\tau}_{uk} = \eta \frac{d\bar{u}}{dy} - \rho\overline{u'v'}$$

Примена димензијске анализе. Смицајни напон на зиду цеви



δ – средња апсолутна висина неравнине на зиду цеви — АПСОЛУТНА ХРАПАВОСТ!

Средња брзина код ТУРБУЛЕНТНОГ СТРУЈАЊА:

$$\bar{u}(r) = \frac{1}{T}\int_0^T u(r,t)\,dt$$ – просечна брзина

$$\bar{u}_s = \frac{\dot{V}}{A} = \frac{1}{R^2\pi}\int_0^R \bar{u}(r)\, 2r\pi\, dr = \frac{1}{R^2\pi}\int_0^R \left[\frac{1}{T}\int_0^T u(r,t)\,dt\right] 2r\pi\, dr$$

Димензијска анализа:

$$\Phi(\rho, \eta, D, \delta, \bar{u}_s, \bar{\tau}_w) = 0$$

$n = 6$, $p = 3$ (број параметара) $m = n - p = 3$ π монома

$\rightarrow$ $\Phi_1(\pi_1, \pi_2, \pi_3) = 0$ $\rightarrow$ параметре: $\rho, \bar{u}_s, D$

Димензијске ознаке: M – маса, L – дужина, T – време

$[\rho] = ML^{-3}$, $[D] = L$, $[\bar{u}_s] = LT^{-1}$

$[\eta] = ML^{-1}T^{-1}$, $[\delta] = L$, $[\bar{\tau}_w] = ML^{-1}T^{-2}$

Бездимензијски мономи: π_{τ_w}, π_δ и π_η

$$\Pi_{\tau_w} = \frac{\bar{\tau}_w}{\rho^x D^y \bar{u}_s^z} \rightarrow M^0L^0T^0 = ML^{-1}T^{-2}(ML^{-3})^x(L)^y(LT^{-1})^z$$

$$M^0L^0T^0 = M^{-x+1}L^{-1+3x-y-z}T^{-2+z}$$

$$\rightarrow \left.\begin{aligned} -x+1 &= 0 \\ -1+3x-y-z &= 0 \\ -2+z &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} x&=1 \\ y&=0 \\ z&=2 \end{aligned} \Rightarrow \boxed{\Pi_{\tau_w} = \frac{\bar{\tau}_w}{\rho \bar{u}_s^2}}$$

Бездимензијски моном Π_δ

$$\Pi_\delta = \frac{\delta}{\rho^x D^y \bar{u}_s^z} \rightarrow M^0L^0T^0 = L(ML^{-3})^x L^{-y}(LT^{-1})^z$$

$$M^0L^0T^0 = L^{1+3x-y+z} M^{-x} T^{-z}$$

$$\rightarrow x=0,\ z=0,\ y=1 \rightarrow \boxed{\Pi_\delta = \frac{\delta}{D}}$$

Бездимензијски моном Π_η:

$$\Pi_\eta = \frac{\eta}{\rho^x D^y \bar{u}_s^z} \rightarrow M^0L^0T^0 = ML^{-1}T^{-1}(ML^{-3})^x L^{-y}(LT^{-1})^z$$

$$M^0L^0T^0 = M^{1-x}L^{-1+3x-z-y}T^{-1+z}$$

$$\left.\begin{aligned} 1-x &= 0 \\ -1+z &= 0 \\ -1+3x-z-y &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} x&=1 \\ y&=1 \\ z&=1 \end{aligned}\right\} \rightarrow \boxed{\Pi_\eta = \frac{\eta}{\rho u_s D} = \frac{1}{Re}}$$

Полазна зависност је сведена на:

$$\phi_1\left(\frac{\bar{\tau}_w}{\rho \bar{u}_s^2}, \frac{\delta}{D}, \frac{1}{Re}\right) = 0 \Rightarrow \frac{\bar{\tau}_w}{\rho \bar{u}_s^2} = \phi_2\left(\frac{1}{Re}, \frac{\delta}{D}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\bar{\tau}_w = f(Re, k)\,\rho \frac{\bar{u}_s^2}{2}}$$

$f = f(Re, k)$

↳ фактор трења

$\lambda = 4f$ — коефицијент трења

$k = \frac{\delta}{D}$ – релативна храпавост

$$\rightarrow \boxed{\bar{\tau}_w = \lambda(Re, k)\frac{\rho \bar{u}_s^2}{8}}$$

Дарсијева формула

Применом једначине количине кретања изведено је:

$$\Delta \bar{p} = \bar{\tau}_w \frac{2L}{R}$$

Димензијском анализом је добијено:

$$\bar{\tau}_w = \lambda(Re, k)\frac{\rho \bar{u}_s^2}{8}$$

Добија се веза између пада притиска на дужини L и средње брзине струјања:

$$\Delta p = \lambda(Re, k)\frac{\rho \bar{u}_s^2}{2} \cdot \frac{1}{4}\frac{2L}{R} = \lambda(Re, k)\frac{L}{2R}\frac{\rho \bar{u}_s^2}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta p = \lambda(Re, k)\frac{L}{D}\frac{\rho u_s^2}{2}}$$ Дарсијева формула

Ламинарно струјање:

$$\Delta p = \tau_w \frac{2L}{R} = \eta \frac{4u_s}{R}\frac{2L}{R} = \frac{\eta}{\rho}\frac{16}{u_s R}\frac{L}{R}\frac{\rho u_s^2}{2} =$$

$$= \frac{16 \cdot 4 \nu}{u_s D}\frac{L}{D}\frac{\rho u_s^2}{2} = \frac{64}{Re}\frac{L}{D}\frac{\rho u_s^2}{2}$$

$$\rightarrow \boxed{\Delta p = \frac{64}{Re}\frac{L}{D}\frac{\rho u_s^2}{2}} \rightarrow \boxed{\lambda = \frac{64}{Re}}$$

ламинарно струјање ламинарно струјање

Код ламинарног струјања коефицијент трења не зависи од храпавости унутрашњег зида цеви, и он је аналитички одређен са: $\lambda = 64\,Re^{-1}$

Турбулентно струјање – $\lambda = \lambda(Re, k)$ се одређује експериментално

Закони трења при турбулентном струјању

Дефиниција динамичке, тј. привидне брзине:

$$u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} \longrightarrow \delta^+ = \frac{u_\tau \delta}{\nu} \text{ – бездим. храпавости}$$

На основу експерименталних истраживања:

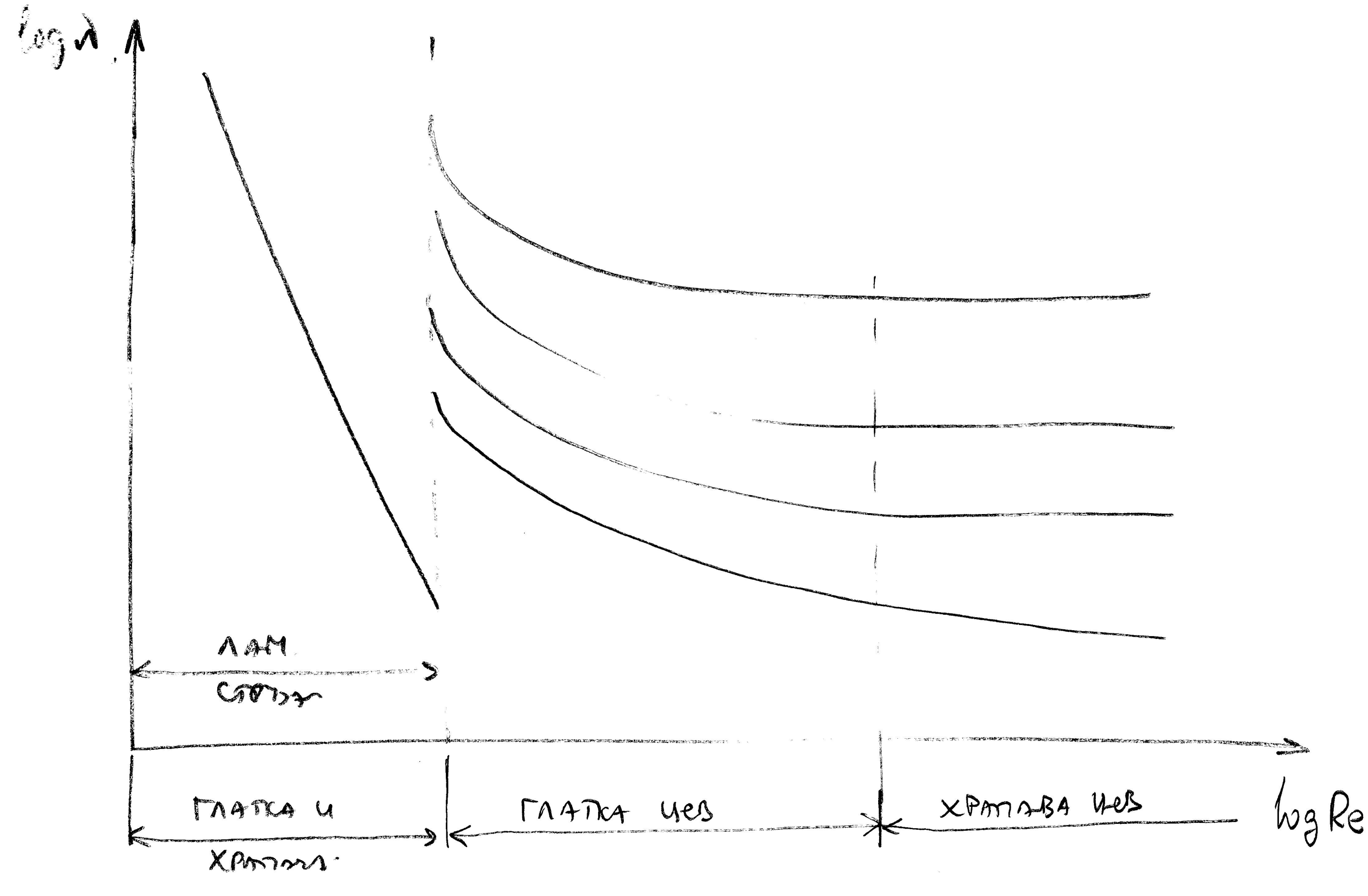
(1) $\delta^+ < 5$ ... хидраулички глатка цев: $\lambda = \lambda(Re)$

(2) $5 \leq \delta^+ \leq 70$ ... хидраулички храпава цев: $\lambda = \lambda(Re, k)$

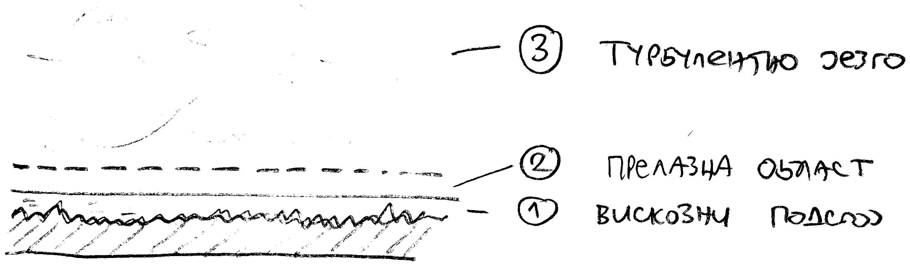
(3) $\delta^+ > 70$ ... хидраулички потпуно храпава цев: $\lambda = \lambda(k)$

Хидраулички глатке цеви:

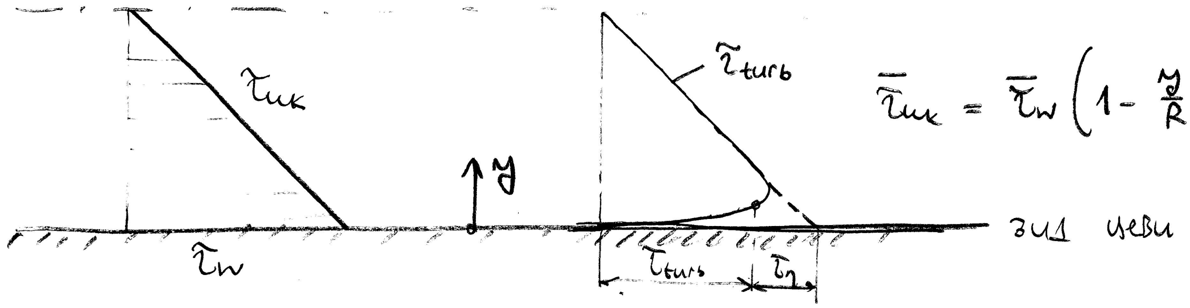
Блазиусова формула: $\boxed{\lambda = \dfrac{0.3164}{\sqrt[4]{Re}}}$



Универзални профил брзине код турбулентног струјања у хидраулички глатким цевима



Хидраулички глатка цев: вискозни подслој покрива све неравнине на зиду цеви



$$\overline{\tau}_{uk} = \overline{\tau}_w\left(1 - \frac{y}{R}\right)$$

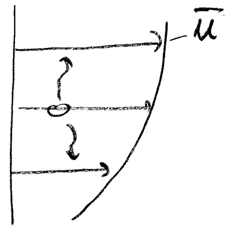
У близини зида: $\overline{u} = F(\overline{\tau}_w, \rho, \nu, y)$

димензијском анализом се добија: $\dfrac{\overline{u}}{u_\tau} = f\left(\dfrac{u_\tau y}{\nu}\right)$

Бездимензијска брзина: $\boxed{\overline{u}^+ = \dfrac{\overline{u}}{u_\tau}}$

Бездимензијско растојање од зида цеви: $\boxed{y^+ = \dfrac{u_\tau y}{\nu}}$

$$\Rightarrow \boxed{u^+ = f(y^+)}$$



$$\overline{\tau}_{uk} = \eta\frac{d\overline{u}}{dy} - \rho\overline{u'v'} = (\eta + \eta_t)\frac{d\overline{u}}{dy}$$

Прантлов модел путање мешања: $\eta_t = \rho l^2 \dfrac{d\overline{u}}{dy}$ - за 1-D турб. стр.

$$\rightarrow \boxed{\overline{\tau}_{uk} = \eta\frac{d\overline{u}}{dy} + \rho l^2\left(\frac{d\overline{u}}{dy}\right)^2}$$

l - дужина путање мешања (одређује се експериментално)

① Вискозни подслој

У овом делу струјног поља су доминантни вискозни смицајни напони:

$$y << R, \quad \overline{\tau_{uk}} \approx \overline{\tau_w} \rightarrow \quad \overline{\tau_w} = \eta \frac{d\bar{u}}{dy} \rightarrow \bar{u} = \frac{\overline{\tau_w}}{\eta} y + C$$

$$\text{За } y = 0: \bar{u} = 0 \rightarrow \bar{u} = \frac{\overline{\tau_w}}{\rho \nu} y \rightarrow \bar{u} = \frac{u_\tau^2 y}{\nu}$$

$$\rightarrow \frac{\bar{u}}{u_\tau} = \frac{u_\tau y}{\nu} \rightarrow \boxed{u^+ = y^+}$$

② Прелазна област

У овом делу оба напона су истог реда величине, па се диф. једначина не може решити.

③ Турбулентно језгро

$$\tau_t >> \tau_\eta \ ; \quad \overline{\tau_{uk}} \approx \overline{\tau_w} \ .. \text{ још увек смо у близини зида}$$

$$\rho l^2 \left(\frac{d\bar{u}}{dy}\right)^2 = \overline{\tau_w} \quad ; \quad l = \varkappa y, \quad \varkappa = 0.41$$

$$\rho \varkappa^2 y^2 \left(\frac{d\bar{u}}{dy}\right)^2 = \overline{\tau_w} \rightarrow \frac{du}{dy} = \sqrt{\frac{\overline{\tau_w}}{\rho}} \frac{1}{\varkappa y}$$

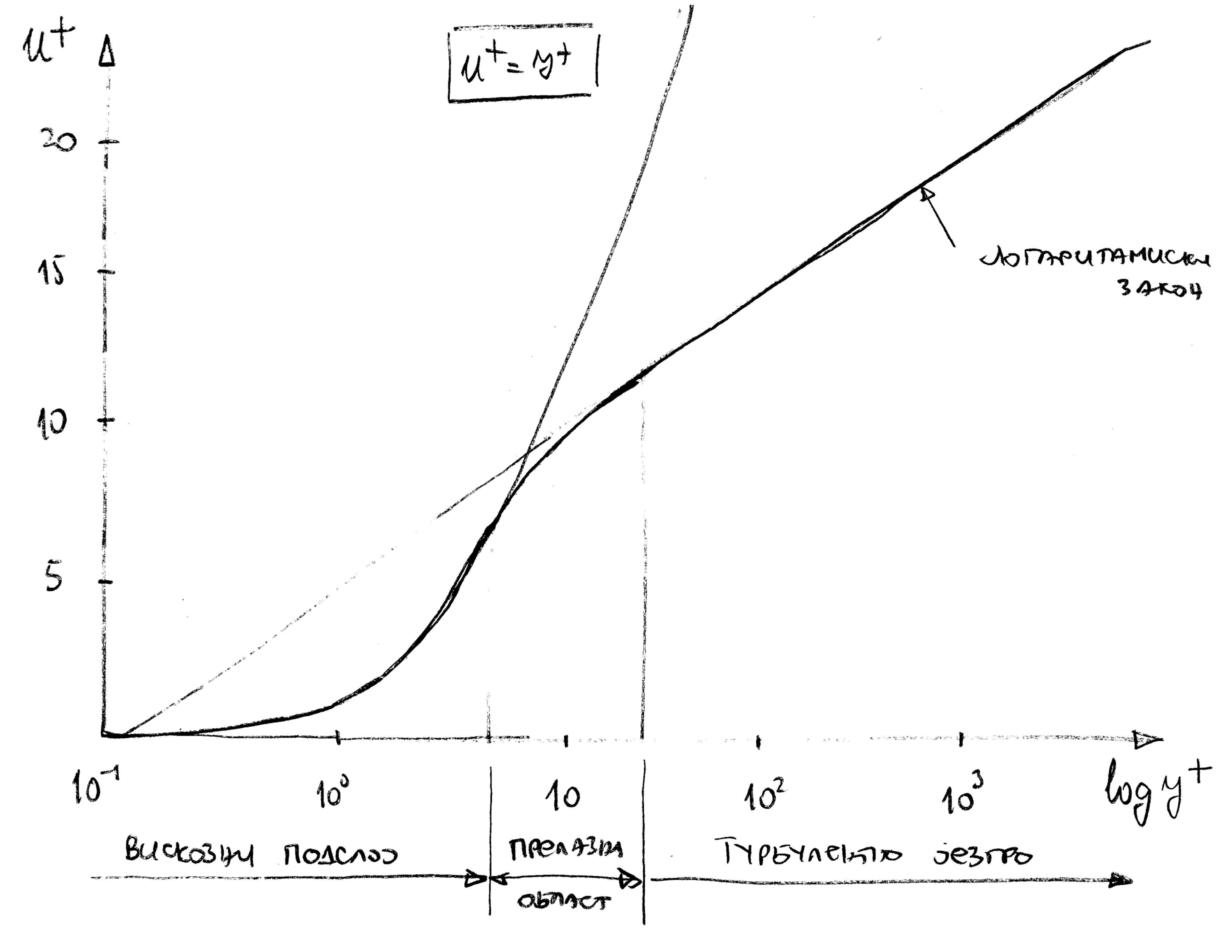
$$d\bar{u} = \frac{u_\tau}{\varkappa} \frac{dy}{y} \quad ; \quad \underbrace{y^+ = \frac{u_\tau y}{\nu} \rightarrow dy^+ = \frac{u_\tau}{\nu} dy}_{\frac{dy}{y} = \frac{dy^+}{y^+}}$$

$$d\bar{u} = \frac{u_\tau}{\varkappa} \frac{dy^+}{y^+}$$

$$\rightarrow \frac{\bar{u}}{u_\tau} = \frac{1}{\varkappa} \ln y^+ + B \rightarrow \boxed{u^+ = A \ln y^+ + B}$$

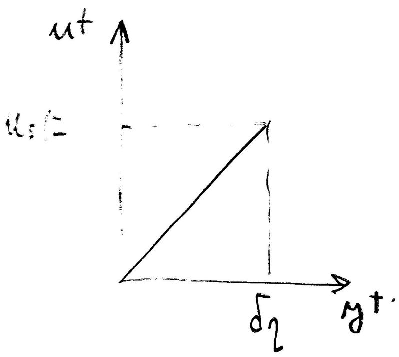
Вредности константи се одређују експериментално:

типичне вредности: $A = 2.5$ и $B = 5.5$



. Процена дебљине граничног слоја:

У слоју дебљине $\delta_\eta = y_{visk.}$ просечна брзина треба да нарасте линеарно до вредности $\bar{u}_s/2$.



$$\bar{\tau}_w = \frac{\lambda}{8}\rho\bar{u}_s^2$$

$$\bar{\tau}_w = \eta\frac{d\bar{u}}{dy}\Big|_{y=0} = \eta\frac{\bar{u}_s/2}{\delta_\eta}$$

$$\to \eta\frac{\bar{u}_s}{2\delta_\eta} = \frac{\lambda}{8}\rho\bar{u}_s^2$$

$$\frac{4\eta}{\lambda\rho\bar{u}_s} = \delta_\eta \to \frac{4}{\lambda}\frac{\nu}{\bar{u}_s D} = \frac{\delta_\eta}{D} \to \boxed{\frac{\delta_\eta}{D} = \frac{4}{\lambda}\frac{1}{Re}}$$

Блазијусова формула: $\lambda = \frac{0.3164}{\sqrt[4]{Re}} \to \boxed{\frac{\delta_\eta}{D} = \frac{12.64}{Re^{3/4}}}$

За $Re = 10^4 \to \lambda = 0.03 \to \frac{\delta_\eta}{D} = 0.01$

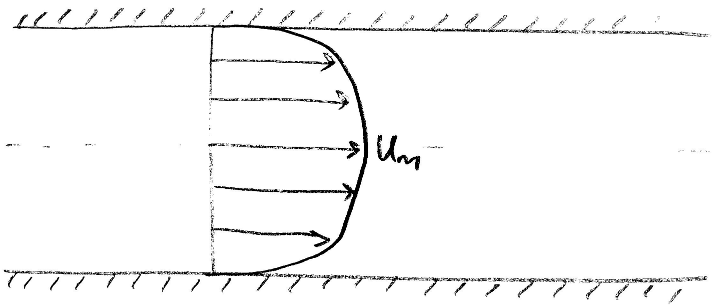
$\to D = 100mm \to \delta_\eta \approx 1mm$!

$Re\uparrow \to \delta_\eta\downarrow$

Истраживања Никурадзеа (Nicuradse) су показала да се у опсегу Рејнолдсових бројева $4\cdot10^3 < Re < 3.2\cdot10^6$ профил временски осредњене брзине се може описати степеном функцијом:

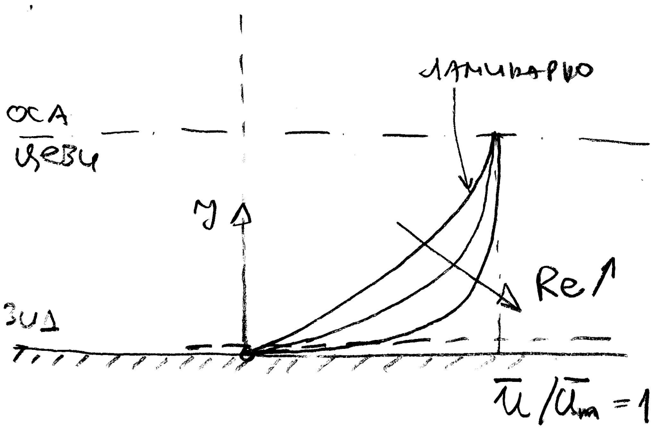
$$\bar{u} = \bar{u}_m \left(\frac{y}{R}\right)^{1/n} \rightarrow \boxed{\bar{u} = \bar{u}_m \left(1 - \frac{r}{R}\right)^{1/n}}$$

$Re = \bar{u}_s D/\nu$	$4\cdot10^3$	$1.1\cdot10^5$	$1.1\cdot10^6$	$2\cdot10^6$	$3.2\cdot10^6$
n	6	7	8.8	9.8	10



Не примењује се у области вискозног подслоја јер је

$$\left.\frac{d\bar{u}}{dy}\right|_{y=0} = \infty \,!$$



$$\bar{\tau}_w \propto \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}$$

$$Re\uparrow \rightarrow \bar{\tau}_w \uparrow$$

5.8 БЕРНУЛИЈЕВА ЈЕДНАЧИНА ЗА ВИСКОЗАН ФЛУИД

Навије - Стоксова једначина:

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + (\vec{U} \circ \nabla)\vec{U} = \vec{f} - \frac{1}{\rho}\nabla p + \nu \nabla^2 \vec{U}$$

$$(\vec{U} \circ \nabla)\vec{U} = \mathrm{grad}\left(\frac{U^2}{2}\right) - \vec{U} \times \mathrm{rot}\,\vec{U}$$

ПРЕТПОСТАВКЕ:

1. Струјање је стационарно, $\frac{\partial}{\partial t} = 0$
2. флуид је НЕСТИШЉИВ: $\rho = \mathrm{const.}$
3. флуид се креће у пољу силе земљине теже: $\vec{f} = \vec{g}$

z, $\vec{g}$: $\vec{f} = \nabla \phi_f = \mathrm{grad}\,\phi_f$, $\phi_f = -gz$

$$\Rightarrow \mathrm{grad}\left(\frac{U^2}{2}\right) - \vec{U} \times \mathrm{rot}\,\vec{U} = \mathrm{grad}\,\phi_f - \mathrm{grad}\left(\frac{p}{\rho}\right) + \nu \Delta \vec{U}$$

$$\mathrm{grad}\left(\frac{p}{\rho} - \phi_f + \frac{U^2}{2}\right) = \vec{U} \times \mathrm{rot}\,\vec{U} + \nu \nabla^2 \vec{U} \qquad (\nabla^2 \equiv \Delta)$$

$$\mathrm{grad}\underbrace{\left(\frac{p}{\rho} + gz + \frac{U^2}{2}\right)}_{B} = \vec{U} \times \mathrm{rot}\,\vec{U} + \nu \Delta \vec{U}$$

B - Бернулијев трочлан (МЕХАНИЧКА ЕНЕРГИЈА)

$$\mathrm{grad}\,B = \vec{U} \times \mathrm{rot}\,\vec{U} + \nu \nabla^2 \vec{U} \quad / \circ \vec{U}$$

$$\vec{U} \circ \mathrm{grad}\,B = \nu\, \vec{U} \circ \nabla^2 \vec{U}$$

φ - скаларна функција

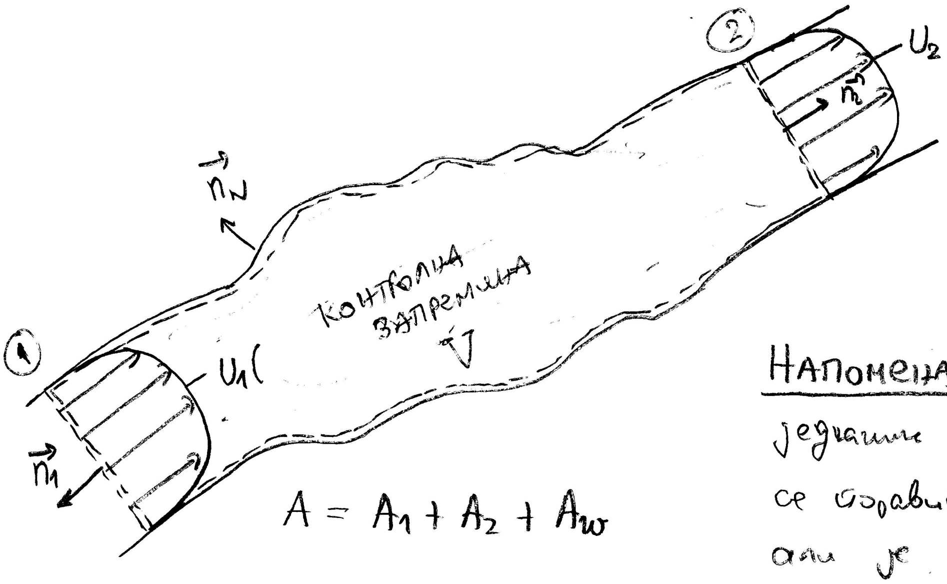
$\vec{a}$ - вектор

$$\nabla \circ (\varphi \vec{a}) = \vec{a} \circ \nabla \varphi + \varphi \nabla \circ \vec{a} = \vec{a} \circ \mathrm{grad}\,\varphi + \varphi\, \mathrm{div}\,\vec{a}$$

$$\vec{U} \circ \mathrm{grad}\,B = \nabla \circ (B\vec{U}) - B\underbrace{\nabla \circ \vec{U}}_{0\ (\text{нестишљив фл.})} = \nabla \circ (B\vec{U})$$

$$\Rightarrow \boxed{\nabla \circ (B\vec{U}) = \nu\, \vec{U} \circ \nabla^2 \vec{U}}$$

Сада ћемо интегралити једначину у погодно изабраном домену



$A = A_1 + A_2 + A_w$

У пресецима 1 и 2 струјање има ЈЕДНОДИМЕНЗИОНИ карактер $(\vec{U} \parallel \vec{n})$

<u>НАПОМЕНА:</u> у случају Рејнолдсове једначине на десној страни би се се појавио тензор турб. напона, али је одлична мала!

$$\iiint_V \nabla \cdot (B\vec{U})\, dV = \iiint_V \nu \vec{U} \cdot \nabla^2 \vec{U}\, dV$$

$$\oiint_A \vec{n} \cdot (B\vec{U})\, dA = \iiint_V \nu \vec{U} \cdot \nabla^2 \vec{U}\, dV$$

$$\oiint_A \left(\frac{p}{\rho} + \frac{U^2}{2} + gz\right)(\vec{U} \cdot \vec{n})\, dA = \iiint_V \nu \vec{U} \cdot \nabla^2 \vec{U}\, dV$$

$$\iint_{A_1} \frac{p}{\rho}(-U_1)\, dA = -\frac{p_c}{\rho}\mathring{V}_1 \quad , \quad p_c \text{ - притисак у тежишту}$$

$$\iint_{A_1} \frac{U^2}{2}(-U_1)\, dA = -\frac{1}{2}\iint_{A_1} U_1^3\, dA = -\boxed{\alpha_1}\frac{U_{1,sr}^2}{2}$$

↳ Кориолисов коеф.

$$\iint_{A_1} gz(-U_1)\, dA = -gz_c \mathring{V}_1$$

$$-\mathring{V}_1\left(\frac{p_1}{\rho} + \alpha_1\frac{U_{1,sr}^2}{2} + gz_1\right) + \mathring{V}_2\left(\frac{p_2}{\rho} + \alpha_2\frac{U_{2,sr}^2}{2} + gz_2\right) =$$

$$= \iiint_V \nu \vec{U} \cdot \nabla \vec{U}\, dV$$

Једначина континуитета: $\mathring{V}_1 = \mathring{V}_2 = \mathring{V}$

Члан на десној страни једначине представља рад у јединици времена вискозних сила (сила трења) и он је <u>негативан</u>! Вискозне силе делују СУПРОТНО од смера струјања!

$$\iiint_V \nu \vec{U} \cdot \nabla \vec{U} \, dV = - \dot{V} \, Y_{gub}$$

Y_{gub} – „губици" механичке енергије (део механичке енергије који се дисипативним ефектима претвара у топлоту - утиче на повећање унутрашње енергије)

$$\frac{p_1}{\rho} + \alpha_1 \frac{U_{1,sr}^2}{2} + g z_1 - \left(\frac{p_2}{\rho} + \alpha_2 \frac{U_{2,sr}^2}{2} + g z_2 \right) = Y_{gub}$$

$$\rightarrow \boxed{\frac{p_1}{\rho} + \alpha_1 \frac{U_{1,sr}^2}{2} + g z_1 = \frac{p_2}{\rho} + \alpha_2 \frac{U_{2,sr}^2}{2} + g z_2 + Y_{gub}} \quad \left[\frac{J}{kg} \right]$$