# 5. ДИНАМИКА НЕВИСКОЗНОГ ФЛУИДА

Као што је речено у Глави 2 код модела невискозног флуида стање напона СЕ СВОДИ НА ПРИТИСАК (нема смицајних, тј. вискозних напона).

$$\vec{p}_n = -p\vec{n}$$ – ВЕКТОР НАПОНА У ДИНАМИЦИ НЕВИСКОЗНОГ ФЛУИДА (и статици)

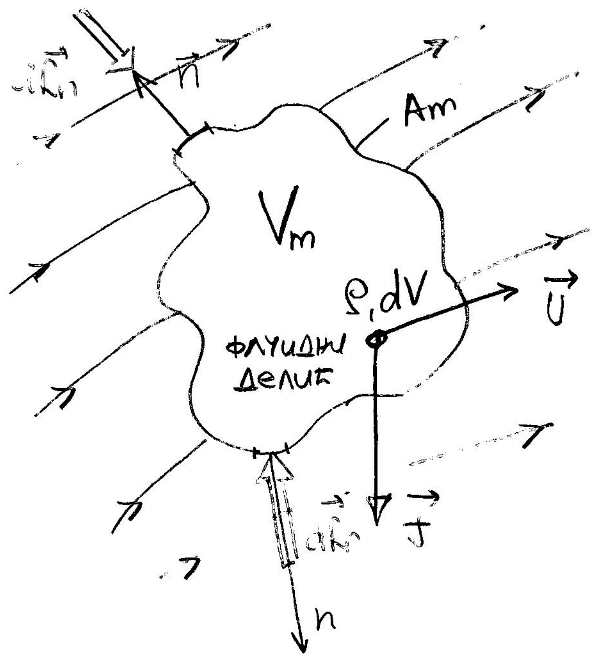
$$\vec{R}_n = \iint_A -p\vec{n}\, dA$$ – РЕЗУЛТУЈУЋА ПОВРШИНСКА СИЛА У ДИНАМИЦИ НЕВИСКОЗНОГ ФЛУИДА – СИЛА ПРИТИСКА!

Овај модел описивања динамике струјања флуида даје добре резултате за оне случајеве струјања у коме ефекти вискозних сила нису доминантни: струјање далеко од чврсте контуре, струјање у цевима и каналима са променама попречног пресека, расподела притиска око опструјаваног тела, итд.

Основна једначина којом се описује динамика невискозног флуида је II Њутнов закон, или једначина количине кретања невискозног флуида. Та једначина је у механици флуида позната под називом ОЈЛЕРОВА ЈЕДНАЧИНА ДИНАМИКЕ НЕВИСКОЗНОГ ФЛУИДА, јер је управо Ојлер (Leonhard Euler), један од највећих умова у историји људске цивилизације, први извео ту једначину.

## 5.1 ЗАКОН О ПРОМЕНИ КОЛИЧИНЕ КРЕТАЊА – ЈЕДНАЧИНА КОЛИЧИНЕ КРЕТАЊА ЗА НЕВИСКОЗАН ФЛУИД – ОЈЛЕРОВА ЈЕДНАЧИНА ДИНАМИКЕ НЕВИСКОЗНОГ ФЛУИДА

Посматра се кретање издвојене масе флуида – МАТЕРИЈАЛНЕ ЗАПРЕМИНЕ $V_m$. Други Њутнов закон: ПРОМЕНА КОЛИЧИНЕ КРЕТАЊА МАТЕРИЈАЛНОГ СИСТЕМА У ВРЕМЕНУ ЈЕДНАКА ЈЕ СУМИ СВИХ СИЛА КОЈЕ НА ТАЈ МАТЕРИЈАЛНИ СИСТЕМ ДЕЛУЈУ.




$$\frac{D\vec{K}}{Dt} = \vec{R}_m + \vec{R}_n$$

$\vec{R}_m$ – резултујућа масена сила

$$\vec{R}_m = \iiint_{V_m} \rho \vec{f}\, dV$$

$\vec{R}_n$ – резултујућа површинска сила

$$\vec{R}_n = \oiint_{A_m} -p\vec{n}\, dA$$

Количина кретања флуидног делића: $d\vec{K} = \vec{U} dm = \rho \vec{U} dV$

Количина кретања материјалне запремине: $\vec{K} = \iiint_{V_m} \rho \vec{U} dV$

$$\frac{D\vec{K}}{Dt} = \frac{D}{Dt}\iiint_{V_m} \rho \vec{U}\, dV = \iiint_{V_m} \rho \frac{D\vec{U}}{Dt}\, dV$$

Види лекцију

Ојлерова јдн. динамике невискозног флуида у интегралном облику за МАТЕРИЈАЛНУ ЗАПРЕМИНУ:

$$\boxed{\frac{D}{Dt}\iiint_{V_m} \rho \vec{U}\, dV = \iiint_{V_m} \rho \vec{f}\, dV + \oiint_{A_m} -p\vec{n}\, dA}$$

$$\frac{D}{Dt}\iiint_{V_m}\rho\vec{U}\,dV = \iiint_{V_m}\rho\vec{f}\,dV - \oiint_{A_m} p\,\vec{n}\,dA$$

Као што је претходно речено, $V_m = V_m(t)$ и $A_m = A_m(t)$, али члан на левој страни и други члан на десној страни се могу трансформисати у следеће изразе:

$$\frac{D}{Dt}\iiint_{V_m}\rho\vec{U}\,dV = \iiint_{V_m}\rho\frac{D\vec{U}}{Dt}\,dV$$

$$\oiint_{A_m} p\,\vec{n}\,dA = \oiint_{A_m}\vec{n}\,p\,dA = \iiint_{V_m}\nabla p\,dA \equiv \iiint_{V_m}\operatorname{grad}p\,dV$$

Даље се добија

$$\iiint_{V_m}\rho\frac{D\vec{U}}{Dt}\,dV = \iiint_{V_m}\rho\vec{f}\,dV - \iiint_{V_m}\nabla p\,dV$$

$$\iiint_{V_m}\left(\rho\frac{D\vec{U}}{Dt} - \rho\vec{f} + \nabla p\right)dV = 0$$

Како је запремина $V_m$ произвољно изабрана, последњи интеграл ће бити једнак нули када је подинтегрална функција једнака нули. Добија се:

$$\boxed{\rho\frac{D\vec{U}}{Dt} = \rho\vec{f} - \nabla p}$$

ОЈЛЕРОВА ДИФЕРЕНЦИЈАЛНА ЈЕДНАЧИНА ДИНАМИКЕ НЕВИСКОЗНОГ ФЛУИДА

$$\underbrace{\frac{D\vec{U}}{Dt}}_{\text{јединична инерцијална сила (убрзање)}} = \underbrace{\vec{f}}_{\text{јединична масена сила}} - \underbrace{\frac{1}{\rho}\nabla p}_{\text{јединична сила притиска}}$$

Пројекција Ојлерове једначине на $x$-осу

$$\frac{D\vec{U}}{Dt} = \vec{f} - \frac{1}{\rho}\nabla p \Big/ \cdot \vec{i} \quad \text{– јединични вектор } x\text{-осе}$$

$$\frac{D(\vec{U}\cdot\vec{i})}{Dt} = \vec{f}\cdot\vec{i} - \frac{1}{\rho}\left(\nabla p \cdot \vec{i}\right)$$

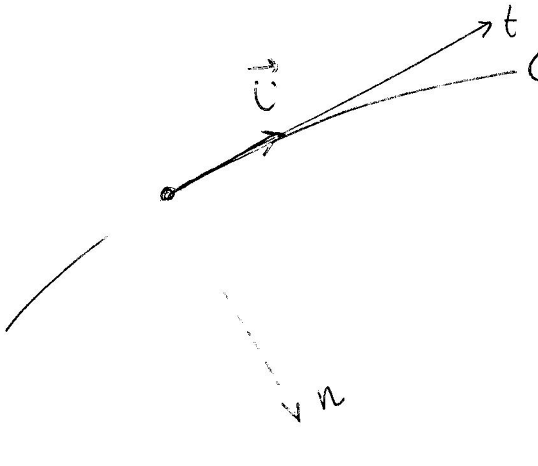
$$\underbrace{\frac{Du}{Dt} = f_x - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}}_{\text{Лагранжев приступ}} \iff \overbrace{\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}}^{\text{Ојлеров приступ}} = f_x - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}$$

Записано у индексној нотацији:

$$\frac{Du_i}{Dt} = f_i - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i} \iff \boxed{\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = f_i - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i}}$$

Ојлерова ЈДК. – индексна нотација

## Ојлерова једначина у природним координатама



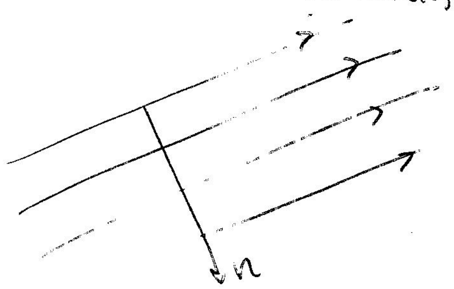

$$\vec{U} = U\vec{s}$$

$\vec{s}$ – јединични вектор правца струјнице.

$$t: \quad \frac{\partial U}{\partial t} + U\frac{\partial U}{\partial s} = f_s - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial s}$$

$$n: \quad \frac{U^2}{R_K} = f_n - \frac{\partial p}{\partial n}$$

Ако су струјнице праве линије: $R_K \to \infty$




$$\rightarrow \boxed{\frac{\partial p}{\partial n} = \rho f_n}$$

Расподела притиска је хидростатичка!

↳ правац управан на струјнице

## 5. 2 БЕРНУЛИЈЕВ ИНТЕГРАЛ ОЈЛЕРОВЕ ЈЕДНАЧИНЕ

Полазимо од Ојлерове једначине у Громеко-Ламбовом облику (трансформисани конвективни члан убрзања):

$$\frac{D\vec{U}}{Dt} = \vec{f} - \frac{1}{\rho}\nabla p \iff \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \underbrace{\vec{U}\circ\nabla\vec{U}}_{\text{КОНВЕКТИВНИ ДЕО УБРЗАЊА}} = \vec{f} - \frac{1}{\rho}\nabla p$$

На основу теорема ВЕКТОРСКО-ДИФЕРЕНЦИЈАЛНОГ РАЧУНА:

$$\vec{U}\circ\nabla\vec{U} = \nabla\left(\frac{U^2}{2}\right) - \vec{U}\times \mathrm{rot}\,\vec{U} = \mathrm{grad}\left(\frac{U^2}{2}\right) - 2\vec{U}\times\vec{\omega}$$

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2}\,\mathrm{rot}\,\vec{U} \text{ - вртложност}$$

Громеко-Ламбов облик Ојлерове једначине:

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \mathrm{grad}\left(\frac{U^2}{2}\right) - 2\vec{U}\times\vec{\omega} = \vec{f} - \frac{1}{\rho}\,\mathrm{grad}\,p$$

Даље се врши ИНТЕГРАЦИЈА ове једначине под следећим условима:

1. Струјање је стационарно: $\dfrac{\partial \vec{U}}{\partial t} = 0$

2. Флуид је БАРОТРОПАН: $\rho = \rho(p)$

$$\frac{1}{\rho}\,\mathrm{grad}\,p = \mathrm{grad}\left[\int\frac{dp}{\rho}\right]$$

ДОКАЗ:

$\int\frac{dp}{\rho} = f(p)$, јер је $\rho = \rho(p)$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{df}{dp}\frac{\partial p}{\partial x}$$

$$\frac{d}{dp}\int\frac{dp}{\rho} = \int\frac{d}{dp}\left(\frac{1}{\rho}\right)dp = \int -\frac{1}{\rho^2}\frac{d\rho}{dp}\,dp = -\int\frac{d\rho}{\rho^2} = \frac{1}{\rho} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x}\int\frac{dp}{\rho} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}$$

3. Поље масених сила је КОНЗЕРВАТИВНО – сила се може изразити преко градијента скаларне функције (конзервативно или ПОТЕНЦИЈАЛНО поље):

$$\vec{f} = \nabla\Phi_f \equiv \mathrm{grad}\,(\Phi_f)$$

$\Phi_f$ - функција потенцијала (потенцијал) силе $\vec{f}$

Под овим условима Ојлерова једначина се своди на:

$$\mathrm{grad}\left(\frac{U^2}{2}\right) - 2\vec{U}\times\vec{\omega} = \mathrm{grad}\,\phi_f - \mathrm{grad}\left(\int\frac{dp}{\rho}\right)$$

$$\boxed{\mathrm{grad}\left(\int\frac{dp}{\rho} + \frac{U^2}{2} - \phi_f\right) = 2\vec{U}\times\vec{\omega}}$$

Када је десна страна претходне једначине једнака нули?

$\vec{U}\times\vec{\omega} = 0$

1. $\vec{U} = 0$ .. није од интереса → нема струјања јдн. се своди на Ојлерову јдн. статике флуида
2. $\vec{U} \parallel \vec{\omega}$. специјалан случај струјања (такве није од интереса)
3. $\vec{\omega} = 0$ ... невртложно струјање!

Случај невртложног струјања:

$$\mathrm{grad}\underbrace{\left(\int\frac{dp}{\rho} + \frac{U^2}{2} - \phi_f\right)}_{B} = 0$$

ЈЕДИНИЧНА [J/kg]

B – Бернулијев трочлан (МЕХАНИЧКА ЕНЕРГИЈА ФЛУИДА)

$$\mathrm{grad}\,B = 0 \iff \frac{\partial B}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial B}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial B}{\partial z}\vec{k} = 0$$

$$\rightarrow \frac{\partial B}{\partial x} = 0,\quad \frac{\partial B}{\partial y} = 0,\quad \frac{\partial B}{\partial z} = 0 \implies B \neq B(x,y,z)$$

$\implies B = \text{const.}$ у целом струјном пољу

$$\boxed{\int\frac{dp}{\rho} + \frac{U^2}{2} - \phi_f = \text{const.} \quad \text{у целом струјном пољу}}$$

Флуид има исту вредност јединичне механичке енергије у свакој тачки поља

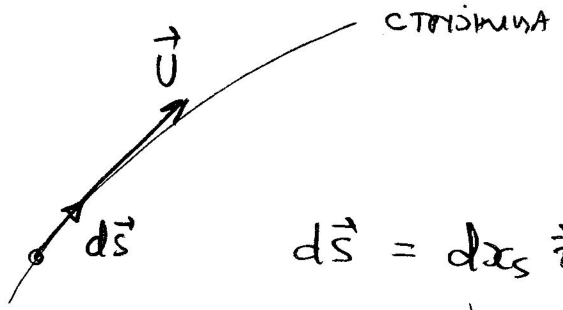
---

Да ли постоји нека форма Бернулијевог интеграла која важи и за вртложна струјања?

Мешовити производ вектора:

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{b}\cdot(\vec{c}\times\vec{a}) = \vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})$$

→ ако су неки од вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ колинеарни, онда је мешовити производ <u>ЈЕДНАК НУЛИ</u>




$$\text{grad}\, B = 2\vec{U}\times\vec{\omega} \quad /\cdot d\vec{s}$$

$$d\vec{s}\cdot\nabla B = \underbrace{d\vec{s}\cdot(2\vec{U}\times\vec{\omega})}_{0\ (d\vec{s}\,\parallel\,\vec{U})}$$

$$d\vec{s} = dx_s\,\vec{i} + dy_s\,\vec{j} + dz_s\,\vec{k}$$

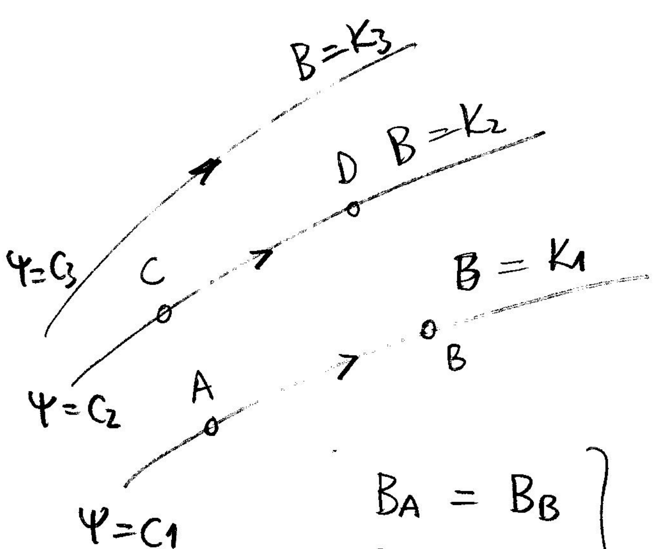
– инфинитезимални вектор струјнице

$$d\vec{s}\cdot\nabla B = 0 \rightarrow \underbrace{\frac{\partial B}{\partial x}dx_s + \frac{\partial B}{\partial y}dy_s + \frac{\partial B}{\partial z}dz_s}_{d_sB} = 0$$

$d_sB$ – тотални прираштај величине $B$ <u>дуж струјнице</u>

$$d_sB = 0 \implies \boxed{B = \text{const.}\ \text{дуж струјнице}}$$

Дакле, у општем случају када је струјање вртложно ($\vec{\omega}\neq 0$), јединична механичка енергија има исту вредност дуж струјнице!




$K_1, K_2, K_3$ – константе које имају различиту вредност

$$\boxed{\int\frac{dp}{\rho} + \frac{U^2}{2} - \phi_f = \text{const.}\ \text{дуж струјнице}}$$

БЕРНУЛИЈЕВА ЈЕДНАЧИНА

$$\left.\begin{aligned} B_A &= B_B \\ B_A &\neq B_C \\ B_C &= B_D \end{aligned}\right\}\ \text{општи случај}\ \vec{\omega}\neq 0$$

$$\underbrace{B_A = B_B = B_C = B_D}_{\text{невртложно струјање}\ \vec{\omega}=0}$$

У већини проблема, масена сила која делује на флуид је сила гравитације, тј. $\vec{f} = \vec{g}$. Потенцијал ове силе је $\Phi_f = -gz$, где је оса $z$ УСМЕРЕНА ВЕРТИКАЛНО НАВИШЕ!

$z$

$$\vec{f} = \vec{g} = -g\vec{k}$$

$$\Phi_f = -gz$$

$$\vec{f} = \nabla \Phi_f = \nabla(-gz) = \cancelto{0}{\frac{\partial(-gz)}{\partial x}}\vec{i} + \cancelto{0}{\frac{\partial(-gz)}{\partial y}}\vec{k} + \frac{\partial(-gz)}{\partial z}\vec{k} = -g\vec{k}$$

Дакле, за $\vec{f} = \vec{g}$, следи:

$$\int \frac{dp}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gz \equiv B \quad ;$$

$\frac{v^2}{2}$ – ЈЕДИНИЧНА КИНЕТИЧКА ЕНЕРГИЈА

$\int \frac{dp}{\rho} + gz$ – ЈЕДИНИЧНА ПОТЕНЦИЈАЛНА ЕНЕРГИЈА ФЛУИДА

## БЕРНУЛИЈЕВА ЈЕДНАЧИНА ЗА СЛУЧАЈ СТРУЈАЊА НЕСТИШЉИВОГ ФЛУИДА ($\rho = const.$)

$\rho = const. \Rightarrow \int \frac{dp}{\rho} = \frac{1}{\rho}\int dp = \frac{p}{\rho}$

$$\boxed{\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gz = const. \text{ дуж струјнице}} \quad (\vec{\omega} \neq 0)$$

$$\boxed{\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + gz = const. \text{ у целом пољу}} \quad (\vec{\omega} = 0)$$

## БЕРНУЛИЈЕВА ЈЕДНАЧИНА ЗА СЛУЧАЈ СТРУЈАЊА СТИШЉИВОГ ФЛУИДА ($\rho \neq const$) → ФАКУЛТАТИВНО!

$\rho \neq const$, али је флуид БАРОТРОПАН, $\rho = \rho(p)$

Разматраћемо два случаја:

ИЗОТЕРМСКИ: $\rho = \frac{p}{RT}$ и АДИЈАБАТСКИ: $\frac{p}{\rho^{\varkappa}} = const$
($T = const$)

Такође, код гасова се утицај масене силе (гравитације) може занемарити, па се општи облик Бернулијеве једначине своди на облик:

$$\int \frac{dp}{\rho} + \frac{U^2}{2} = \text{const.} \quad \text{дуж струјнице}$$


1. Изотермски случај

$$\int \frac{dp}{\rho} = \int \frac{RT\,dp}{p} \underset{T=\text{const}}{=} RT \int \frac{dp}{p}$$

$$\Rightarrow \quad RT \int_{p_1}^{p} \frac{dp}{p} + \frac{U^2}{2} = \text{const} \quad \text{дуж струјнице}$$

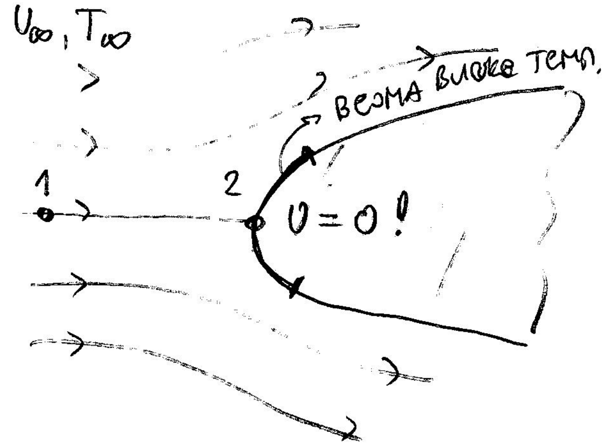
$$\boxed{RT \ln \frac{p}{p_1} + \frac{U^2}{2} = \text{const.} \quad \text{дуж струјнице}}$$

2. Адијабатски случај: $p\rho^{-\varkappa} = \text{const.} \rightarrow \rho = \left(\frac{p}{C}\right)^{\frac{1}{\varkappa}}$

$$\int \frac{dp}{\rho} = C^{\frac{1}{\varkappa}} \int \frac{dp}{p^{1/\varkappa}} = (p\rho^{-\varkappa})^{\frac{1}{\varkappa}} \frac{p^{1-\frac{1}{\varkappa}}}{1-\frac{1}{\varkappa}} = \frac{p^{\frac{1}{\varkappa}}}{\rho} \frac{p^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}}{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}} =$$

$$= \frac{p^{\frac{1+\varkappa-1}{\varkappa}}}{\rho} \frac{\varkappa}{\varkappa-1} = \frac{\varkappa}{\varkappa-1} \frac{p}{\rho} = \frac{\varkappa}{\varkappa-1} RT = \underbrace{\frac{\varkappa R}{\varkappa-1}}_{c_p} T = c_p T$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{c_p T + \frac{U^2}{2} = \text{const.} \quad \text{дуж струјнице}}$$




Бернулијева јдн 1-2

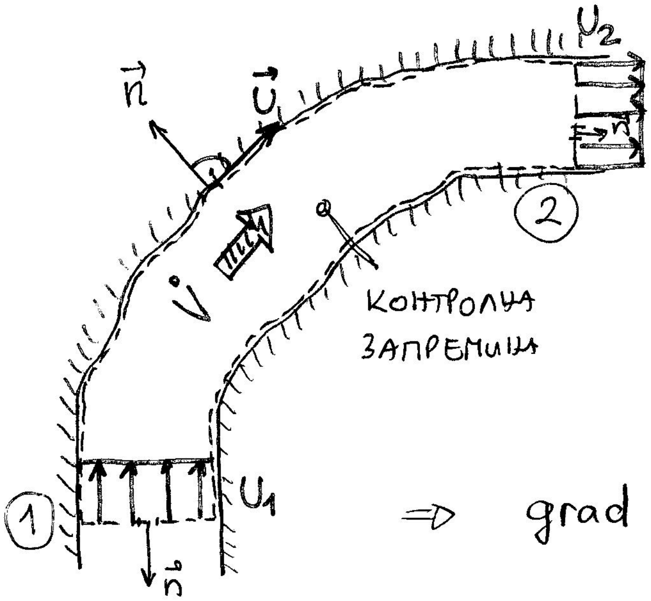
$$c_p T_1 + \frac{U_1^2}{2} = c_p T_2 + \cancel{\frac{U_2^2}{2}} \rightarrow 0$$

$$c_p T_\infty + \frac{U_\infty^2}{2} = c_p T_0$$

$$T_0 = T_\infty + \frac{U_\infty^2}{2c_p}$$ — аеродинамичко загревање!

($U_\infty \Rightarrow$ може бити и 700 m/s!)

# 5.3 Бернулијева једначина за струјну цев




Важе исти услови као и за извођење Бернулијеве једначине дуж струјнице:

- стационарно струјање
- нестишљив флуид ($\rho = \text{const.}$)
- поље масених сила $\vec{f} = \vec{g}$

$$\Rightarrow \quad \operatorname{grad}\left(\frac{p}{\rho} + \frac{U^2}{2} + gz\right) = 2\vec{U} \times \vec{\omega}$$

$$\nabla B = 2\vec{U} \times \vec{\omega} \quad / \cdot \vec{U}$$

$$\vec{U} \cdot \nabla B = 2\vec{U} \cdot \underbrace{(\vec{U} \times \vec{\omega})}_{0} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{U} \cdot \nabla B = 0}$$

Флуид је НЕСТИШЉИВ: $\nabla \cdot \vec{U} \equiv \operatorname{div} \vec{U} = 0$ (једначина континуитета)

$$\vec{U} \cdot \nabla B = 0 \xrightarrow{\nabla \cdot \vec{U} = 0} \underbrace{\vec{U} \cdot \nabla B + B\,\nabla \cdot \vec{U}}_{\nabla \cdot (B\vec{U})} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\nabla \cdot (B\vec{U}) = 0}$$

Последњу диференцијалну једначину ИНТЕГРАЛИМО по контролној запремини са слике (домен V):

$$\iiint_V \nabla \cdot (B\vec{U})\, dV = 0 \xrightarrow[\text{Гаус - Остр.}]{} \oiint_A \vec{n} \cdot (B\vec{U})\, dA = 0$$

$$\oiint_A B(\vec{U} \cdot \vec{n})\, dA = 0 \quad ; \quad A = A_1 + A_2 + A_W$$

$$\iint_{A_1} B \underbrace{(\vec{U} \cdot \vec{n})}_{-U_1 = \text{const}} dA + \iint_{A_2} B \underbrace{(\vec{U} \cdot \vec{n})}_{U_2 = \text{const}} dA + \iint_{A_W} B \underbrace{(\vec{U} \cdot \vec{n})}_{0\ (\vec{U} \perp \vec{n})} dA = 0$$

$$-U_1 \iint_{A_1} B\, dA + U_2 \iint_{A_2} B\, dA = 0$$

$$\iint_A B\,dA = \iint_A \left(\frac{p}{\rho} + \frac{U^2}{2} + gz\right)dA = \frac{1}{\rho}\underbrace{\iint_A p\,dA}_{p_c A} + \frac{U^2}{2}\iint_A dA +$$

$$+ g\underbrace{\iint_A z\,dA}_{z_c A} = \left(\frac{p_c}{\rho} + \frac{U^2}{2} + gz_c\right)A$$

$p_c$ – притисак у тежишту површи $A$

$z_c$ – $z$ координата тежишта

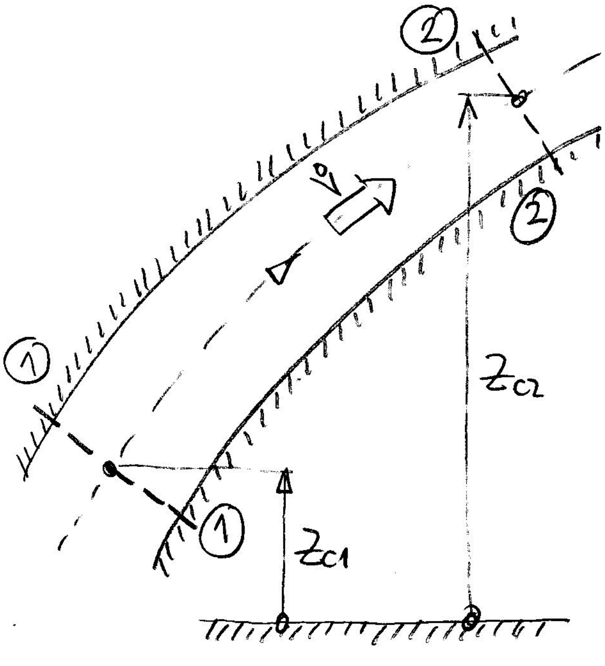
$$\Rightarrow \quad -U_1\left(\frac{p_{c1}}{\rho} + \frac{U_1^2}{2} + gz_{c1}\right)A_1 + U_2\left(\frac{p_{c2}}{\rho} + \frac{U_2^2}{2} + gz_{c2}\right)A_2 = 0$$

$$\left(\frac{p_{c1}}{\rho} + \frac{U_1^2}{2} + gz_{c1}\right)\underbrace{U_1 A_1}_{\dot{V}_1} = \left(\frac{p_{c2}}{\rho} + \frac{U_2^2}{2} + gz_{c2}\right)\underbrace{U_2 A_2}_{\dot{V}_2}$$

Закон о одржању масе (једначина континуитета за исту контролну запремину);

$$\dot{V}_1 = \dot{V}_2 \quad \Leftrightarrow \quad U_1 A_1 = U_2 A_2$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{p_{c1}}{\rho} + \frac{U_1^2}{2} + gz_{c1} = \frac{p_{c2}}{\rho} + \frac{U_2^2}{2} + gz_{c2}}$$

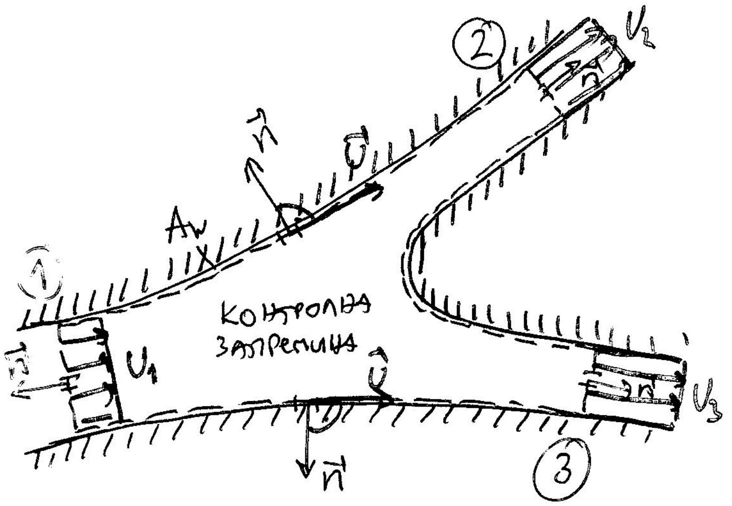



Бернулијева јдч. за струјну цев

Важно:

У пресецима 1 и 2 профил брзине мора бити такав да је $\vec{U} = \text{const.}$ и $\vec{U} \parallel \vec{n}$

# Бернулијева једначина за разгранат цевовод (рачву)




Интегралимо једначину:

$$\nabla \cdot (B\vec{U}) = 0$$

унутар домена V са слике!

$$\iiint_V \nabla \cdot (B\vec{U}) = 0$$

$$\oiint_A \vec{n} \cdot B\vec{U} = 0$$

$$A = A_1 + A_2 + A_3 + A_W$$

$$\oiint_A B(\vec{U}\cdot\vec{n})\,dA = 0 \rightarrow -U_1\iint_{A_1} B\,dA + U_2\iint_{A_2} B\,dA + U_3\iint_{A} B\,dA = 0$$

$$\left(\frac{p_{c1}}{\rho} + \frac{U_1^2}{2} + g z_{c1}\right)\underbrace{U_1 A_1}_{\dot{V}_1} = \left(\frac{p_{c2}}{\rho} + \frac{U_2^2}{2} + g z_{c2}\right)\underbrace{U_2 A_2}_{\dot{V}_2} + \left(\frac{p_{c3}}{\rho} + \frac{U_3^2}{2} + g z_{c3}\right)\underbrace{U_3 A_3}_{\dot{V}_3}$$

Једначина континуитета за нашу контролну запремину:

$$\dot{V}_1 = \dot{V}_2 + \dot{V}_3$$

$$\Rightarrow (\dot{V}_2 + \dot{V}_3)\left(\frac{p_{c1}}{\rho} + \frac{U_1^2}{2} + g z_{c1}\right) = \dot{V}_2\left(\frac{p_{c2}}{\rho} + \frac{U_2^2}{2} + g z_{c2}\right) + \dot{V}_3\left(\frac{p_{c3}}{\rho} + \frac{U_3^2}{2} + g z_{c3}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{p_{c1}}{\rho} + \frac{U_1^2}{2} + g z_{c1} = \frac{p_{c2}}{\rho} + \frac{U_2^2}{2} + g z_{c2}} \quad \left[\frac{J}{kg}\right]$$

$$\boxed{\frac{p_{c1}}{\rho} + \frac{U_1^2}{2} + g z_{c1} = \frac{p_{c3}}{\rho} + \frac{U_3^2}{2} + g z_{c3}} \quad \left[\frac{J}{kg}\right]$$

Јединичне механичке енергије у пресецима 2 и 3 су једнаке јединичној механичкој енергији у пресеку 1!
(ОВО ВАЖИ ЗА НЕВИСКОЗАН ФЛУИД).