Мировање (статика) флуида

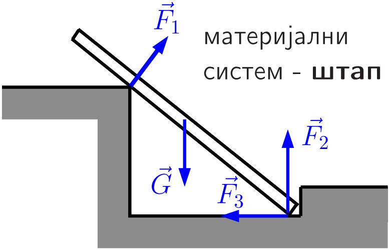
Александар Ђоћић

МФ Београд

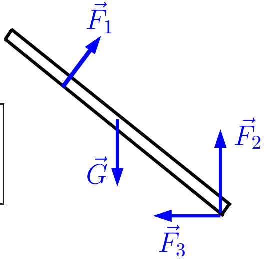
Основни услов мировања материјалног система

Подсетник - механика 1 (статика)

Ако се материјални систем налази у стању мировања онда је резултанта сила које на њега делују (њихов векторски збир) једнак нули.



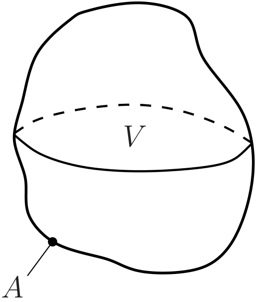
принцип ослобађања од веза



Једначина равнотеже : $$\sum_i \vec{F}_i = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{G} = 0$$

Флуид у стању мировања

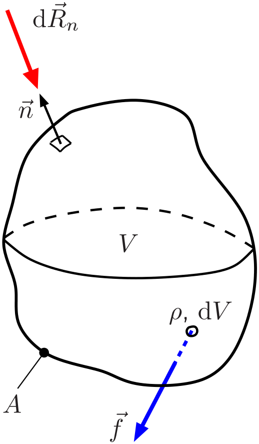
- материјални систем - произвољно изабрана (идеја: доћи до генералног облика једначине) маса флуида у стању мировања



Произвољно изабрана запремина V коју ограничава површ A

Флуид у стању мировања

- силе у флуиду: **масене** и **површинске**
- $\vec{R}_m$ - резултујућа масена сила $\quad$ $\vec{R}_n$ - резултујућа површинска сила



- **услов мировања:** $\boxed{\vec{R}_m + \vec{R}_n = 0}$
- елементарна масена сила $\mathrm{d}\vec{R}_m$:

$$\mathrm{d}\vec{R}_m = \rho\,\vec{f}\,\mathrm{d}V \;\Rightarrow\; \vec{R}_m = \iiint_V \rho\,\vec{f}\,\mathrm{d}V$$

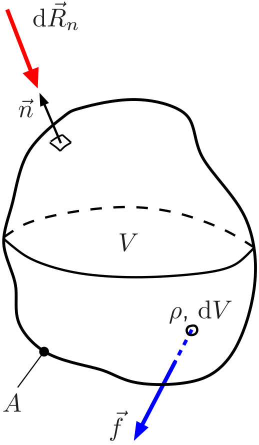
- елементарна површинска сила $\mathrm{d}\vec{R}_n$:

$$\mathrm{d}\vec{R}_n = -\vec{n}\,p\,\mathrm{d}A \;\Rightarrow\; \vec{R}_n = \oint\!\!\!\oint_A -\vec{n}\,p\,\mathrm{d}A$$

Мировање - у флуиду **не постоје смицајни напони!**

Флуид у стању мировања

- силе у флуиду: **масене** и **површинске**
- $\vec{R}_m$ - резултујућа масена сила $\vec{R}_n$ - резултујућа површинска сила



- **услов мировања**, $\vec{R}_m + \vec{R}_n = 0$, се своди на:

$$\boxed{\underbrace{\iiint_V \rho \vec{f}\,\mathrm{d}V}_{\vec{R}_m} + \underbrace{\oiint_A -\vec{n}\,p\,\mathrm{d}A}_{\vec{R}_n} = 0}$$

- Површ A ограничава запремину V - важи теорема Гаус-Остроградског:

$$\oiint_A \vec{n}\,p\,\mathrm{d}A = \iiint_V \nabla p\,\mathrm{d}V$$

$$\nabla = \vec{\imath}\,\frac{\partial}{\partial x} + \vec{\jmath}\,\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\,\frac{\partial}{\partial z}$$ "набла"оператор

Флуид у стању мировања - Ојлерова једначина

- Услов мировања се даље своди на:

$$\iiint_V \left(\rho\vec{f} - \nabla p\right) \mathrm{d}V = 0$$

- Како је запремина V произвољно изабрана (да би претходна релација важила за сваку могућу запремину V - то је физички услов, јер мирује сваки део флуида), подинтегрална функција мора бити једнака нули:

$$\rho\vec{f} - \nabla p = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\nabla p = \rho\vec{f}} \quad - \text{ Ојлерова једначина}$$

Основни задатак статике флуида:
За задата поља густине $\rho = \rho(x, y, z)$ и масених сила $\vec{f} = \vec{f}(x, y, z)$ одредити поље притиска $p = p(x, y, z)$!

Слајд 11

Набла (Хамилтонов) оператор

- Веома важан оператор у теорији поља - одређује важне карактеристике поља (градијент, дивергенција, ротор...)
- **Набла је векторско-диференцијални оператор:** операције векторске алгебре и диференцирања
- Примена оператора на скаларно поље даје **градијент скаларног поља** (векторска величина)

$$\nabla p \equiv \mathrm{grad} p = \vec{\imath}\,\frac{\partial p}{\partial x} + \vec{\jmath}\,\frac{\partial p}{\partial y} + \vec{k}\,\frac{\partial p}{\partial z}$$

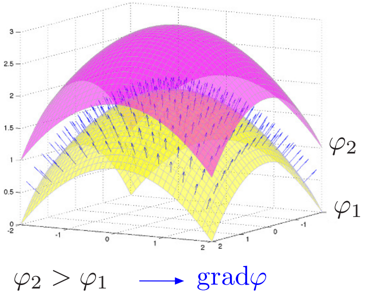
- На векторска и тензорска поља се може примењивати на више начина користећи и операције векторске алгебре (скаларни $\cdot$ и векторски $\times$ производ)

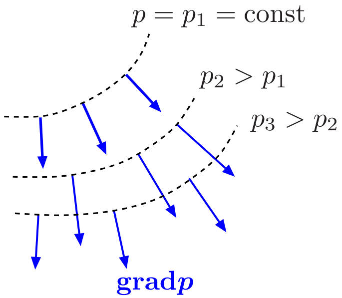
$$\nabla\vec{U} \equiv \mathrm{grad}\vec{U}, \quad \nabla\cdot\vec{U} = \mathrm{div}\vec{U}, \quad \nabla\times\vec{U} = \mathrm{rot}\vec{U}$$

$$(\nabla) \equiv \mathrm{grad} \qquad (\nabla\cdot) \equiv \mathrm{div}, \qquad (\nabla\times) \equiv \mathrm{rot}$$

Градијент скаларног поља - неке важне особине

- вектор градијента скаларног поља φ је ортогоналан на еквискаларне површи (површи на којима је $\varphi = \mathrm{const}$)
- када је $\varphi \equiv p$, еквискаларне $\equiv$ **изобарске површи** - површи на којима притисак има константну вредност!





- вектор градијента скаларног поља показује правац и смер највеће промене у том пољу!

Ојлерова једначина - математичко-физичка анализа

$$\boxed{\nabla p = \rho \overrightarrow{f} \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{grad} p = \rho \overrightarrow{f}}$$

Вектори $\mathrm{grad} p$ и $\vec{f}$ су колинеарни вектори

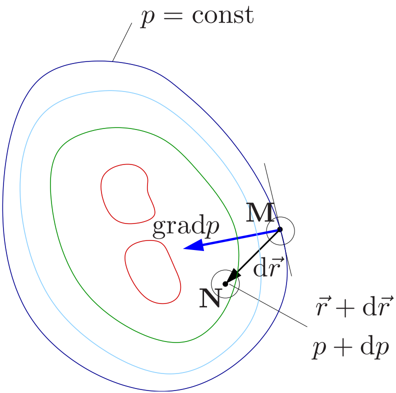
- правац и смер највеће промене притиска је одређен вектором (векторским пољем) јединичне масене силе $\vec{f}$!
- вектор $\vec{f}$ је управан на изобарске површи!

- Скаларни облик Ојлерове једначине (пројекције на осе Декартовог координатног система)

$$\left.\begin{aligned} \nabla p &= \frac{\partial p}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial p}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial p}{\partial z}\vec{k} \\ \rho\overrightarrow{f} &= \rho f_x \vec{\imath} + \rho f_y \vec{\jmath} + \rho f_z \vec{k} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{ll} \dfrac{\partial p}{\partial x} = \rho f_x & \\ \dfrac{\partial p}{\partial y} = \rho f_y & \dfrac{\partial p}{\partial z} = \rho f_z \end{array}}$$

Ојлерова једначина - тотални прираштај притиска

- $\mathbf{M}$ и $\mathbf{N}$ су две блиске тачке у пољу, на растојању $\mathrm{d}\vec{r}$



$$\mathrm{d}\vec{r} = \mathrm{d}x\,\vec{\imath} + \mathrm{d}y\,\vec{\jmath} + \mathrm{d}z\,\vec{k}$$

- Тотални (укупни) прираштај $\mathrm{d}p$ притиска између тачака M и N

$$\mathrm{d}p = \frac{\partial p}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial p}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial p}{\partial z}\mathrm{d}z, \text{ тј.}$$

$$\mathrm{d}p = \nabla p \cdot \mathrm{d}\vec{r} \equiv \mathrm{grad}p \cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

- Алтернативни скаларни облик Ојлерове једначине

$$\boxed{\mathrm{d}p = \rho(\vec{f} \cdot \mathrm{d}\vec{r})}, \text{ тј.}$$

$$\boxed{\mathrm{d}p = \rho(f_x \mathrm{d}x + f_y \mathrm{d}y + f_z \mathrm{d}z)}$$

- Ово је „оперативна“ једначина за решавање основног задатка статике флуида!

Основни задатак

Четири основна задатка који се разматрају

1. Мировање нестишљивог, хомогеног флуида ($\rho = \mathrm{const}$) - течности, у пољу силе Земљине теже ($\vec{f} = \vec{g}$)

2. Мировање ваздуха (идеални гас, $p = \rho RT$) у пољу силе Земљине теже ($\vec{f} = \vec{g}$)

3. Релативно мировање течности ($\rho = \mathrm{const}$) при транслацији суда константним убрзањем $\vec{a} = \mathrm{const}$ ($\vec{f} = \vec{g} - \vec{a}$)

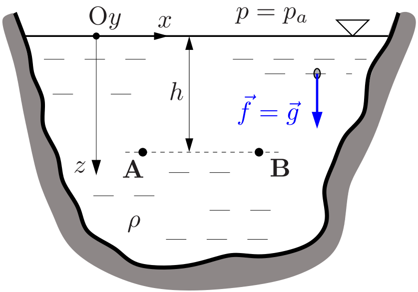
4. Релативно мировање течности ($\rho = \mathrm{const}$) при ротацији суда око вертикалне осе константном угаоном брзином $\vec{\omega} = \mathrm{const}$ ($\vec{f} = \vec{g} + \omega^2 \vec{r}_0$)

Решења свих ових задатака је поље притиска $p = p(x, y, z)$ тј. одређена функционална зависност притиска од просторних кордината!

Слајд 4

Мировање течности у пољу силе Земљине теже

- Разматрамо случај: $\rho = \mathrm{const}$ (нестишљив флуид) и $\vec{f} = \vec{g}$ ($\vec{g} = \mathrm{const}$)
- Замењујемо задате услове у једначину $\mathrm{d}p = \rho(f_x \mathrm{d}x + f_y \mathrm{d}y + f_z \mathrm{d}z)$



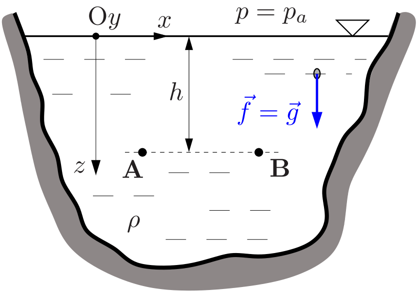
- За усвојени координатни систем: $f_x = f_y = 0,\ f_z = g$
- Једначина равнотеже се своди на $\mathrm{d}p = \rho g \mathrm{d}z$
- Диференцијална једначина која раздваја промењиве - интегралимо леву и десну страну

$$\int \mathrm{d}p = \int \rho g \mathrm{d}z + C \quad \Rightarrow \quad p = \rho g \int \mathrm{d}z + C \quad \Rightarrow \quad \boxed{p = \rho g z + C}$$

- Гранични услов: $z = 0$: $p = p_a \quad \rightarrow \quad C = p_a \quad \Rightarrow \quad \boxed{p = p_a + \rho g z}$

Мировање течности у пољу силе Земљине теже

- Расподела (поље) притиска: $p = p_a + \rho g z$
- Притисак линеарно расте са повећањем дубине (са порастом z)!
- p_a - атмосферски притисак, $\boxed{\rho g z \text{ - хидростатички притисак}}$



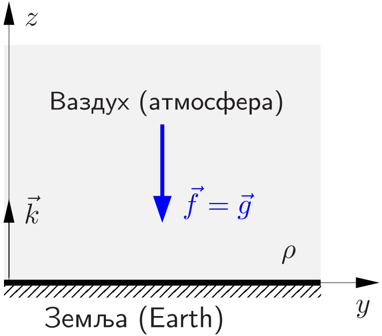
- Вектор $\vec{g}$ је управан на изобарске површи ($\vec{f} = \vec{g}$)
- Једначине изобарских површи $\boxed{z = \text{const}}$ (хоризонталне равни)
- Слободна површ течности $\Leftrightarrow$ изобарска површ $p = p_a$

$$p_{\mathrm{A}} = p_{\mathrm{B}} = p_a + \rho g h \quad (z_{\mathrm{A}} = z_{\mathrm{B}} = h)$$

- Једнакост притисака на хоризонталним (изобарским) површима, $p_{\mathrm{A}} = p_{\mathrm{B}}$: *једначина хидростатичке равнотеже*

Мировање ваздуха у пољу силе Земљине теже

- Разматрамо случај: $\rho \neq \mathrm{const}$ (стишљив флуид) и $\vec{f} = \vec{g}$ ($\vec{g} = \mathrm{const}$)
- И то посебан случај: разматрамо ваздух у Земљиној атмосфери!



- За усвојени координатни систем: $f_x = f_y = 0,\ f_z = -g$
- Једначина равнотеже се своди на $\mathrm{d}p = -\rho g \mathrm{d}z$ ($\rho \neq \mathrm{const}!$)
- ваздух се понаша као идеални гас: $p = \rho R T$ (једначина стања)

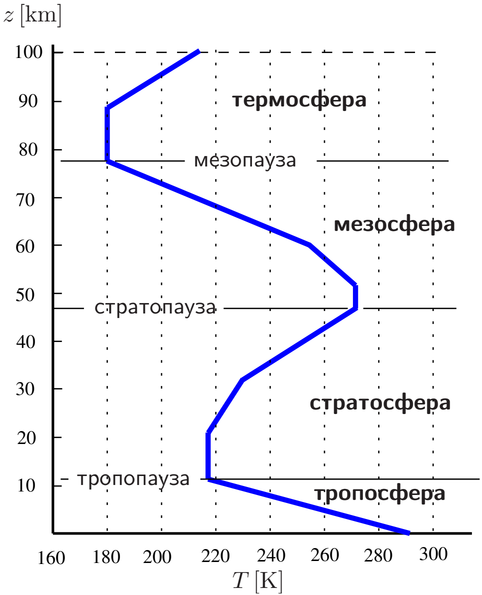
$$\left.\begin{aligned} \mathrm{d}p &= -\rho g \mathrm{d}z \\ p &= \rho R T \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{\frac{\mathrm{d}p}{p} = -\frac{g \mathrm{d}z}{RT}}$$

- Диференцијална једначина која раздваја промењиве, али је **неопходно** знати зависност $T = T(z)$!

Стандардна атмосфера

- ISA (International Standard Atmosphere): $T = T(z)$
- Разматрамо расподелу притиска у тропосфери и делу стратосфере где је $T = \mathrm{const.}$
- Тропосфера: $\boxed{T = T_0 - \gamma z}$ $(\gamma = 6.5\,\mathrm{K/km})$
- Стандардни услови: $T_0 = 288\,\mathrm{K}$, $p_0 = 101325\,\mathrm{Pa}$
- Део стратосфере $(T = T_s)$
  $T_s = T_0 - \gamma z_s, \quad z_s \approx 11\,\mathrm{km}$
  $T_s = 288 - 6.5 \cdot 11 = 216.5\,\mathrm{K}$

$$\boxed{t_s = -56.5\,^\circ\mathrm{C}}$$



Расподеле притиска у тропосфери и стратосфери

- Тропосфера ($T = T_0 - \gamma z$)

$$\frac{\mathrm{d}p}{p} = -\frac{g\mathrm{d}z}{R(T_0 - \gamma z)} \quad \Rightarrow \quad \int_{p_0}^{p} \frac{\mathrm{d}p}{p} = -\frac{g}{R} \int_0^z \frac{\mathrm{d}z}{T_0 - \gamma z}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{p = p_0 \left(1 - \frac{\gamma z}{T_0}\right)^{\frac{g}{\gamma R}}} \quad - \text{ степени закон расподеле}$$

- Стратосфера ($T = T_s = \mathrm{const}$):

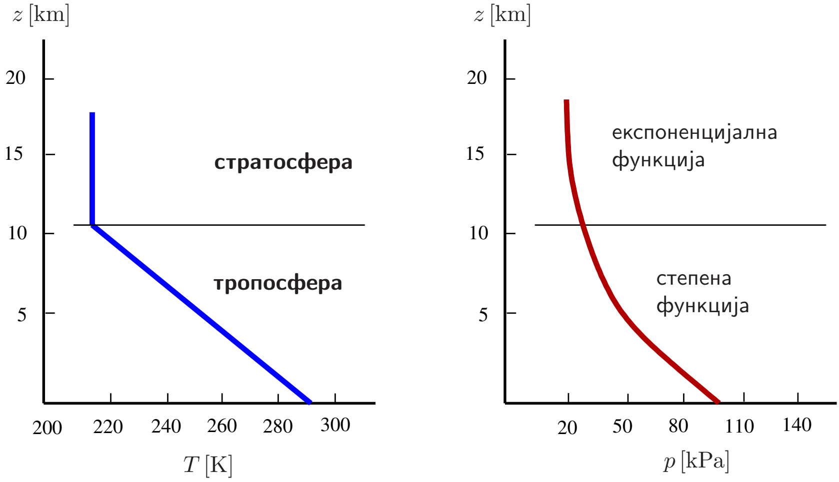
$$\frac{\mathrm{d}p}{p} = -\frac{g\mathrm{d}z}{RT_s} \quad \Rightarrow \quad \int_{p_s}^{p} \frac{\mathrm{d}p}{p} = -\frac{g}{RT_s} \int_{z_s}^{z} \mathrm{d}z$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{p = p_s \exp\left[-\frac{g(z - z_s)}{RT_s}\right]} \quad - \text{ експоненцијални закон расподеле}$$

  - p_s - притисак на месту на коме почиње стратосфера

    $p_s = p_0 \left(1 - \frac{\gamma z_s}{T_0}\right)^{\frac{g}{\gamma R}} = 22593\,\mathrm{Pa}$

Расподеле притиска у тропосфери и стратосфери



- Притисак опада са висином (у сваком слоју Земљине атмосфере; овде су разматрана тропосфера и део стратосфере)

Промене густине ваздуха у Земљиној атмосфери

Могу се врло лако одредити користећи једначину стања идеалног гаса и расподеле температуре и притиска

- Тропосфера:

$$\rho(z) = \frac{p(z)}{RT(z)} = \rho_0 \left(1 - \frac{\gamma z}{T_0}\right)^{\frac{g}{\gamma R}-1}$$

- Стратосфера:

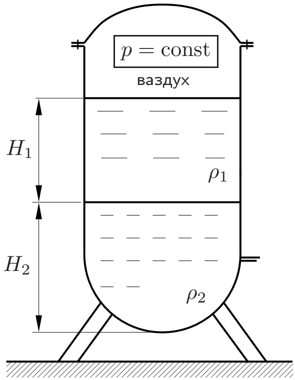
$$\rho(z) = \rho_s \exp\left[-\frac{g(z - z_s)}{RT_s}\right]$$

где је

$$\rho_s = \frac{p(z)}{RT(z)} = \rho_0 \left(1 - \frac{\gamma z_s}{T_0}\right)^{\frac{g}{\gamma R}-1}$$

Анализа добијених једначина за $p(z)$ и $\rho(z)$

- Бројне вредности за ваздух ($R = 287\,\mathrm{J/kgK}$) и $z = 10\,\mathrm{m}$ (висинска разлика):
  - Тропосфера: $p = 0.9988\,p_0$; $\rho = 0.999\rho_0$
  - Стратосфера: $p = 0.9984\,p_s$; $\rho_s = 0.9984\rho_s$ (за $T_s = 216.5\,\mathrm{K}$)



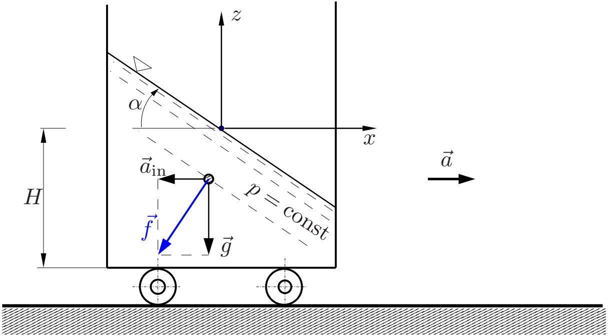
- Технички системи - резервоари са ваздухом (или неким другим гасом) - z је мала величина (пар метара максимално)

Поље притиска у **гасу** који мирује се може сматрати **хомогеним** (притисак има исту вредност у свакој тачки поља, $p = \mathrm{const}$)!

- У течностима у стању мировања важи хидростатички закон расподеле притиска

Релативно мировање при транслацији

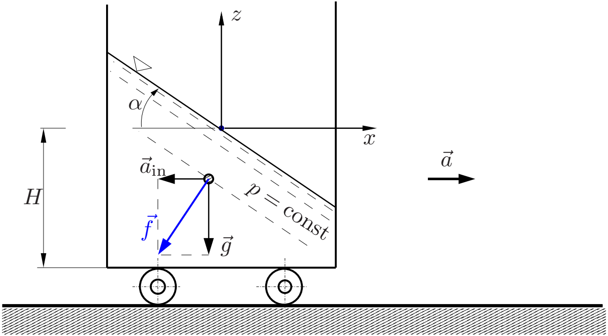
- Суд са течношћу ($\rho = \mathrm{const}$) који се креће транслаторно константним убрзањем $\vec{a} = \mathrm{const}$!
- У односу на координатни систем $\mathrm{O}xyz$ везан за суд течност мирује!



- Поље масене силе: $\vec{f} = \vec{g} + \vec{a}_{\mathrm{in}}$ ($\vec{a}_{\mathrm{in}}$ - јединична инерцијална сила, инерцијално убрзање) $\quad\rightarrow\quad f_x = -a,\ f_y = 0,\ f_z = -g$

Релативно мировање при транслацији

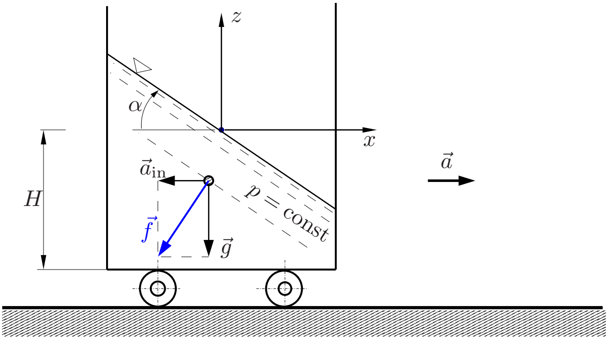
- Поље притиска: $\mathrm{d}p = \rho(-a\mathrm{d}x - g\mathrm{d}z) \quad \rightarrow \quad p = -\rho(ax + gz) + C$
- Гранични услов: $x = 0, z = 0 : \ p = p_a \quad \rightarrow \quad \boxed{p = p_a - \rho(ax + gz)}$



- Притисак је линеарна функција координата x и z
- изобарске површи су паралелне равни нагнуте под углом α у односу на хоризонталу ($\mathrm{tg}\alpha = a/g$); $\vec{f}$ је управан на изобарске површи!

Релативно мировање при транслацији

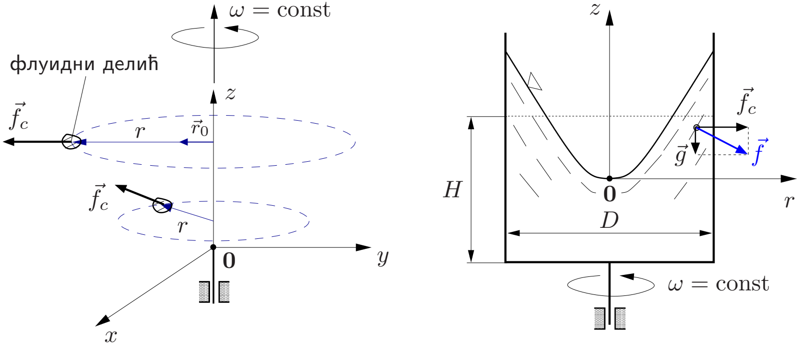
- Поље притиска: $\mathrm{d}p = \rho(-a\mathrm{d}x - g\mathrm{d}z) \quad \rightarrow \quad p = -\rho(ax + gz) + C$
- Гранични услов: $x = 0, z = 0 : \; p = p_a \quad \rightarrow \quad \boxed{p = p_a - \rho(ax + gz)}$



- Једначина слободне површи ($p = p_a$): $\boxed{z = -\dfrac{a}{g}\,x}$
- Највећи притисак: тачка лево на дну суда

Релативно мировање при транслацији

- Суд са течношћу ($\rho = \mathrm{const}$) који ротира константном угаоном брзином $\vec{\omega} = \mathrm{const}$ око своје вертикалне осе
- У односу на координатни систем $\mathrm{O}xyz$ везан за суд течност мирује!



- Поље масене силе: $\vec{f} = \vec{g} + \vec{f}_c$, где је $\vec{f}_c = \omega^2 r \vec{r}_0$ центрифугална сила $\rightarrow \quad f_x = \omega^2 x,\ f_y = \omega^2 y,\ f_z = -g$

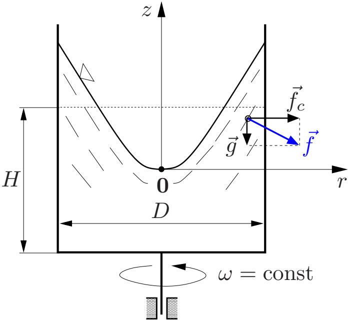
Релативно мировање при ротацији

- Поље притиска:

$$\mathrm{d}p = \rho(\omega^2 x\mathrm{d}x + \omega^2 y\mathrm{d}y - g\mathrm{d}z) \quad \rightarrow \quad p = \frac{1}{2}\rho\omega^2(\underbrace{x^2 + y^2}_{r^2}) - \rho g z + C$$

- Гранични услов: $x = y = z = 0 : \ p = p_a$

$$\boxed{p = p_a + \frac{1}{2}\rho\omega^2 r^2 - \rho g z}$$



- Једначина слободне површи ($p = p_a$):

$$\boxed{z = \frac{\omega^2}{2g} r^2 = \frac{\omega^2}{2g}(x^2 + y^2)}$$

- Притисак је **нелинеарна** функција просторних кордината - изобарске површи су закривљене површи у простору - обртни параболоиди

Релативно мировање при ротацији

- На основу једнакости запремина у стању мировања (суд напуњен до висине H) и током обртања следи

$$\frac{D^2\pi}{4}h_1 = \frac{1}{2}\frac{D^2\pi}{4}(h_1+h_2) \quad \Rightarrow \quad \boxed{h_1 = h_2}$$

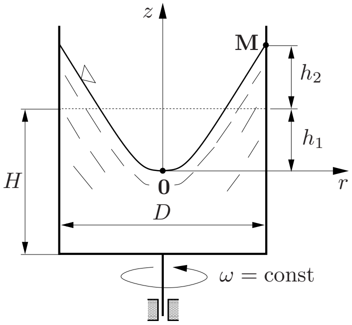
- Тачка M се налази на слободној површи

$$z_M = \frac{\omega^2}{2g}r_M^2 \Rightarrow 2h_1 = \frac{\omega^2}{2g}\left(\frac{D}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow h_1 = h_2 = \frac{\omega^2 D^2}{16g}$$

- При којој вредности ω ће теме параболе бити у центру дна суда?

Одговор: $\omega = \dfrac{4}{D}\sqrt{gH}$



▸ Видео клип (YouTube)