6.3 Бернулијева једначина за струјање вискозног флуида

- **Бернулијева једначина при вискозном струјању флуида** је интеграл **Навије-Стоксове једначине**. Репрезентује **закон одржања механичке енергије** која представља збир **струјне (притисне), кинетичке и потенцијалне** енергије **струје флуида**.
- **Када се конвективни део материјалног извода брзине у Навије-Стоксовој једначини напише у облику** $\left(\vec{U}\cdot\nabla\right)\vec{U}=0{,}5\mathrm{grad}U^2-\vec{U}\times\left(\nabla\times\vec{U}\right)$ добија се:

$$\boxed{\frac{\partial\vec{U}}{\partial t}+\frac{1}{2}\mathrm{grad}U^2-2\vec{U}\times\vec{\omega}=\vec{f}-\frac{1}{\rho}\mathrm{grad}p+\nu\Delta\vec{U}+\frac{1}{3}\nu\mathrm{grad}\left(\mathrm{div}\vec{U}\right)}$$

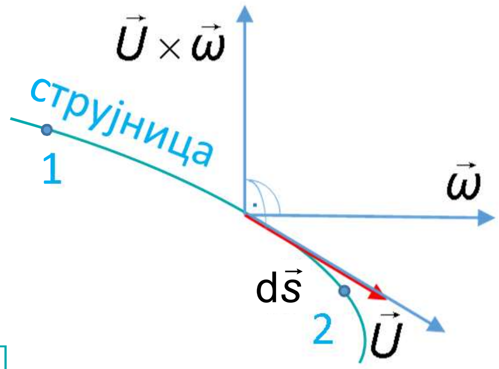
- Бернулијева једначина биће изведена уз следеће претпоставке:
  1. **Струјање** је **стационарно** $\Rightarrow \partial\vec{U}/\partial t=0$
  2. **Запреминске силе** су **конзервативне** ($\vec{f}=\mathrm{grad}\Phi$, где је Φ потенцијал силе; у пољу силе Земљине теже Φ=-gz за z↑)
  3. **Флуид** је **нестишљив**, ρ= *cosnt*.

- Када се узму у обзир наведене **претпоставке Навије-Стоксова једначина** гласи:

$$\mathrm{grad}\left(\frac{p}{\rho}+\frac{U^2}{2}+gz\right)-\nu\Delta\vec{U}=2\vec{U}\times\vec{\omega}$$

- Када се ова једначина помножи усмереним елементом струјнице $\mathrm{d}\vec{s}$ ($\mathrm{d}\vec{s}\parallel\vec{U}$) члан са десне стране једнак је нули:

$$\overbrace{\underbrace{\mathrm{grad}\left(\frac{p}{\rho}+\frac{U^2}{2}+gz\right)}_{\text{Јединична струјна енергија } Y_s}\cdot\mathrm{d}\vec{s}}^{\mathrm{d}Y_s}-\nu\Delta\vec{U}\cdot\mathrm{d}\vec{s}=\cancel{2\left(\vec{U}\times\vec{\omega}\right)\cdot\mathrm{d}\vec{s}}$$



- Интеграл од тачке 1 до тачке 2 на струјници даје **Бернулијеву једначина** за струјницу:

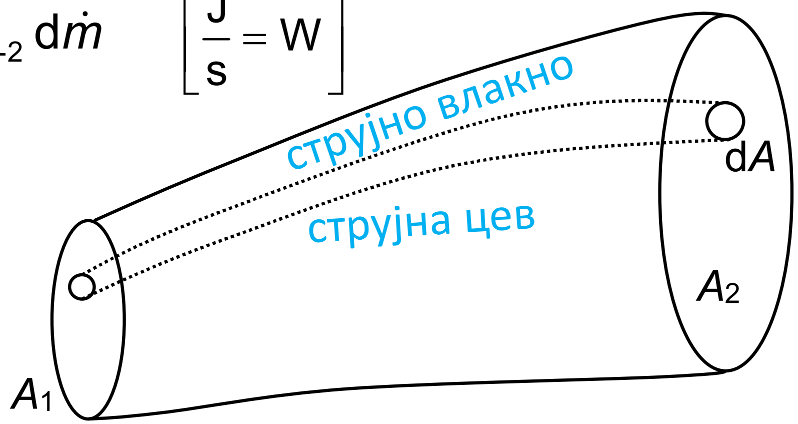
$$\int_1^2 \mathrm{d}Y_s-\int_1^2\nu\Delta\vec{U}\cdot\mathrm{d}\vec{s}=0\Rightarrow Y_{s2}-Y_{s1}+Y_{g1\text{-}2}=0\Rightarrow\boxed{Y_{s1}=Y_{s2}+Y_{g1\text{-}2}}$$

  - $Y_{si}\left[\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}}\right]$ је **јединична струјна енергија** (укупна **механичка енергија јединичне масе флуида**) у некој тачки i струјнице (овде је i =1,2).
  - $Y_{g1\text{-}2}\left[\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}}\right]$ је **јединични губитак енергије флуида дуж струјнице од тачке 1 до тачке 2** услед рада вискозних сила.

- **Бернулијева једначина за струјно влакно** добија се множењем Бернулијеве једначине за струјницу масеним протоком кроз струјно влакно $\mathrm{d}\dot{m}$:

$$\left(\frac{p_1}{\rho}+\frac{U_1^2}{2}+gz_1\right)\mathrm{d}\dot{m}=\left(\frac{p_2}{\rho}+\frac{U_2^2}{2}+gz_2\right)\mathrm{d}\dot{m}+Y_{g1\text{-}2}\,\mathrm{d}\dot{m}\qquad\left[\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{s}}=\mathrm{W}\right]$$

  - $\mathrm{d}\dot{m}=\rho U_{\mathrm{i}}\mathrm{d}A_{\mathrm{i}}$



- **Струјна енергија у јединици времена** [J/s] **попречног пресека струјне цеви** добија се сабирањем (интеграљењем) струјне енергије у јединици времена по одговарајућим попречним пресецима свих струјних влакана унутар струјне цеви:

$$\int_{A_1}\left(\frac{p}{\rho}+\frac{U^2}{2}+gz\right)\rho U\mathrm{d}A=\int_{A_2}\left(\frac{p}{\rho}+\frac{U^2}{2}+gz\right)\rho U\mathrm{d}A+Y_{g1\text{-}2}\,\dot{m}*\qquad[\mathrm{W}]$$

- Када су **струјнице праве линије** (на местима где је **1Д карактер струјања**) **притисак** се у правцу нормале на њих расподељује **као у хидростатици** или код **невискозног струјања** (из пројекције Навије-Стоксове једначине на нормалу $\Rightarrow f_n=\dfrac{\partial p}{\rho\partial n}\Rightarrow\dfrac{p}{\rho}+gz=const$).

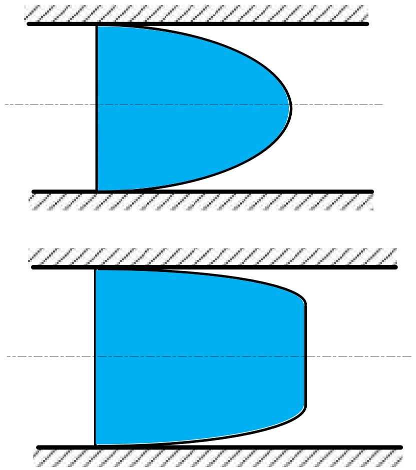
- **Како је** $\frac{p}{\rho}+gz=const.$ **интеграл у попречном пресеку і може да се напише као збир следећа два интеграла:**

$$\int_{A_i}\left(\frac{p}{\rho}+\frac{U^2}{2}+gz\right)\rho U\mathrm{d}A=\left(\frac{p}{\rho}+gz\right)\underbrace{\int_{A_i}\rho U\mathrm{d}A}_{\dot{m}_i}+\frac{\rho}{2}\int_{A_i}U^3\mathrm{d}A$$

- Овде $\int_{A_i}U^3\mathrm{d}A \neq U_i^3 A_i$, већ се уводи **Кориолисов коефицијент α_i.**
- **Кориолисов коефицијент** је **корекциони коефицијент кинетичке енергије** који **коригује грешку** која се чини **када се стварна кинетичка енергија** $\int_{A_i}U^3\mathrm{d}A$ **рачуна помоћу средње брзине** $U_i^3 A_i$:

$$\alpha_i=\frac{\int_{A_i}U^3\mathrm{d}A}{U_i^3 A_i}$$

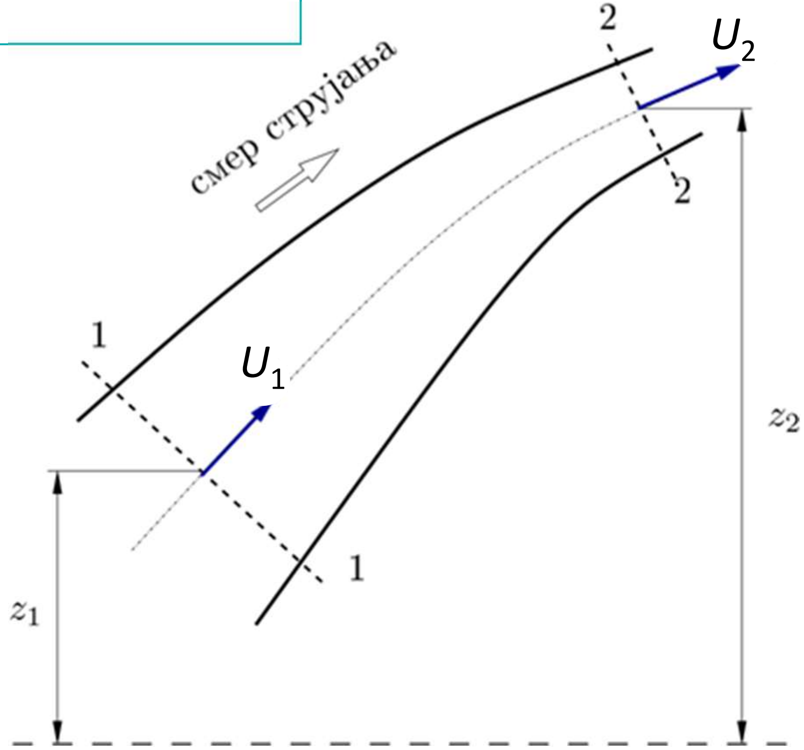
  - $\alpha\approx 2$ при ламинарном струјању;
  - $\alpha=1$ при турбулентном струјању.



- Заменом добијених решења интеграла у једначину означену * и њеним дељењем масеним протоком у цеви, добија се **Бернулијева једначина за струјну цев или реалну цев:**

$$\boxed{\underbrace{\frac{p_1}{\rho}+\frac{\alpha_1 U_1^2}{2}+gz_1}_{Y_{s1}}=\underbrace{\frac{p_2}{\rho}+\frac{\alpha_2 U_2^2}{2}+gz_2}_{Y_{s2}}+Y_{g1\text{-}2}}$$

- **Јединична струјна енергија флуида у пресеку 1 једнака је збиру јединичне струјне енергије флуида у низструјном пресеку 2 и јединичне енергије губитака услед рада вискозних сила између та два пресека реалне или струјне цеви.**



6.4 Губици струјне енергије

- **Губици струјне енергије** воде **порекло од напона услед вискозности** ($\boldsymbol{\tau_{xx}}$, $\boldsymbol{\tau_{yy}}$, $\boldsymbol{\tau_{zz}}$, $\boldsymbol{\tau_{xy} = \tau_{yx}}$, $\boldsymbol{\tau_{xz} = \tau_{zx}}$ и $\boldsymbol{\tau_{yz} = \tau_{zy}}$), **тј. површинских сила услед вискозности***.
- При извођењу Навије-Стоксове једначине, чланови који се јављају као последица утицаја вискозности (при струјању нестишљивог флуида) своде се на $\nu \Delta \vec{U}$, а губици услед вискозности су:

$$Y_{g1\text{-}2} = -\int_1^2 \nu \Delta \vec{U} \cdot \mathrm{d}\vec{s}$$

- Губици струјне енергије су **последица унутрашњег трења** и **трења између флуида и зида** (цеви или канала)**.**
- **Јединична енергија губитака између два пресека реалне или струјне цеви једнака је збиру**
  - **јединичних губитака на праволинијским деоницама и**
  - **јединичних губитака услед локалних отпора између та два пресека.**

$$\boxed{Y_{g1\text{-}2} = Y_{\lambda 1\text{-}2} + Y_{\varsigma 1\text{-}2}}$$

* нестишљиво+невртложно=невискозно $\mathrm{rot}\left(\cancel{\mathrm{rot}}\vec{U}\right) = \mathrm{grad}\left(\cancel{\mathrm{div}}\vec{U}\right) - \underset{\|}{\overset{0}{\boxed{\Delta\vec{U}}}}$ или $\Delta\vec{U} \overset{\text{невртложно}}{=} \Delta(\mathrm{grad}\varphi) = \mathrm{grad}\left(\underbrace{\Delta\varphi}_{\mathrm{div}(\mathrm{grad}\varphi)}\right) \overset{\text{нестишљиво}}{=} 0$

6.4.1 Губици струјне енергије на праволинијским деоницама

- **При струјању кроз праву цев**, **канал** или **између паралелних плоча брзина се мења управно на правац струјања**, па вискозност долази до изражаја (постоје напони услед вискозности τ_{xx}, τ_{xy}, τ_{xz}, τ_{yy}, τ_{yz}, τ_{zz}) и **долази до губитка струјне енергије услед вискозности**.

- Губитак енергије флуида проузрокован радом вискозних сила на праволинијским деоницама је:

$$Y_\lambda = \int_0^l \frac{\tau_w \overbrace{O\mathrm{d}l}^{\mathrm{d}A_w}}{\rho A} \underbrace{=}_{\tau_w = f\frac{\rho U^2}{2}} \frac{1}{2}\int_0^l \frac{f U^2 O\mathrm{d}l}{A} = f\, l\, \frac{O}{A}\frac{U^2}{2}$$

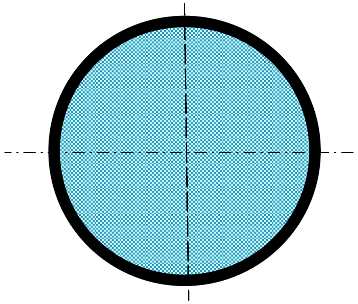
где су $f = \lambda/4$ је фактор трења, λ коефицијент трења, l дужина цеви, U средња брзина, O оквашени обим цеви и A површина проточног пресека.

- Израз за **напон на зиду**:

$$\tau_w = f\frac{\rho U^2}{2}$$

струјне или реалне цеви добијен је на основу **димензијске анализе**.

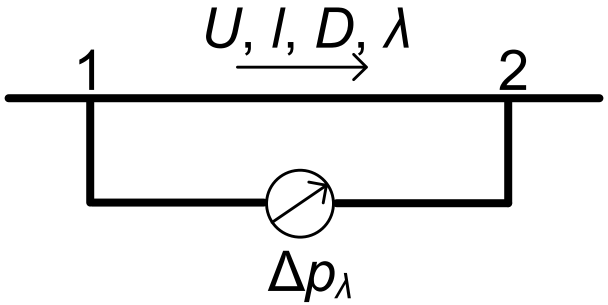
- **Хидраулички пречник цеви** дефинише се као $\boldsymbol{D_h=4A/O}$. За **цев кружног попречног пресека** $\boldsymbol{D_h=D}$.



$$D_h = \frac{\cancel{4}\,\dfrac{\cancel{D^2}\,\cancel{\pi}}{\cancel{4}}}{\cancel{D\pi}} = D$$

- Узимањем у обзир израза за хидраулички пречник цеви D_h следи **Дарсијева формула** која се у пракси користи **за прорачун губитака услед трења на праволинијским деоницама**:

$$\boxed{Y_\lambda = \lambda \frac{l}{\underbrace{D_h}_{D}}\frac{U^2}{2}}\left(=\frac{\Delta p_\lambda}{\rho}\right)\quad\left[\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}}\right]$$



- **Коефицијент трења *λ*** у општем случају **зависи од два бездимензијска броја**, **Рејнолдсовог броја** и **релативне храпавости**, **$\lambda = \lambda(Re,k)$**.
   1. **Рејнолдсов број** представља **количник инерцијалних и вискозних сила**; за струјање флуида кинематске вискозности *v* кроз цев пречника *D* брзином *U* дефинише се као **$Re=UD/v$**. Вредност Рејнолдсовог броја указује на то да ли је у разматраном случају ламинаран или турбулентан режим струјања;
   2. **Релативна храпавост цеви** представља **количник апсолутне храпавости и пречника цеви $k=\delta/D$**.

Одређивање коефицијента трења у цеви

- При **ламинарном струјању флуида у цеви** (**$Re \leq 2320$**) **коефицијент трења зависи само од Рејнолдсовог броја**, па се каже да се **цев понаша као хидраулички глатка**. Када се **аналитичко решење** Навије-Стоксових једначина за **брзину у цеви** (тј. **средњу вредност брзине**) уврсти у Бернулијеву једначину написану између два пресека, који су на неком растојању на ком струјна енергија опада услед трења, добија се **коефицијент трења при ламинарном струјању**:

$$\boxed{\lambda = \frac{64}{Re}}$$

- При **турбулентном струјању флуида у цеви** (**Re>2320**) **не постоје аналитичка решења за коефицијент трења**. У овом режиму **коефицијент трења одређује се експериментално**. Обимна експериментална истраживања вршили су:
  - **Никурадзе 30-тих година прошлог века на вештачки охрапављеним цевима**; на унутрашњу површ цеви наносио је зрна песка пречника (0,1-1,6)mm и мерио пад притиска при различитим протоцима. Резултати испитивања омогућили су одређивање универзалних константи у решењима Рејнолдсових једначина и добијање зависности коефицијента трења од:
    - Рејнолдсовог броја код хидраулички глатких и
    - релативне храпавости код хидраулички потпуно храпавих цеви.
  - **Колбрук 40-тих година XX** века на индустријским (комерцијалним) цевима; испитивања су рађена на цевима које се користе у пракси *.
- **Муди** систематизује резултате и презентује их **дијаграмом *λ*-Re**. На дијаграму је приказана **еквивалентна храпавост*** цеви.

* Како се комерцијалне цеви производе различитим технолошким поступцима осим висине неравнина битно је и како су неравнине распоређене и ког су облика. Због тога се дефинише еквивалентна храпавост која код комерцијалне цеви представља ону храпавост Никурадзеове вештачки охрапављене цеви истог пречника при којој се обе цеви за велике вредности Рејнолдсовог броја понашају као потпуно храпаве (обе цеви имају исту вредност коефицијента трења).

- На **Мудијевом дијаграму** уочава се **пет карактеристичних области**: област ламинарног струјања, прелазна област и три подобласти унутар турбулентног струјања.

1. $\boxed{\textbf{Re} \le \textbf{2320}}$, **ламинарно струјање**, $\lambda = 64/\mathrm{Re}$.
2. $\boxed{\textbf{2320} < \textbf{Re} < \textbf{4000}}$, **прелазна област** (из ламинарног у турбулентни режим). **Струјање** у овој области је **нестабилно**, па је треба **избећи** ако је могуће. У овој области могуће је користити **образац Зајченка**:

$$\lambda = 0{,}0025\sqrt[3]{\mathrm{Re}}$$

3. $\boxed{\textbf{Re} > \textbf{4000}}$, **турбулентно струјање**, при ком се **уз зид цеви формира вискозни подслој чија дебљина** $\boldsymbol{\delta_\eta}$ **опада са порастом вредности Рејнолдсовог броја (**$\mathbf{Re}\uparrow\boldsymbol{\delta_\eta}\downarrow$**)**. Зависно од дебљине вискозног подслоја и висине неравнина на зиду цеви при турбулентном струјању **једна иста цев може се понашати као хидраулички глатка, хидраулички храпава и хидраулички потпуно храпава**. Тако се унутар турбулентног струјања могу јавити следеће три подобласти.

3.1 $\boxed{\textbf{Re < 40/k,}}$ **вискозни подслој покрива неравнине** на зиду цеви, **цев** се понаша као **хидраулички глатка**. **Коефицијент трења зависи само од Рејнолдсовог броја** и рачуна се помоћу **Блазијусовог обрасца**:

$$\lambda = \frac{0{,}3164}{\sqrt[4]{\mathrm{Re}}}$$

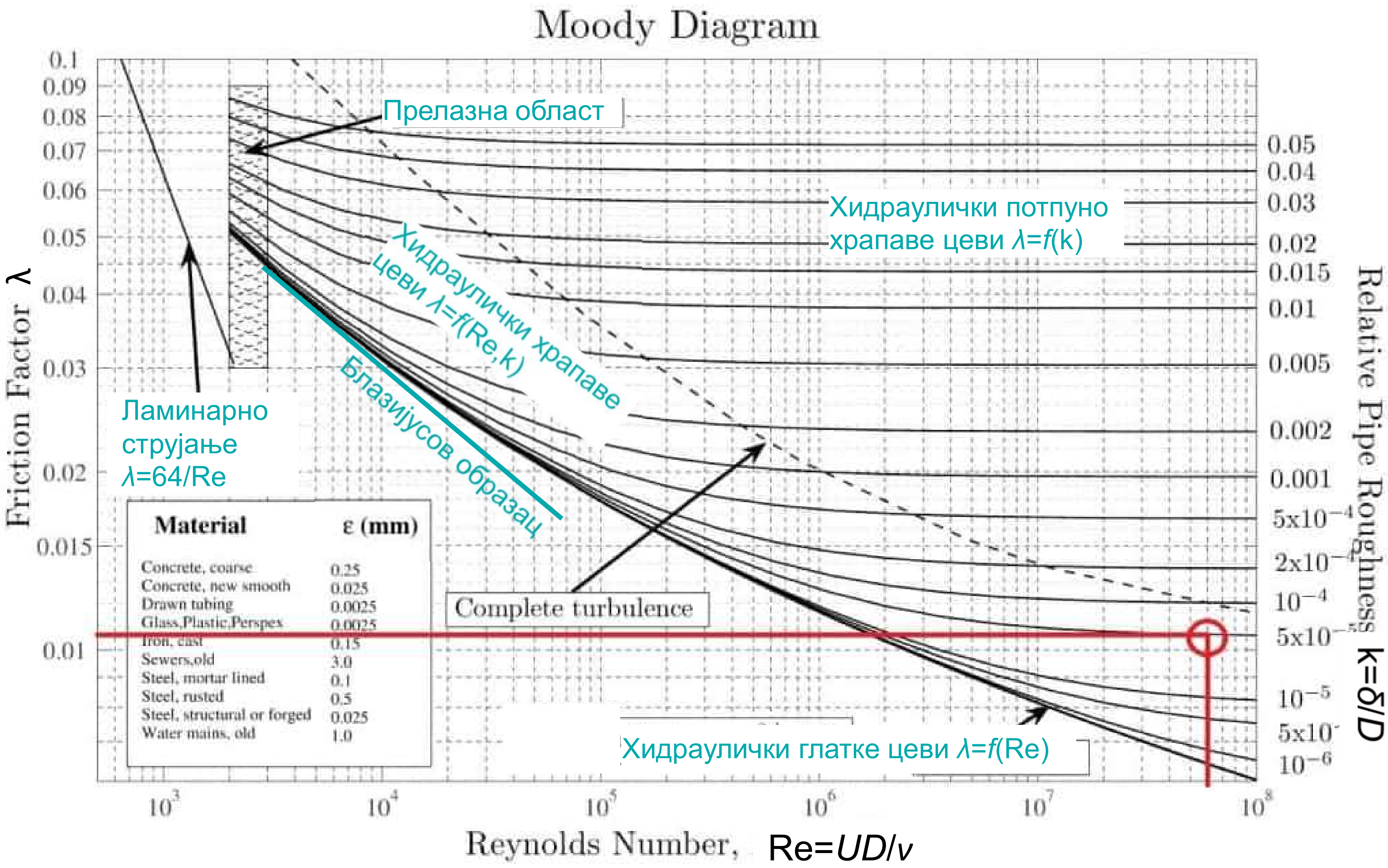
3.2 $\boxed{\textbf{40/k < Re < 500/k,}}$ **вискозни подслој делимично покрива неравнине** на зиду цеви, **цев** се понаша као **хидраулички храпава**. **Коефицијент трења зависи од Рејнолдсовог броја и релативне храпавости** и може се одредити **изразима** добијеним **полуемпиријски**, као нпр. **Алтшуловим** изразом:

$$\lambda = 0{,}11\left(\mathrm{k} + \frac{68}{\mathrm{Re}}\right)^{0{,}25}$$

3.3 $\boxed{\textbf{500/k < Re,}}$ **вискозни подслој не покрива неравнине** на зиду цеви, **цев** се понаша као **хидраулички потпуно храпава**. **Коефицијент трења зависи само од релативне храпавости**. Један од **полуемпиријских образаца** за ову област је **Шифринсонов** образац:

$$\lambda = 0{,}11(\mathrm{k})^{0{,}25}$$

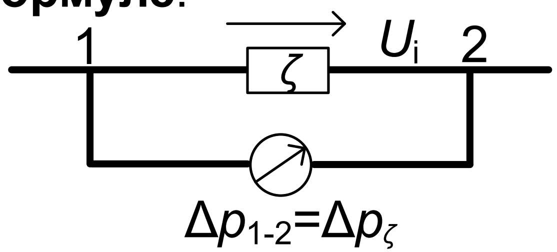
Област 3.3 је „квадратна област“ на Мудијевом дијаграму, јер је $Y_\lambda \sim U^2$.


Moody Diagram
Прелазна област
Хидраулички потпуно храпаве цеви λ=f(k)
Хидраулички храпаве цеви λ=f(Re,k)
Блазијусов образац
Ламинарно струјање λ=64/Re
Complete turbulence
Хидраулички глатке цеви λ=f(Re)
Friction Factor λ
Relative Pipe Roughness
k=δ/D
Reynolds Number, Re=UD/ν
Material
ε (mm)
Concrete, coarse 0.25
Concrete, new smooth 0.025
Drawn tubing 0.0025
Glass,Plastic,Perspex 0.0025
Iron, cast 0.15
Sewers,old 3.0
Steel, mortar lined 0.1
Steel, rusted 0.5
Steel, structural or forged 0.025
Water mains, old 1.0

6.4.2 Локални губици енергије

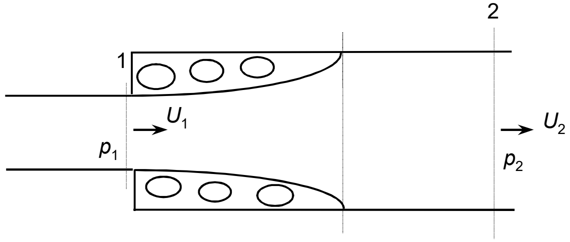
- **Локални губици енергије настају на местима где се мењају праволинијски ток струје флуида и профил брзине, тј. на местима локалних отпора**.
  До њих долази услед промене:
  - правца цеви (колено, кривина) или
  - попречног пресека (бледне, затварачи).
- У овим областима струјног тока**:**
  - **нарушава се једнодимензијски карактер струјања** и струјање постаје изразито **вишедимензијско**;
  - долази до **секундарног струјања**, формирају се **макровртлози** (**„мртве зоне“**) што доводи до пада струјне енергије главне струје флуида.
- Како се Бернулијева једначина не примењује при вишедимензијском струјању **присуство локалних отпора у струјном току** узима се у обзир само глобално, увођењем чланова који представљају губитак енергије флуида услед локалних отпора, преко **Вајсбахове формуле**:

$$\boxed{Y_\varsigma = \varsigma \frac{U_i^2}{2}} \left(= \frac{\Delta p_\varsigma}{\rho} \right) \quad \left[\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}} \right]$$



- **Експериментима** је утврђено да **Вајсбахова формула** веома добро репрезентује **губитке на** различитим **локалним отпорима** при чему је:
  - ***ζ* коефицијент локалног отпора** који се одређује експериментално у општем случају,
  - **U_i средња брзина,** према договору, **иза локалног отпора**.
- **Губитак услед наглог проширења** (аналитички се одређује) назива се и **губитак Борда-Карноа** и рачуна као:

$$Y_{\text{пр}} = \frac{\left(U_1 - U_2\right)^2}{2} \overset{\text{улаз у резервоар}}{=} \frac{U_{\text{и}}^2}{2}$$

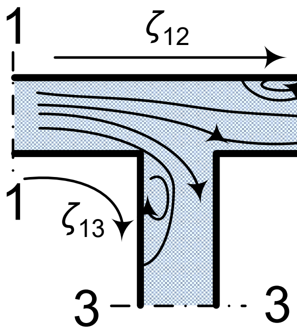


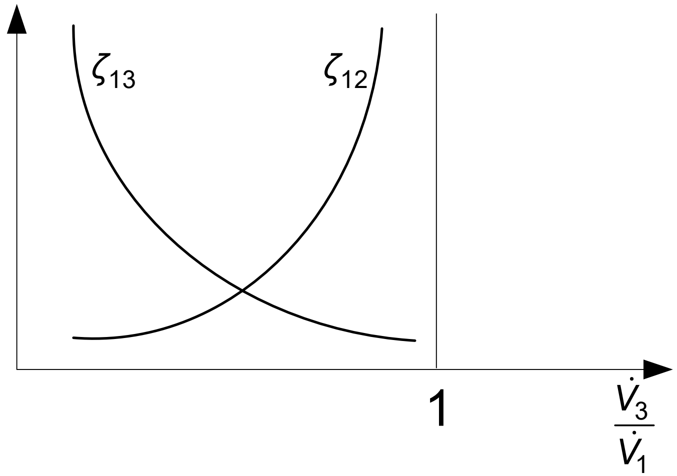
- Када су два локална отпора довољно међусобно удаљена укупан локални губитак на деоници где се они налазе рачуна се као збир оба:

$$Y_{\varsigma_{\text{оба}}} = Y_{\varsigma_1} + Y_{\varsigma_2}$$

- У супротном, потребно је експериментално одредити укупан локални отпор, који је по правилу мањи од збира појединачних.

- **Рачва** представља локални отпор са два различита коефицијента у општем случају.





j. к. $\dot{V}_1 = \dot{V}_2 + \dot{V}_3$

Б. j. 1-2 $Y_{s1} = Y_{s2} + \varsigma_{12}\dfrac{U_2^2}{2}$

Б. j. 1-3 $Y_{s1} = Y_{s3} + \varsigma_{13}\dfrac{U_3^2}{2}$

6.5 Прорачун цевовода

- **Прост цевовод** је **цев константног пречника** или **цев која се састоји од низа деоница различитог пречника које се надовезују једна на другу**.
- **Сложен цевовод** је цевовод који садржи **разгранате цеви**, тј. **садржи бар једну рачву**.

Хидраулички паралелне гране

Б. ј. $a: Y_{s1} = Y_{s2} + Y_{ga}$

Б. ј. $b: Y_{s1} = Y_{s2} + Y_{gb}$

$\vdots$

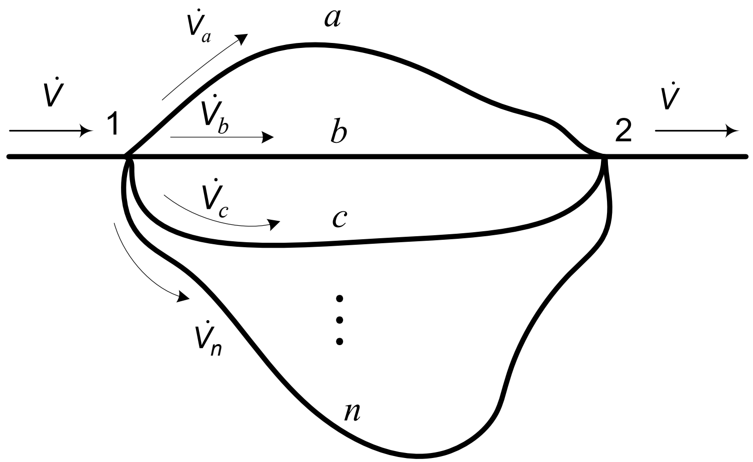
Б. ј. $n: Y_{s1} = Y_{s2} + Y_{gn}$

ј. к. 1: $\dot{V} = \dot{V}_a + \dot{V}_b + \ldots \dot{V}_n$

ј. к. 2: $\dot{V}_a + \dot{V}_b + \ldots \dot{V}_n = \dot{V}_x$

$$\Rightarrow \boxed{\dot{V} = \dot{V}_x}$$

$$\Rightarrow \boxed{Y_{ga} = Y_{gb} = \ldots = Y_{gn}}$$

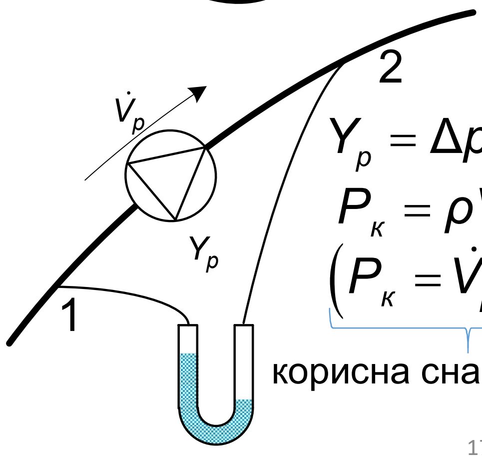


Пумпа у цевоводу

- Када се између пресека 1 и 2 налази пумпа

  Бернулијева једначина је: $\boxed{Y_{s1} + Y_p = Y_{s2} \left(+Y_{g1-2}\right)}$

- $Y_p \left[\dfrac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}}\right]$ је **напор пумпе**, тј. **енергија по јединици масе коју пумпа даје флуиду**.
- **Снага потребна за погон пумпе** је: $P_p = \dfrac{\rho \dot{V}_p Y_p}{\eta_p}\ [\mathrm{W}]$



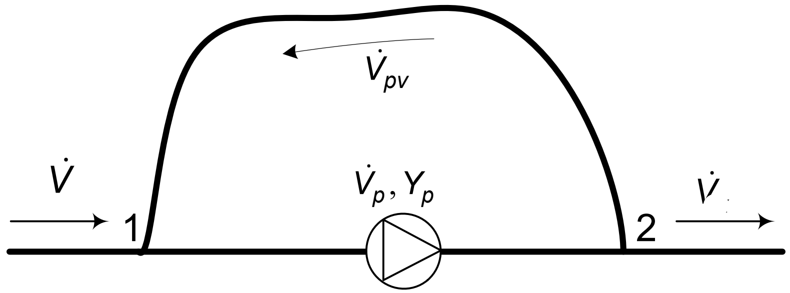
$$Y_p = \Delta p_p / \rho$$

$$P_к = \rho \dot{V}_p Y_p$$

$$\underbrace{\left(P_к = \dot{V}_p \Delta p_p\right)}_{\text{корисна снага пумпе}}$$

- η_p је степен корисног дејства пумпе.

Затворено коло



$$\text{j. к. 1: } \dot{V} + \dot{V}_{pv} = \dot{V}_p$$

$$\text{j. к. 2: } \dot{V}_p = \dot{V}_x + \dot{V}_{pv} \Rightarrow \boxed{\dot{V} = \dot{V}_x}$$

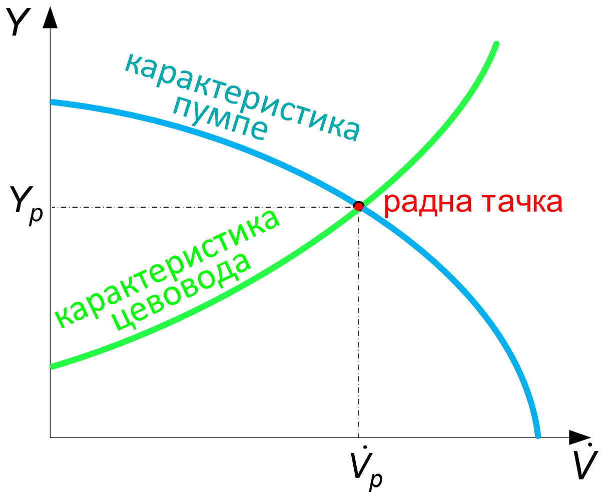
$$\text{Б. j. 1–2: } Y_{s1} + Y_p = Y_{s2} + Y_{gp}$$

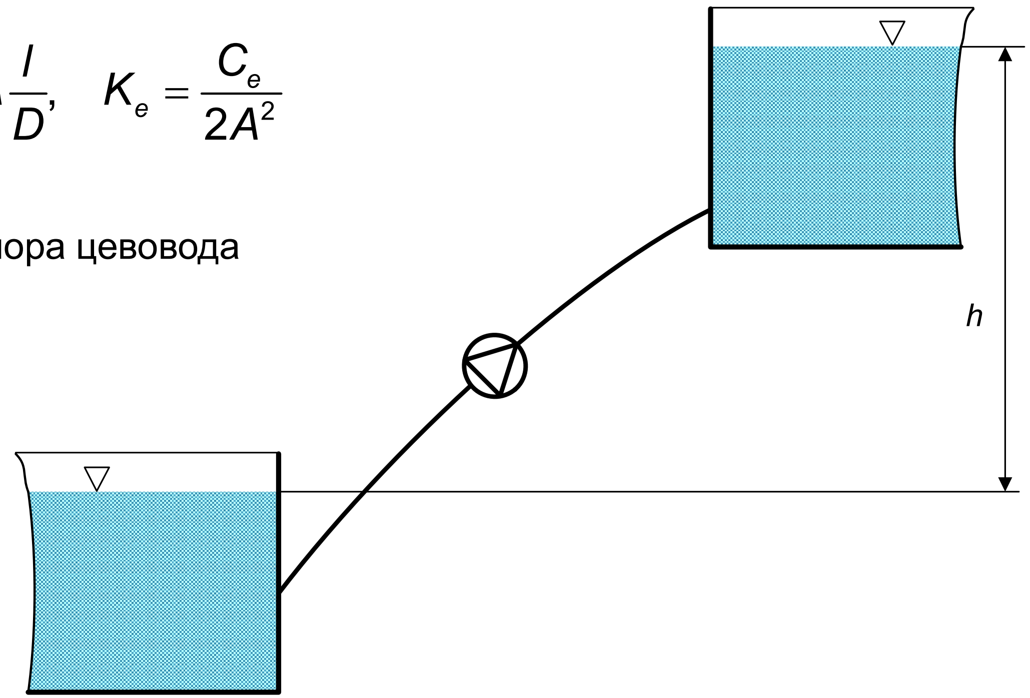
$$\text{Б. j. 2–1: } Y_{s2} = Y_{s1} + Y_{gpv} \Rightarrow \boxed{Y_p = Y_{gp} + Y_{gpv} = Y_{gzk}}$$

Вода се транспортује пумпом из доњег у горњи резервоар

$$Y_c = gh + C_e \frac{U^2}{2} = gh + K_e \dot{V}^2 \quad C_e = \sum \varsigma_i + \lambda \frac{l}{D}, \quad K_e = \frac{C_e}{2A^2}$$

- Y_c је карактеристика цевовода,
- C_e и K_e су еквивалентни коефицијенти отпора цевовода





Турбина у цевоводу представља губитак.

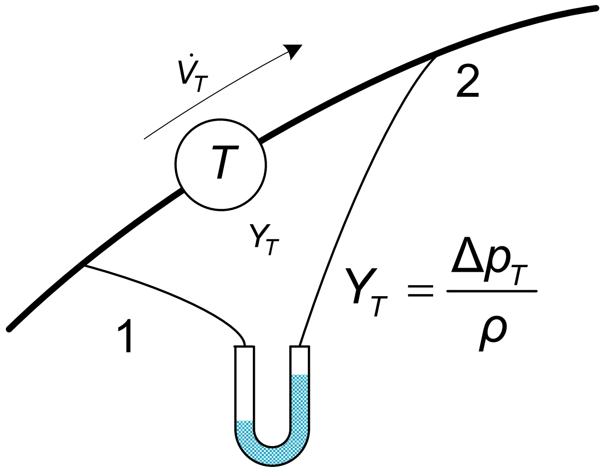
- Када се између пресека 1 и 2 налази турбина

Бернулијева једначина je: $\boxed{Y_{s1} = Y_{s2} + Y_T}$

- $Y_T \left[\frac{\text{J}}{\text{kg}}\right]$ je **енергија по јединици масе коју турбина узима од флуида**.
- **Снага турбине** je:

$$P_T = \rho \dot{V}_T Y_T \eta_T = \dot{V}_T \Delta p_T \eta_T$$

  - η_T je степен корисног дејства турбине.



$$Y_T = \frac{\Delta p_T}{\rho}$$