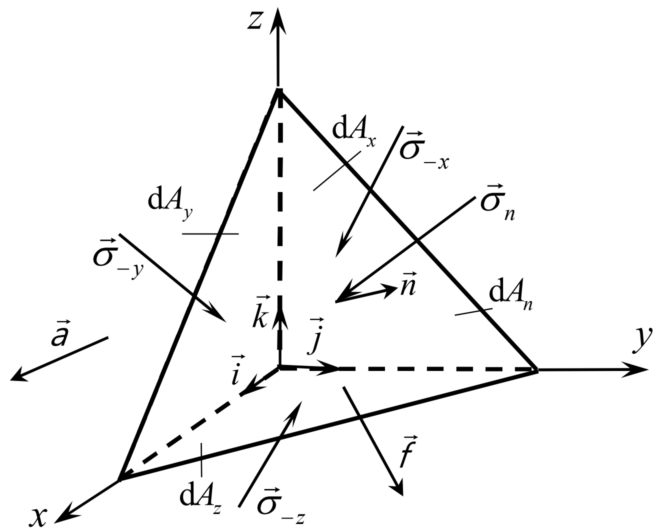
6 Динамика вискозног флуида
6.1 Стање напона

- У флуиду при **вискозном струјању** постоје **тангенцијални и нормални напони**.
- Тензор напона може се приказати као **збир тензора напона при мировању или невискозном струјању флуида и тензора напона који су последица вискозности.**

$$\tilde{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{bmatrix}}^{\text{напони при мировању или невискозном струјању}} + \overbrace{\begin{bmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{bmatrix}}^{\text{напони услед вискозности}}$$

$$\boxed{\vec{\sigma}_n = \tilde{\sigma} \cdot \vec{n}}$$



- **Нормални напони σ_{xx}, σ_{yy}** и **σ_{zz}**, осим притиска, **садрже и нормалне напоне који су последица вискозности τ_{xx}, τ_{yy}** и **τ_{zz}**:

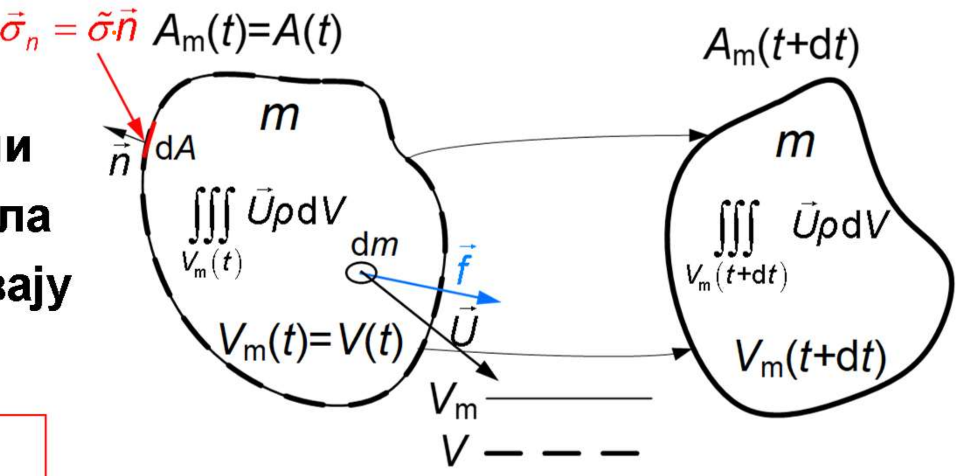
$$\sigma_{xx} = -p + \tau_{xx},\ \sigma_{yy} = -p + \tau_{yy},\ \sigma_{zz} = -p + \tau_{zz}$$

6.2 Закон одржања импулса вискозног флуида Навије-Стоксова једначина количине кретања

- Применом ***другог Њутновог закона механике*** **на вискозно струјање флуида** добија се **Навије-Стоксова једначина количине кретања флуида**.

- **Лагранж**:

Промена количине кретања флуида у материјалној запремини V_m, у времену, једнака је суми сила које делују на тај флуид и изазивају ту промену.



$$\frac{D\vec{K}}{Dt} = \vec{F}_m + \vec{F}_n$$

$$\frac{D}{Dt}\iiint_{V_m} \vec{U}\rho dV = \iiint_{V_m} \vec{f}\rho dV + \oiint_{A_m} \overbrace{\vec{\sigma}_n}^{\tilde{\sigma}\cdot\vec{n}} dA$$

- Промена количине кретања флуида, који се налази у материјалној запремини V_m, у времену је:

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\iiint_{V_m}\vec{U}\rho\,\mathrm{d}V = \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\int_{m\ \mathrm{y}\ V_m}\vec{U}\,\mathrm{d}m \overset{\substack{\text{Лајбниц}\\ \downarrow}}{=} \int_{m\ \mathrm{y}\ V_m}\frac{\mathrm{D}\vec{U}}{\mathrm{D}t}\mathrm{d}m = \iiint_{V_m}\rho\frac{\mathrm{D}\vec{U}}{\mathrm{D}t}\mathrm{d}V$$

- Применом **теореме Гаус-Остроградски** за претварање **површинског у запремински интеграл** следи:

$$\oiint_{A_m}\vec{\sigma}_n\,\mathrm{d}A = \oiint_{A_m}\left(\vec{\sigma}_x n_x + \vec{\sigma}_y n_y + \vec{\sigma}_z n_z\right)\mathrm{d}A = \iiint_{V_m}\left(\frac{\partial\vec{\sigma}_x}{\partial x}+\frac{\partial\vec{\sigma}_y}{\partial y}+\frac{\partial\vec{\sigma}_z}{\partial z}\right)\mathrm{d}V$$

- Применом ових трансформација на почетни облик једначине, следи **интегрални облик** опште **једначине количине кретања**:

$$\boxed{\iiint_{V_m}\left(\rho\frac{\mathrm{D}\vec{U}}{\mathrm{D}t}-\rho\vec{f}-\frac{\partial\vec{\sigma}_x}{\partial x}-\frac{\partial\vec{\sigma}_y}{\partial y}-\frac{\partial\vec{\sigma}_z}{\partial z}\right)\mathrm{d}V = 0}$$

- Да би неодређени интеграл увек био једнак нули, подинтегрална функција мора да буде једнака нули. Следи **диференцијални облик опште једначине количине кретања** или **општа једначина динамике флуида:**

$$\boxed{\rho\frac{\mathrm{D}\vec{U}}{\mathrm{D}t} = \rho\vec{f}+\frac{\partial\vec{\sigma}_x}{\partial x}+\frac{\partial\vec{\sigma}_y}{\partial y}+\frac{\partial\vec{\sigma}_z}{\partial z}}$$

- **Пројекције опште једначине количине кретања на правце** x, y и z **Декартовог координатног система** су:

$$
\boxed{
\begin{aligned}
x:\quad & \rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}\right)=\rho f_x+\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z}\\
y:\quad & \rho\left(\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}\right)=\rho f_y+\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial z}\\
z:\quad & \rho\left(\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}\right)=\rho f_z+\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z}
\end{aligned}
}
$$

или

$$
\boxed{
\begin{aligned}
x:\quad & \rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}\right)=\rho f_x-\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\\
y:\quad & \rho\left(\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}\right)=\rho f_y-\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z}\\
z:\quad & \rho\left(\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}\right)=\rho f_z-\frac{\partial p}{\partial z}+\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z}
\end{aligned}
}
$$

- Сада су осим величина $\vec{U}$, p, T и ρ, непознате и компоненте тензора напона $\boldsymbol{\tau_{xx}}$, $\boldsymbol{\tau_{yy}}$, $\boldsymbol{\tau_{zz}}$, $\boldsymbol{\tau_{xy}=\tau_{yx}}$, $\boldsymbol{\tau_{xz}=\tau_{zx}}$ и $\boldsymbol{\tau_{yz}=\tau_{zy}}$, па систем од 6 једначина не може да обезбеди решење за 12 непознатих величина.

- Применом Стоксове хипотезе, тј. уопштене **Њутнове хипотезе о напонима**, која претпоставља **линеарну везу између напона у флуиду и брзине деформисања** $\tilde{\tau} \sim \tilde{S}$ **(њутновски флуиди)**, **компоненте тензора напона** се изражавају у **функцији од поља брзине**. На тај начин се нове непознате величине (напони услед вискозности) изражавају у функцији од поља брзине и број непознатих је опет 6.
- Њутнова хипотеза о напонима је $\tau_{ik} = \underbrace{\underbrace{2\eta S_{ik}}_{\rho=const.} + \eta'\delta_{ik}\operatorname{div}\vec{U}}_{\rho\neq const.}$

где су S_{ik} компоненте тензора брзине деформисања у индексној нотацији

$$S_{ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right)$$

и δ_{ik} Кронекеров оператор $\delta_{ik} = \begin{cases} 1 & i = k \\ 0 & i \neq k \end{cases}$

- Коефицијент η' се одређује из услова да се притисак у општем случају дефинише као $p = -\left(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}\right)/3$. Да би то било задовољено у случају струјања вискозног флуида, збир нормалних напона који су последица вискозности мора да буде једнак нули:

$$\tau_{xx} + \tau_{yy} + \tau_{zz} = 0$$

- Нормални напони који су последица вискозности према Њутновој хипотези су:

$$\tau_{xx} = 2\eta\frac{\partial u}{\partial x} + \eta'\mathrm{div}\vec{U}, \quad \tau_{yy} = 2\eta\frac{\partial v}{\partial y} + \eta'\mathrm{div}\vec{U}, \quad \tau_{zz} = 2\eta\frac{\partial w}{\partial z} + \eta'\mathrm{div}\vec{U}$$

- У случају струјања нестишљивог флуида (ρ=const.$\Rightarrow \mathrm{div}\vec{U} = 0$), услов $\tau_{xx} + \tau_{yy} + \tau_{zz} = 0$ је задовољено и без члана $\eta'\mathrm{div}\vec{U}$, јер је у том случају

$$\tau_{xx} + \tau_{yy} + \tau_{zz} = 2\eta\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) = 2\eta\mathrm{div}\vec{U} = 0$$

- Да би тај услов био задовољен и у случају струјања стишљивог флуида ($\rho\neq$const.$\Rightarrow\mathrm{div}\vec{U} \neq 0$), хипотеза о напонима допуњена је чланом $\eta'\mathrm{div}\vec{U}$. Тада је:

$$\tau_{xx} + \tau_{yy} + \tau_{zz} = 2\eta\mathrm{div}\vec{U} + 3\eta'\mathrm{div}\vec{U} = 0 \quad \Rightarrow \quad \eta' = -\frac{2}{3}\eta$$

- Компоненте тензора напона услед вискозности у Декартовим координатама су:

$$\tau_{xx} = 2\eta\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3}\eta\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) \qquad \tau_{xy} = \tau_{yx} = \eta\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

$$\tau_{yy} = 2\eta\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3}\eta\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) \qquad \tau_{yz} = \tau_{zy} = \eta\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)$$

$$\tau_{zz} = 2\eta\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{2}{3}\eta\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) \qquad \tau_{xz} = \tau_{zx} = \eta\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)$$

- Заменом израза којима се **компоненте тензора напона услед вискозности** дефинишу **преко поља брзине** у **опште једначине количине кретања**, **под претпоставком** да је динамичка вискозност флуида константна $\boldsymbol{\eta}$ **=const**., следе пројекције једначине количине кретања за **њутновски флуид** на осе x, y и z:

$$\boxed{\begin{aligned}
x: \quad & \rho\frac{\mathrm{D}u}{\mathrm{D}t} = \rho f_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \eta\,\Delta u + \frac{1}{3}\eta\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{div}\vec{U}^{*} \\
y: \quad & \rho\frac{\mathrm{D}v}{\mathrm{D}t} = \rho f_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \eta\,\Delta v + \frac{1}{3}\eta\frac{\partial}{\partial y}\mathrm{div}\vec{U} \\
z: \quad & \rho\frac{\mathrm{D}w}{\mathrm{D}t} = \rho f_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \eta\,\Delta w + \frac{1}{3}\eta\frac{\partial}{\partial z}\mathrm{div}\vec{U}
\end{aligned}}$$

$$^{*}x: \quad \rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}\right) = \rho f_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\left[\underbrace{2\eta\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3}\eta\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)}_{\tau_{xx}}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\underbrace{\eta\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)}_{\tau_{yx}}\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[\underbrace{\eta\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)}_{\tau_{zx}}\right] =$$

$$= \rho f_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \eta\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)\right\} =$$

$$= \rho f_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \eta\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{2}{3}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z}\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z}\right\} =$$

$$= \rho f_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \eta\left\{\underbrace{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}}_{\Delta u} + \frac{1}{3}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z}\right)\right\} = \rho f_x + \frac{\partial p}{\partial x} + \eta\Delta u + \frac{1}{3}\eta\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{div}\vec{U}$$

- Након множења сваке пројекције одговарајућим јединичним вектором и њиховог сабирања, добија се **векторски облик једначине количине кретања њутновског флуида, тј. Навије–Стоксова једначина у векторском облику,** када је ***η* =*const***:

$$\boxed{\rho\frac{\mathrm{D}\vec{U}}{\mathrm{D}t} = \rho\vec{f} - \mathrm{grad}p + \eta\,\Delta\vec{U} + \frac{1}{3}\eta\mathrm{grad}(\mathrm{div}\vec{U})}$$

- Ако је струјање флуида **нестишљиво** (ρ=const. $\Rightarrow$ $\mathrm{div}\vec{U} = 0$), Навије-Стоксова једначина гласи:

$$\boxed{\rho\frac{\mathrm{D}\vec{U}}{\mathrm{D}t} = \rho\vec{f} - \mathrm{grad}p + \eta\,\Delta\vec{U}}$$

- **Навије-Стоксова једначина** у **цилиндричним координатама**, за нестишљиво струјање (**ρ=const.**) и константну динамичку вискозност (***η* =*const*.**) је:

$$r:\quad \rho\left(\frac{\partial u_r}{\partial t}+u_r\frac{\partial u_r}{\partial r}+\frac{u_\theta}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta}-\frac{u_\theta^2}{r^2}+u_z\frac{\partial u_r}{\partial z}\right)=$$

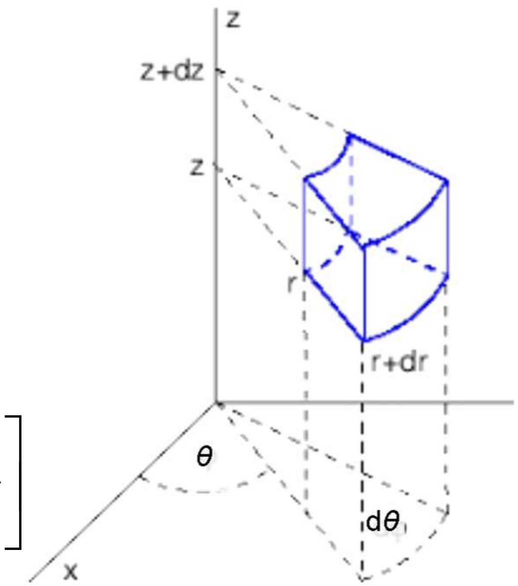
$$=\rho f_r-\frac{\partial p}{\partial r}+\eta\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(ru_r)\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2}-\frac{2}{r^2}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}+\frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2}\right]$$

$$\theta:\quad \rho\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial t}+u_r\frac{\partial u_\theta}{\partial r}+\frac{u_\theta}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}+\frac{u_r u_\theta}{r}+u_z\frac{\partial u_\theta}{\partial z}\right)=$$

$$=\rho f_\theta-\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \theta}+\eta\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(ru_\theta)\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2}+\frac{2}{r^2}\frac{\partial u_r}{\partial \theta}+\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2}\right]$$

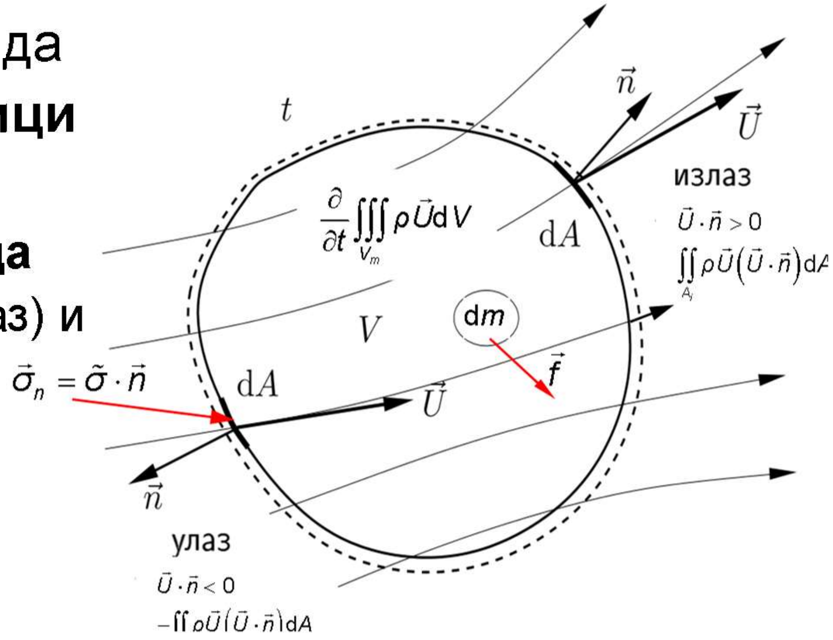
$$z:\quad \rho\left(\frac{\partial u_z}{\partial t}+u_r\frac{\partial u_z}{\partial r}+\frac{u_\theta}{r}\frac{\partial u_z}{\partial \theta}+u_z\frac{\partial u_z}{\partial z}\right)=$$

$$=\rho f_z-\frac{\partial p}{\partial z}+\eta\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u_z}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2}+\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}\right]$$



Ојлер:

- **Промена количине кретања** флуида у **контролној запремини, у јединици времена,** једнака је суми:
  - **протока количине кретања флуида кроз контролну површ** (улаз - излаз) и
  - **сила које делују на флуид у контролној запремини.**



$$\frac{\partial\vec{K}}{\partial t}=\vec{K}_{\mathrm{u}}-\vec{K}_{\mathrm{i}}+\vec{F}_m+\vec{F}_n$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint\limits_V\rho\vec{U}\mathrm{d}V=-\iint\limits_{A_{\mathrm{u}}}\rho\vec{U}\left(\vec{U}\cdot\vec{n}\right)\mathrm{d}A-\iint\limits_{A_{\mathrm{i}}}\rho\vec{U}\left(\vec{U}\cdot\vec{n}\right)\mathrm{d}A+\iiint\limits_V\rho\vec{f}\,\mathrm{d}V+\oiint\limits_A\vec{\sigma}_n\mathrm{d}A$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint\limits_V\rho\vec{U}\mathrm{d}V=-\oiint\limits_A\rho\vec{U}\left(\vec{U}\cdot\vec{n}\right)\mathrm{d}A+\iiint\limits_V\rho\vec{f}\,\mathrm{d}V+\oiint\limits_A\vec{\sigma}_n\mathrm{d}A$$

- **Применом Рејнолдсове транспортне теореме**

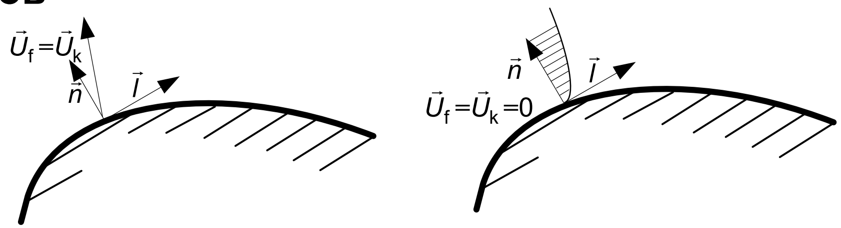
$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\iiint\limits_{V_m} f\,\mathrm{d}V = \iiint\limits_{V}\frac{\partial f}{\partial t}\mathrm{d}V + \oiint\limits_{A} f\left(\vec{U}\cdot\vec{n}\right)\mathrm{d}A$$

за $\vec{f} = \rho\vec{U}$, Лагранжов облик једначине количине кретања своди се на **Ојлеров облик**:

$$\boxed{\underbrace{\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\iiint\limits_{V_m}\rho\vec{U}\,\mathrm{d}V}_{\text{Лагранж}} = \underbrace{\iiint\limits_{V}\frac{\partial\left(\rho\vec{U}\right)}{\partial t}\mathrm{d}V + \oiint\limits_{A}\rho\vec{U}\left(\vec{U}\cdot\vec{n}\right)\mathrm{d}A}_{\text{Ојлер}} = \iiint\limits_{V}\rho\vec{f}\,\mathrm{d}V + \oiint\limits_{A}\vec{\sigma}_n\mathrm{d}A}$$

- Да би се решио проблем уз основне једначине: једначину континуитета, једначину количине кретања постављају се:
  - **почетни услови** (услови у почетном тренутку времена) и
  - **гранични услови** (на границама струјног простора који се разматра).

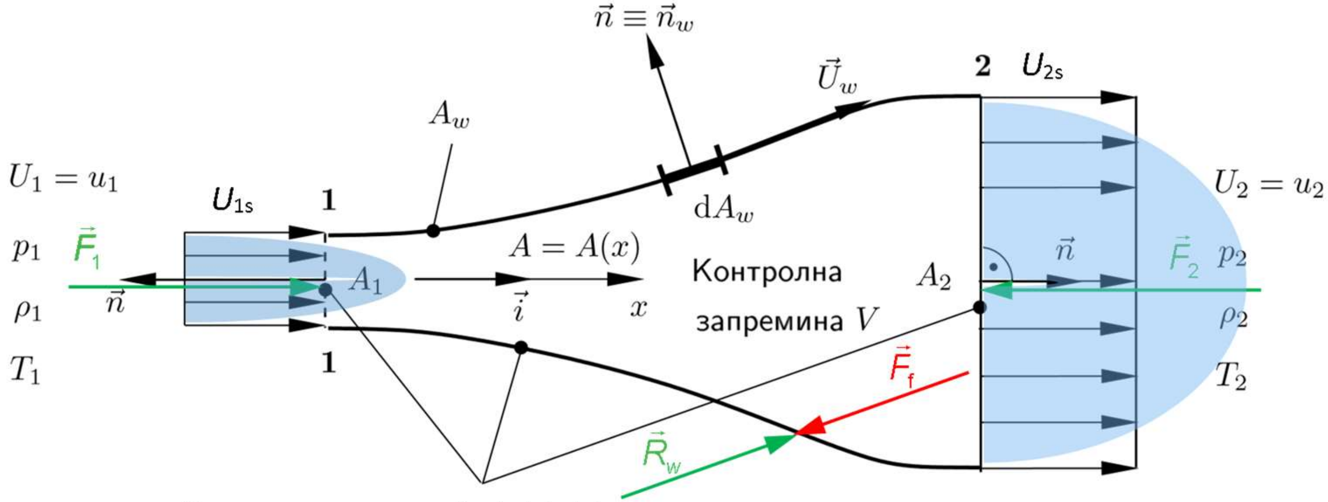
  Како се ради о **вискозном струјању** важи **услов лепљења**, тј. **брзина флуида на контури једнака је брзини контуре**.
    - а) $\vec{U}_\mathrm{f} = \vec{U}_\mathrm{k} \neq 0$
    - б) $\vec{U}_\mathrm{f} = \vec{U}_\mathrm{k} = 0$



а)

б)

Примена Навије-Стоксове једначине на једнодимензијски модел струјања вискозног флуида



Контролна површ $A = A_1 + A_2 + A_w$

- Применом **интегралног Ојлеровог облика Навије-Стоксове једначине** на **издвојену контролну запремину струјне цеви**, **ограничену контролном површи $A=A_1+A_2+A_w$**, за **стационарно струјање** добија се:

$$\oiint_A \rho \vec{U} \left(\vec{U} \cdot \vec{n} \right) \mathrm{d}A = \iiint_V \rho \vec{f} \, \mathrm{d}V + \oiint_A \vec{\sigma}_n \mathrm{d}A$$

- **Површински интеграли по затвореној контролној површи *A*** једнаки су **збиру површинских интеграла** по површи **улазног попречног пресека A_1**, **излазног попречног пресека A_2** и **омотача струјне цеви A_w**.

$$\iint_{A_1} \rho\vec{U}\left(\vec{U}\cdot\vec{n}\right)\mathrm{d}A + \iint_{A_2} \rho\vec{U}\left(\vec{U}\cdot\vec{n}\right)\mathrm{d}A + \iint_{A_w} \rho\vec{U}\left(\vec{U}\cdot\vec{n}\right)\mathrm{d}A =$$

$$= \iiint_V \rho\vec{f}\,\mathrm{d}V + \underbrace{\iint_{A_1} \vec{\sigma}_n\,\mathrm{d}A}_{\vec{F}_1} + \underbrace{\iint_{A_2} \vec{\sigma}_n\,\mathrm{d}A}_{\vec{F}_2} + \underbrace{\iint_{A_w} \vec{\sigma}_n\,\mathrm{d}A}_{\vec{R}_w}$$

- $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ су силе којима околни флуид преко површи A_1 и A_2 делује на посматрану масу флуида, а $\vec{R}_w$ је сила којом омотач цеви делује на посматрани флуид.
- Вектор напона $\vec{\sigma}_n$ у улазном и излазном попречном пресеку, осим притиска, садржи и напоне који потичу од вискозности. За квазиједнодимензијски модел струјања, могући напони услед вискозности (због постојања само једне компоненте брзине) су:

$$\tau_{xx} \sim \frac{\partial u}{\partial x},\ \tau_{xy} \sim \frac{\partial u}{\partial y},\ \tau_{xz} \sim \frac{\partial u}{\partial z}$$

- Како је промена попречног пресека спора или је нема, напони τ_{xx} се могу занемарити у односу на притисак, а због симетрије профила брзине силе које потичу од напона τ_{xz} и τ_{xy} се по попречном пресеку уравнотежавају. Зато се вектор напона у улазном и излазном попречном пресеку своди само на

$$\vec{\sigma}_n = -p\vec{n}$$

- **Брзина струјања је управна** на **површи улазног (A_1) и излазног (A_2) попречног пресека** (брзина је колинеарна са јединичним вектором спољашње нормале ових површи): .

$$\sphericalangle\left(\vec{U}_1,\vec{n}_1\right) = \pi,\ \sphericalangle\left(\vec{U}_2,\vec{n}_2\right) = 0$$

- **Брзина струјања флуида на површи омотача струјне цеви A_w** је управна у односу на $\vec{n}_w$, а једнака нули при струјању у реалној цеви (виск. струјање).
- Узимајући у обзир угао између вектора брзине струјања и орта површи по којима се одређује интеграл, следи:

$$\iint\limits_{A_1} \rho \overbrace{\vec{U}}^{-U\vec{n}} \left(\overbrace{\vec{U}\cdot\vec{n}}^{-U}\right) \mathrm{d}A = \vec{n}_1\rho_1 \iint\limits_{A_1} U^2\,\mathrm{d}A = \vec{n}_1\rho_1\beta_1 U_{1s}^2 A_1$$

$$\iint\limits_{A_2} \rho \overbrace{\vec{U}}^{U\vec{n}} \left(\overbrace{\vec{U}\cdot\vec{n}}^{U}\right) \mathrm{d}A = \vec{n}_2\rho_2 \iint\limits_{A_1} U^2\,\mathrm{d}A = \vec{n}_2\rho_2\beta_2 U_{2s}^2 A_2$$

$$\iint\limits_{A_w} \rho \vec{U}\left(\vec{U}\cdot\vec{n}\right)\mathrm{d}A = 0$$

- ρ_1 и ρ_2 су средње вредности густине у улазном и излазном попречном пресеку.
- β_1 и β_2 су **корекциони коефицијенти количине кретања** или **Бусинескови коефицијенти**. Бусинесков коефицијент представља количник стварне количине кретања флуида у попречном пресеку и количине кретања флуида одређене преко средње брзине U_s.

$$\beta_1 = \frac{\iint\limits_{A_1} U^2\,\mathrm{d}A}{U_{1s}^2 A_1}, \quad \beta_2 = \frac{\iint\limits_{A_2} U^2\,\mathrm{d}A}{U_{2s}^2 A_2}$$

- Бусинесков коефицијент је за струјање флуида кроз цев, за
  - ламинарно струјање β=4/3
  - турбулентно струјање β≈1
- **Једначина количине кретања, за стационарни једнодимензијски модел струјања** у пољу силе Земљине теже, се своди на **алгебарску једначину**:

$$\rho_1\beta_1 U_{1s}^2 A_1\vec{n}_1 + \rho_2\beta_2 U_{2s}^2 A_2\vec{n}_2 = \rho V\vec{g} \underbrace{-p_1 A_1\vec{n}_1}_{\vec{F}_1} \underbrace{-p_2 A_2\vec{n}_2}_{\vec{F}_2} + \vec{R}_w$$

$$-\dot{m}_1\beta_1\vec{U}_{1s} + \dot{m}_2\beta_2\vec{U}_{2s} = \rho V\vec{g} + \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{R}_w$$

- На основу **трећег Њутновог закона**, **интензитет силе којом омотач цеви делује на флуид** $\vec{R}_{\mathrm{w}}$ **једнак је интензитету силе којом флуид делује на омотач цеви** $\vec{F}_{\mathrm{f}}$**, а супротног су смера**:

$$\vec{R}_{\mathrm{w}} = -\vec{F}_{\mathrm{f}}$$

- С**ила којом флуид делује на омотач цеви** је:

$$\boxed{\begin{aligned}&\vec{F}_{\mathrm{f}} = \dot{m}_1\beta_1\vec{U}_{1\mathrm{s}} - \dot{m}_2\beta_2\vec{U}_{2\mathrm{s}} + \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \rho V\vec{g}\\&\vec{F}_1 = -p_1A_1\vec{n}_1, \quad \vec{F}_2 = -p_2A_2\vec{n}_2,\\&F_1 = p_1A_1, \quad F_2 = p_2A_2\end{aligned}}$$

- **Ако се** при одређивању силе којом флуид делује на омотач цеви **узме у обзир и сила којом околина делује** на њега, **резултујућа сила која делује на омотач цеви је**:

$$\boxed{\begin{aligned}&\vec{F}_{\mathrm{f}} = \dot{m}_1\beta_1\vec{U}_1 - \dot{m}_2\beta_2\vec{U}_2 + \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \rho V\vec{g}\\&\vec{F}_1 = -\left(p_1 - p_a\right)A_1\vec{n}_1, \quad \vec{F}_2 = -\left(p_2 - p_a\right)A_2\vec{n}_2\\&F_1 = \left(p_1 - p_a\right)A_1, \quad F_2 = \left(p_2 - p_a\right)A_2\end{aligned}}$$

- У општем случају, када контролна запремина *V* има i=1, 2,...n улазних пресека и j=1, 2, …m излазних пресека, сила на површ A_w је:

$$\vec{F}_f = \sum_{i=1}^{n} \dot{m}_i \beta_i \vec{U}_i - \sum_{j=1}^{m} \dot{m}_j \beta_j \vec{U}_j + \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i + \sum_{j=1}^{m} \vec{F}_j + \rho V \vec{g}$$

$$\vec{F}_i = -(p_i - p_a) A_i \vec{n}_i, \quad \vec{F}_j = -(p_j - p_a) A_j \vec{n}_j$$

$$F_i = (p_i - p_a) A_i \quad F_j = (p_j - p_a) A_j$$

$$\vec{F}_f = -\sum_{k=1}^{n+m} \left[\dot{m}_k \beta_k U_k + (p_k - p_a) A_k \right] \vec{n}_k + \rho V \vec{g}$$