5.3.2 Бернулијева једначина за стишљив флуид

- При **стационарном струјању невискозног стишљивог флуида могу се занемарити запреминске силе, па се Бернулијева једначина може дефинисати на следећи начин.**
  - **Јединична механичка енергија једнака је збиру јединичне струјне и јединичне кинетичке енергије и не мења се дуж струјнице (трајекторије) или вртложне линије:**

$$\int_p \frac{\mathrm{d}p}{\rho(p)} + \frac{U^2}{2} = Const.$$

Изотермско струјање

- Када се густина изрази из једначине стања идеалног гаса преко притиска и температуре, а затим срачуна интеграл по притиску добија се **Бернулијева једначина** за **невискозно стационарно стишљиво изотермско струјање** флуида:

$$\rho = \frac{p}{RT} \Rightarrow \int_p \frac{\mathrm{d}p}{\rho(p)} = RT\int_p \frac{\mathrm{d}p}{p} = RT\ln p \Rightarrow$$

$$\boxed{RT\ln p + \frac{U^2}{2} = Const.}$$

Адијабатско струјање

- Када се густина изрази из једначине адијабате, а затим срачуна интеграл по притиску добија се **Бернулијева једначина** за **невискозно стационарно стишљиво адијабатско струјање** флуида:

$$\frac{p}{\rho^{\kappa}}=const.\left(\frac{p}{\rho^{\kappa}}=\frac{p_1}{\rho_1^{\kappa}}\right)\Rightarrow \rho=\frac{\rho_1 p^{\frac{1}{\kappa}}}{p_1^{\frac{1}{\kappa}}}\Rightarrow$$

$$\int_p \frac{\mathrm{d}p}{\rho(p)}=\frac{p_1^{\frac{1}{\kappa}}}{\rho_1}\int_p \frac{\mathrm{d}p}{p^{\frac{1}{\kappa}}}=\frac{p^{\frac{1}{\kappa}}}{\rho}\frac{\kappa}{(\kappa-1)}p^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}=\frac{\kappa}{(\kappa-1)}\frac{p}{\rho}=\frac{\kappa RT}{(\kappa-1)}=c_pT \Rightarrow$$

$$\boxed{\underbrace{\overbrace{c_pT}^{h}+\frac{U^2}{2}}_{c_pT_0=h_0}=Const,}\ \text{где је}\ c_p=\frac{\kappa R}{\kappa-1}.$$

  - Ова Бернулијева једначина је изведена под претпоставком да је струјање гаса **адијабатско + невискозно,** тј. **изентропско.** Међутим, она важи и у случају када је струјање **адијабатско + вискозног,** тј. **изоенергетско.**
  - Овде је $\boldsymbol{c_p}$ **топлотни капацитет при константном притиску**, ***h*** **енталпија**, а $\boldsymbol{T_0}$ **и** $\boldsymbol{h_0}$ **су тотална** (**зауставна**, **стагнациона**) **температура и енталпија, редом,** које одговарају зауставној тачки на струјници у којој је брзина једнака нули.

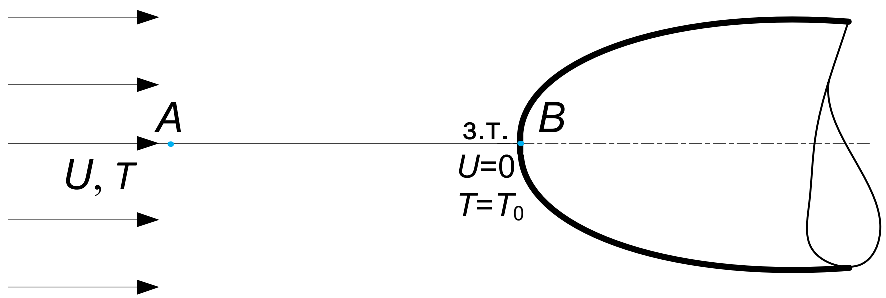
Аеродинамичко загревање тела

- Пример Одредити колико се загреје врх летилице која лети брзином U=1km/s на висини 5,8km, на којој је температура T=250K.
  - Бернулијева једначина за струјницу АВ:

$$c_p T + \frac{U^2}{2} = c_p T_0 \quad \Rightarrow$$

  - Температура врха летилице (тачка В) је заустaвна температура T_0:

$$\boxed{T_0 = T + \frac{U^2}{2c_p} = 748\text{K}}$$

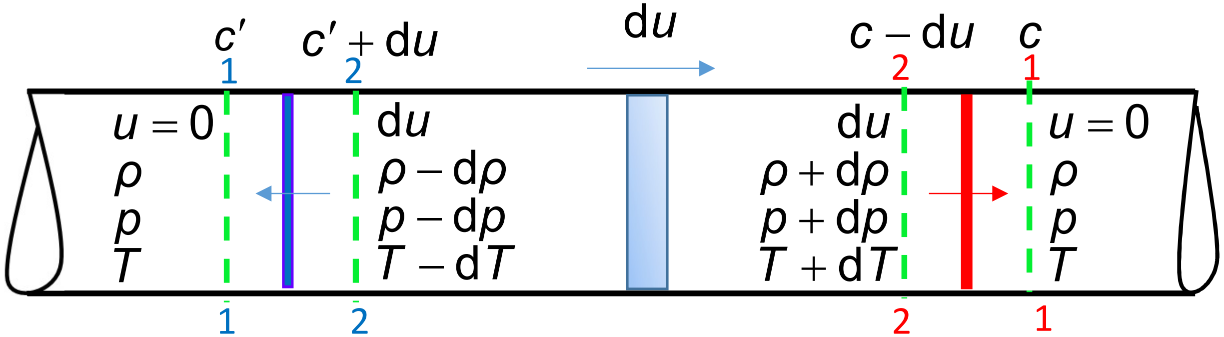


- Чињеница да се врх летилице загрева при великим брзинама лета представља велики проблем у аерокосмотехници.
- Услед вискозности и граничног слоја, који се формира у реалним условима лета, тотална температура се осећа не само у зауставној тачки, већ у широј зони око ње, што доводи до **аеродинамичког загревања тела**.
- Ова појава је посебно изражена при повратку космичких летилица у Земљину атмосферу и назива се и **топлотном баријером.**

5.4 Основе динамике гасова
5.4.1 Брзина звука. Изентропско струјање гасова

- **Поремећаји притиска** у **стишљивој** средини крећу се **коначним константним брзинама**.
- **Мали поремећаји притиска**, који представљају и мале поремећаје осталих физичких величина, простиру се кроз стишљив флуид **изентропски, брзином звука**.
- Пример Мали поремећај (компресиони или експанзиони) се изентропски простире кроз миран ваздух у бесконачно дугој цеви константног попречног пресека A=*const.* Одредити брзину простирања поремећаја (брзину звука).
  - Претпоставке:
  - На средини бесконачно дугачке цеви константног попречног пресека испуњене ваздухом налази се клип, који мирују у почетном тренутку (слика).
  - Покретање клипа малом брзином du слева удесно доводи до малих (инфинитезималних) промена физичких величина у цеви са обе стране клипа које се не могу регистровати тренутно у свим пресецима цеви, већ се границе поремећаја између поремећене и непоремећене области крећу неком константном брзином.

- У области **десно** од клипа настаје **мали компресиони поремећај** који се креће слева удесно брзином ***c*=*const.*=?** (обележен црвеном линијом).
- У области лево од клипа настаје мали експанзиони поремећај који се креће здесна улево брзином ***c'*=*const.*=?** (обележен плавом линијом).
- Струјање је **нестационарно** јер се **величине у појединим попречним пресецима мењају током времена**, али је **стационарно за посматрача који се креће са поремећајем, брзином поремећаја** коју треба **одредити.**
- Струјање је **једнодимензијско**, па важи **1Д систем основних једначина**: **једначина континуитета**, **Ојлерова једначина**, **Бернулијева једначина** и **једначина стања.**
- **У пресеку 1-1** који у оба случаја одговара области у коју није стигао поремећај, **релативна брзина је $U=u=c$**, густина ρ, притисак p и температура T, док су у пресеку 2 ове величине редом:
  - **$c-\mathrm{d}u$, $\rho+\mathrm{d}\rho$, $p+\mathrm{d}p$** и **$T+\mathrm{d}T$** у случају **компресије** (десно од клипа);
  - **$c'+\mathrm{d}u$, $\rho-\mathrm{d}\rho$, $p-\mathrm{d}p$** и **$T-\mathrm{d}T$** у случају **експанзије** (лево од клипа).



- Систем основних 1Д једначина у алгебарском облику за случај компресије се диференцира и добија систем једначина за изентропско струјања гаса (уоквирен).
- Потпуно **исти систем једначина,** па тако и **исто решење** добија се **при експанзији**.
- 1Д систем (U=u) при A=$const$. гласи:

$$\text{j.к.}\quad \rho u \overset{\overset{u=c}{\uparrow}}{=} \rho c = const.$$

$$\text{O.j.}\quad \rho u^2 + p = const.$$

$$\text{j.e.}\quad c_p T + \frac{u^2}{2} = const.$$

$$\text{j.c.}\quad \frac{p}{\rho} = RT$$

/d $\Longrightarrow$ $u_2 - u_1 = -\mathrm{d}u$

$$-\rho\,\mathrm{d}u + c\,\mathrm{d}\rho = 0 \quad \xrightarrow{/\rho c}$$

$$-\rho c\mathrm{d}u + \mathrm{d}p = 0 \quad \xrightarrow{/p}$$

$$c_p\mathrm{d}T - c\,\mathrm{d}u = 0 \quad \xrightarrow{/T}$$

$$\frac{\mathrm{d}p}{p} - \frac{\mathrm{d}\rho}{\rho} - \frac{\mathrm{d}T}{T} = 0 \quad \longrightarrow$$

$$\boxed{\begin{aligned} &-\frac{\mathrm{d}u}{c} + \frac{\mathrm{d}\rho}{\rho} = 0 \\ &-\frac{\rho c^2}{p}\frac{\mathrm{d}u}{c} + \frac{\mathrm{d}p}{p} = 0 \\ &c_p\frac{\mathrm{d}T}{T} - \overbrace{\frac{c^2}{T}\frac{\mathrm{d}u}{c}}^{R\frac{\mathrm{d}p}{p}} = 0 \\ &\frac{\mathrm{d}p}{p} - \frac{\mathrm{d}\rho}{\rho} - \frac{\mathrm{d}T}{T} = 0 \end{aligned}}$$

- Прве две једначине система дају брзину простирања малих поремећаја кроз стишљив флуид - брзину звука: $\boxed{c = \overbrace{\sqrt{\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\rho}}}^{j.k.+O.j.}}$

- Како је **систем** основних једначина у диференцијалном облику **хомоген**, **нетривијална решења** постоје само ако је **детерминанта система једнака нули**.
- Из тог услова се добија **брзина звука** и она **зависи само од температуре гаса**:

$$\boxed{c = \sqrt{\kappa R T}}$$

- **Мали поремећаји физичких величина распростиру се кроз стишљив флуид брзином звука без обзира на то да ли се ради о експанзионим или компресионим поремећајима**.
- Брзина звука у ваздиху (κ*=1,4) на нормалним условима: T=288K и R=287J/(kgK) износи c=340m/s (зависи само од температуре).
- **Количник брзине струјања и брзине звука у некој тачки струјног поља** је **бездимензијски параметар**, **Махов број**: $M=U/c$.
- Зависно од **вредности Маховог броја** струјање може бити:
  - **дозвучно**, када је $M<1$ и $c>U$;
  - **околозвучно (сонично)**, када је $M\approx 1$ и $c\approx U$;
  - **надзвучно**, када је $M>1$ и $c<U$.

- Колика је вредност брзине звука у нестишљивом флуиду?
- Колика је вредност Маховог броја у нестишљивом флуиду?

* $\kappa=c_p/c_V$, где је c_p топлотни капацитет при константном притиску, а $c_V=\dfrac{R}{\kappa-1}$ топлотни капацитет при константној запремини. Важи и Мајерова релација $R=c_p-c_V$. За једнодимензијске гасове $\kappa=5/3$.

Тоталне величине стања

- **Тоталне величине стања** односе се на тачке у струјном пољу (или попречне пресеке) у којима је **брзина струјања једнака нули**.
- Из **Бернулијеве једначине** за **невискозно стационарно стишљиво адијабатско струјање** флуида добија се вредност **тоталне температуре**:

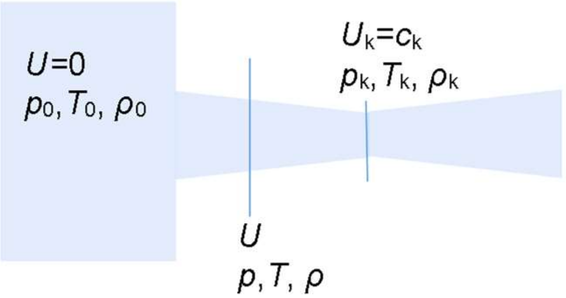
$$c_p T + \frac{U^2}{2} = c_p T_0, \quad / c_p T \Rightarrow \frac{T_0}{T} = 1 + \frac{(\kappa - 1) U^2}{2 \underbrace{\kappa R T}_{c^2}} \Rightarrow \boxed{\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{\kappa - 1}{2} M^2} = \frac{c_0^2}{c^2}$$

- Једначине **изентропске промене стања гаса** за пресек у коме владају тоталне величине стања T_0, p_0 и ρ_0 и неки пресек где су величине стања T, p и ρ гласе:

$$\frac{p_0}{p} = \left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^{\kappa} = \left(\frac{T_0}{T}\right)^{\frac{\kappa}{(\kappa - 1)}},$$

па следећи изрази који одређују **тотални притисак** и **тоталну густину** важе само при **изентропском струјању**:

$$\boxed{\frac{p_0}{p} = \left[1 + \frac{\kappa - 1}{2} M^2\right]^{\frac{\kappa}{\kappa - 1}}, \quad \frac{\rho_0}{\rho} = \left[1 + \frac{\kappa - 1}{2} M^2\right]^{\frac{1}{\kappa - 1}}}$$



Критичне величине стања

- **Критичне величине стања** односе се на тачке у струјном пољу (или попр пр.) у којима је **брзина струјања једнака брзини звука,** тј. **Махов број једнак јединици**.
- Добијају се када се у једначине које одређују тоталне величине стања уврсти M=1:

$$\boxed{\frac{T_к}{T_0}=\frac{2}{\kappa+1}\overset{\kappa=1,4}{\overbrace{=}}0,833}\quad\boxed{\frac{p_к}{p_0}=\left(\frac{2}{\kappa+1}\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}\overset{\kappa=1,4}{\overbrace{=}}0,528}\quad\boxed{\frac{\rho_к}{\rho_0}=\left(\frac{2}{\kappa+1}\right)^{\frac{1}{\kappa-1}}\overset{\kappa=1,4}{\overbrace{=}}0,634}$$

$$\boxed{\frac{T_к}{\cancel{T_0}}\frac{\cancel{T_0}}{T}=\frac{T_к}{T}=\frac{2}{\kappa+1}\left(1+\frac{\kappa-1}{2}M^2\right)}$$

$$\boxed{\frac{p_к}{\cancel{p_0}}\frac{\cancel{p_0}}{p}=\frac{p_к}{p}=\left[\frac{2}{\kappa+1}\left(1+\frac{\kappa-1}{2}M^2\right)\right]^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}}$$

$$\boxed{\frac{\rho_к}{\cancel{\rho_0}}\frac{\cancel{\rho_0}}{\rho}=\frac{\rho_к}{\rho}=\left[\frac{2}{\kappa+1}\left(1+\frac{\kappa-1}{2}M^2\right)\right]^{\frac{1}{\kappa-1}}}$$

- Једначине заокружене љубичастим оквиром важе само при изентропском струјању.