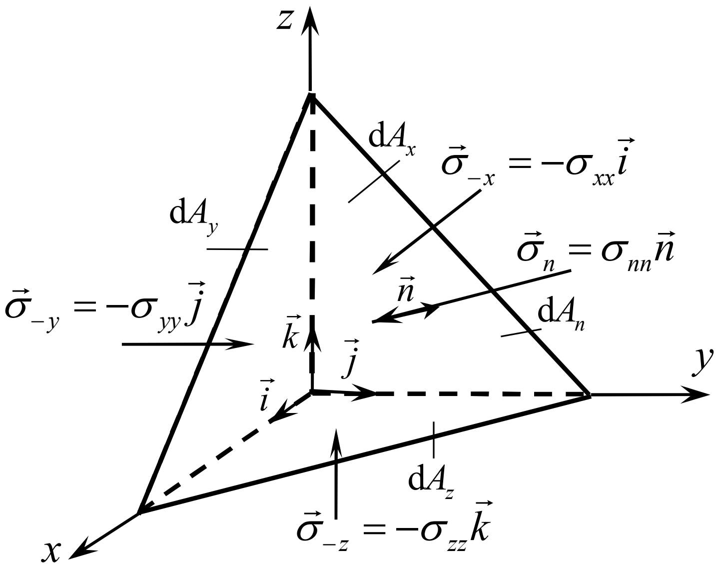
5 Динамика невискозног флуида

5.1 Стање напона

- При **невискозном струјању** флуида **нема тангенцијалних напона**.

$$\boxed{\sigma_{xy}=\sigma_{yx}=\sigma_{yz}=\sigma_{zy}=\sigma_{xz}=\sigma_{zx}=0 \quad \text{или} \quad \sigma_{ij}=0 \quad i\neq j}$$

- **Постоје само нормални напони**. **Вредност нормалног напона у** једној **тачки је иста без обзира на оријентацију површи** у њој. Вредност **напона** је једнака **негативној вредности притиска**.



$$\boxed{\tilde{\sigma}=\begin{bmatrix}\sigma_{xx} & 0 & 0\\ 0 & \sigma_{yy} & 0\\ 0 & 0 & \sigma_{zz}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-p & 0 & 0\\ 0 & -p & 0\\ 0 & 0 & -p\end{bmatrix}}$$

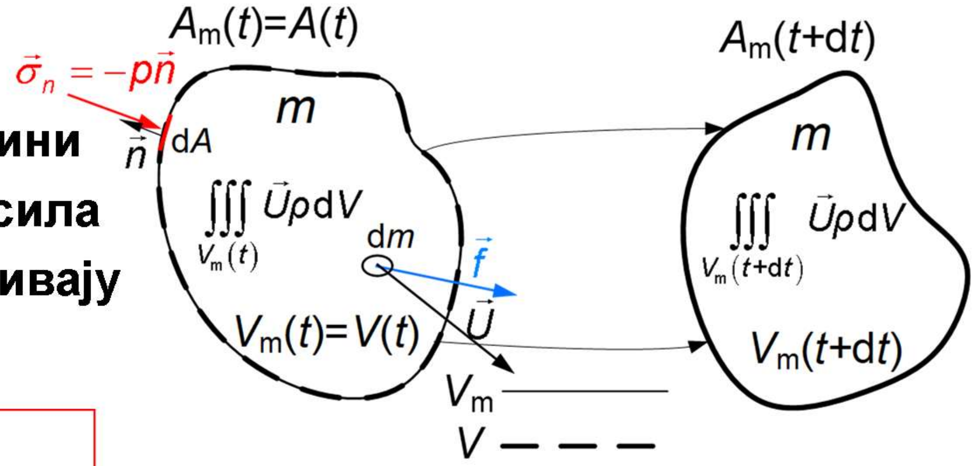
$$\boxed{\sigma_{nn}=\sigma_{xx}=\sigma_{yy}=\sigma_{zz}=-p, \quad \vec{\sigma}_n=-p\vec{n}}$$

5.2 Закон одржања импулса – Ојлерова једначина количине кретања

- Применом ***другог Њутновог закона механике*** **на невискозно струјање флуида** добија се **Ојлерова једначина количине кретања флуида**.

- **Лагранж**:

Промена количине кретања флуида у материјалној запремини V_m, у времену, једнака је суми сила које делују на тај флуид и изазивају ту промену.



$$\frac{D\vec{K}}{\mathrm{D}t} = \vec{F}_m + \vec{F}_n$$

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\iiint_{V_m} \vec{U}\rho \mathrm{d}V = \iiint_{V_m} \vec{f}\rho \mathrm{d}V + \oiint_{A_m} \overbrace{\vec{\sigma}_n}^{-p\vec{n}} \mathrm{d}A$$

- Промена количине кретања флуида, који се налази у материјалној запремини V_m, у времену је:

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\iiint_{V_\mathrm{m}}\vec{U}\rho\mathrm{d}V=\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\int_{m\text{ у }V_\mathrm{m}}\vec{U}\mathrm{d}m\overset{\substack{\text{Лајбниц}\\\downarrow}}{=}\int_{m\text{ у }V_\mathrm{m}}\frac{\mathrm{D}\vec{U}}{\mathrm{D}t}\mathrm{d}m=\iiint_{V_\mathrm{m}}\rho\frac{\mathrm{D}\vec{U}}{\mathrm{D}t}\mathrm{d}V$$

- Применом **теореме Гаус-Остроградски** за претварање **површинског у запремински интеграл** следи:

$$\oiint_{A_\mathrm{m}}p\vec{n}\,\mathrm{d}A=\iiint_{V_\mathrm{m}}\overbrace{\mathrm{grad}p}^{\nabla p}\mathrm{d}V$$

- Применом ових трансформација на почетни облик једначине, следи **интегрални облик Ојлерове једначине количине кретања**:

$$\boxed{\iiint_{V_m}\left(\rho\frac{\mathrm{D}\vec{U}}{\mathrm{D}t}-\rho\vec{f}+\mathrm{grad}p\right)\mathrm{d}V=0}$$

- Да би неодређени интеграл увек био једнак нули, подинтегрална функција мора да буде једнака нули. Следи **диференцијални облик Ојлерове једначине количине кретања:**

$$\boxed{\rho\frac{\mathrm{D}\vec{U}}{\mathrm{D}t}=\rho\vec{f}-\mathrm{grad}p}$$

- **Пројекције Ојлерове једначине количине кретања на правце** *x*, *y* и *z* **Декартовог координатног система** су:

$$x:\quad \rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}\right)=\rho f_x-\frac{\partial p}{\partial x}$$

$$y:\quad \rho\left(\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}\right)=\rho f_y-\frac{\partial p}{\partial y}$$

$$z:\quad \rho\left(\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}\right)=\rho f_z-\frac{\partial p}{\partial z}$$

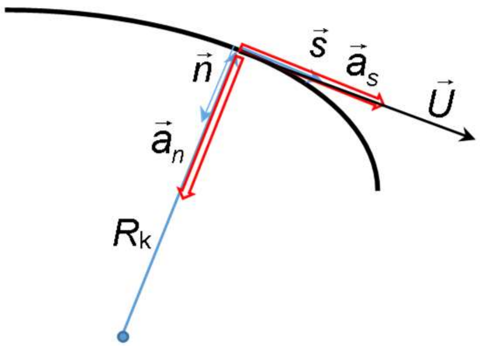
- **Како је вектор убрзања флуидног делића у природним координатама**

$$\vec{a}=\frac{\mathrm{D}\vec{U}}{\mathrm{D}t}=\left(\frac{\partial U}{\partial t}+U\frac{\partial U}{\partial s}\right)\vec{s}+\frac{U^2}{R_\mathrm{k}}\vec{n}=\vec{a}_s+\vec{a}_n$$

Ојлерова једначине количине кретања пројектована на природне координате је:

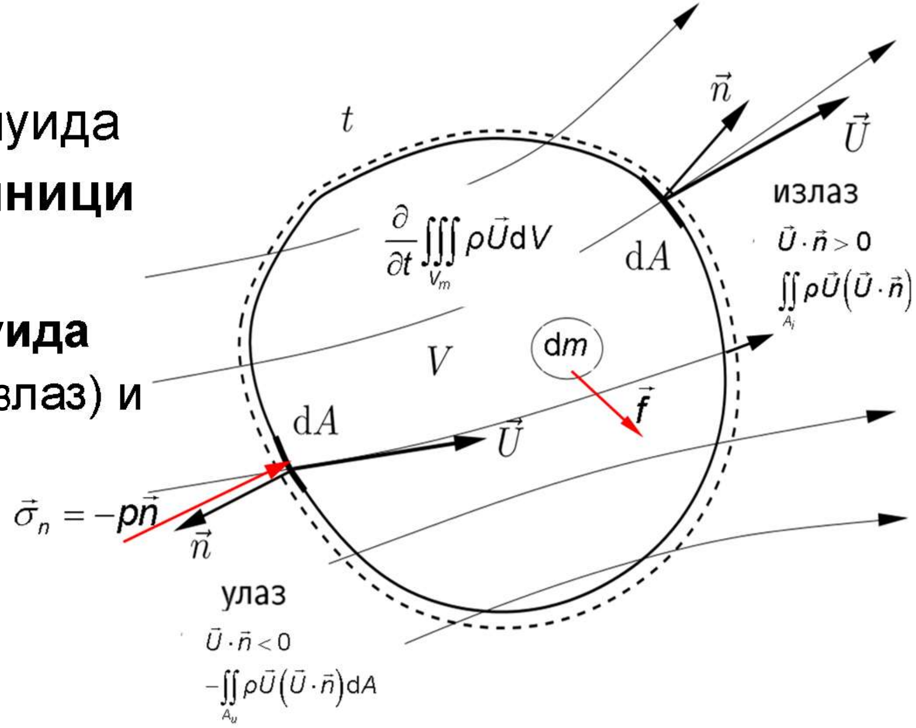
$$s:\quad \rho\left(\frac{\partial U}{\partial t}+U\frac{\partial U}{\partial s}\right)=\rho f_s-\frac{\partial p}{\partial s}$$

$$n:\quad \rho\frac{U^2}{R_\mathrm{k}}=\rho f_n-\frac{\partial p}{\partial n}$$



Ојлер:

- **Промена количине кретања** флуида у **контролној запремини, у јединици времена,** једнака је суми:
  - **протока количине кретања флуида кроз контролну површ** (улаз - излаз) и
  - **сила које делују на флуид у контролној запремини.**



$$\frac{\partial\vec{K}}{\partial t}=\vec{K}_{\mathrm{u}}-\vec{K}_{\mathrm{i}}+\vec{F}_m+\vec{F}_n$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint_V\rho\vec{U}\mathrm{d}V=-\iint_{A_\mathrm{u}}\rho\vec{U}\left(\vec{U}\cdot\vec{n}\right)\mathrm{d}A-\iint_{A_\mathrm{i}}\rho\vec{U}\left(\vec{U}\cdot\vec{n}\right)\mathrm{d}A+\iiint_V\rho\vec{f}\,\mathrm{d}V+\oiint_A-p\vec{n}\mathrm{d}A$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint_V\rho\vec{U}\mathrm{d}V=-\oiint_A\rho\vec{U}\left(\vec{U}\cdot\vec{n}\right)\mathrm{d}A+\iiint_V\rho\vec{f}\,\mathrm{d}V+\oiint_A-p\vec{n}\mathrm{d}A$$

- **Применом Рејнолдсове транспортне теореме**

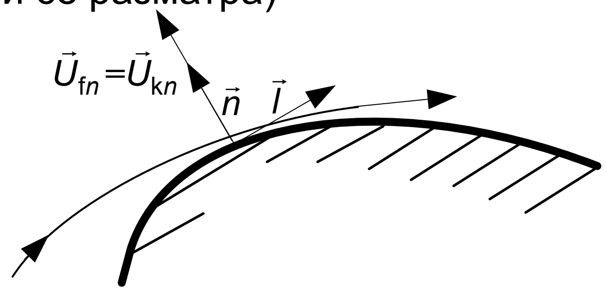
$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\iiint_{V_m} f\mathrm{d}V = \iiint_V \frac{\partial f}{\partial t}\mathrm{d}V + \oiint_A f\left(\vec{U}\cdot\vec{n}\right)\mathrm{d}A$$

за $\vec{f} = \rho\vec{U}$, Лагранжов облик једначине количине кретања своди се на **Ојлеров облик**:

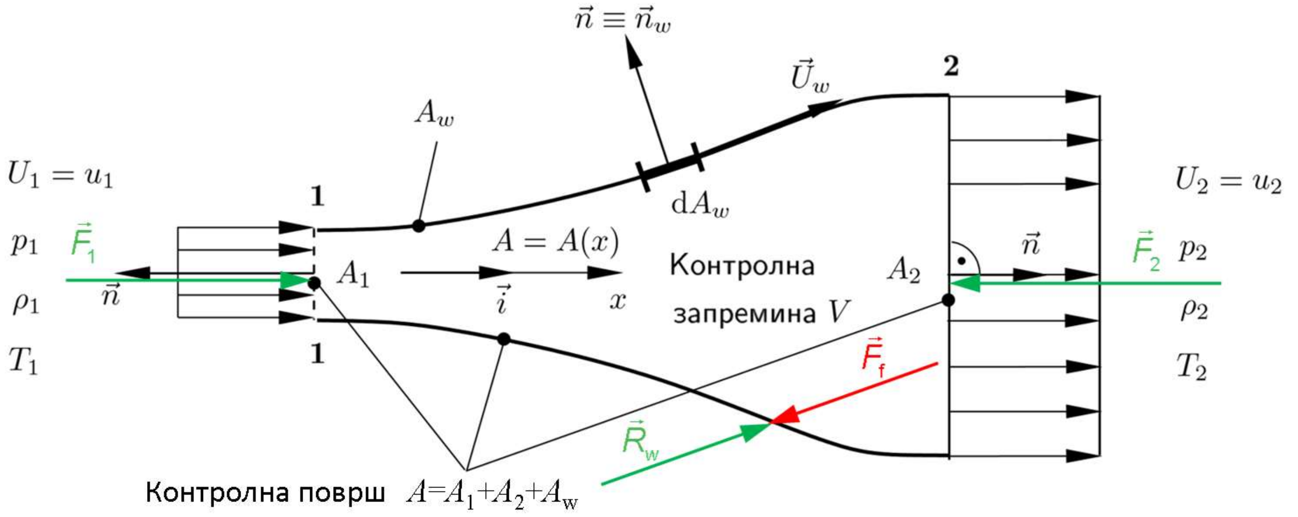
$$\boxed{\underbrace{\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\iiint_{V_m} \rho\vec{U}\,\mathrm{d}V}_{\text{Лагранж}} = \underbrace{\iiint_V \frac{\partial\left(\rho\vec{U}\right)}{\partial t}\mathrm{d}V + \oiint_A \rho\vec{U}\left(\vec{U}\cdot\vec{n}\right)\mathrm{d}A}_{\text{Ојлер}} = \iiint_V \rho\vec{f}\,\mathrm{d}V + \oiint_A -p\vec{n}\mathrm{d}A}$$

- Да би се решио проблем уз основне једначине: једначину континуитета, једначину количине кретања и једначину енергије постављају се:
  - почетни услови (услови у почетном тренутку времена) и
  - гранични услови (на границама струјног простора који се разматра)

  Како се ради о невискозном струјању важи следеће:
    - флуид клиза по површи контуре коју опструјава у правцу тангенте на контуру;
    - брзина флуида у правцу нормале на контуру једнака је брзини контуре у том правцу $U_{fn}=U_{kn}$.



Примена једначине количине кретања на једнодимензијски модел струјања



- Применом **интегралног Ојлеровог облика једначине количине кретања** на **издвојену контролну запремину струјне цеви, ограничену контролном површи** $\boldsymbol{A=A_1+A_2+A_w}$, за **стационарно струјање** добија се:

$$\oiint_A \rho\vec{U}\left(\vec{U}\cdot\vec{n}\right)\mathrm{d}A = \iiint_V \rho\vec{f}\,\mathrm{d}V + \oiint_A -p\vec{n}\mathrm{d}A$$

- **Површински интеграли по затвореној контролној површи *A*** једнаки су **збиру површинских интеграла** по површи **улазног попречног пресека *A*₁**, **излазног попречног пресека *A*₂** и **омотача струјне цеви *A*w**.

$$\iint_{A_1} \rho\vec{U}\left(\vec{U}\cdot\vec{n}\right)\mathrm{d}A + \iint_{A_2} \rho\vec{U}\left(\vec{U}\cdot\vec{n}\right)\mathrm{d}A + \iint_{A_w} \rho\vec{U}\left(\vec{U}\cdot\vec{n}\right)\mathrm{d}A =$$

$$= \iiint_V \rho\vec{f}\,\mathrm{d}V + \underbrace{\iint_{A_1} -p\vec{n}\,\mathrm{d}A}_{\vec{F}_1=-p_1 A_1\vec{n}_1} + \underbrace{\iint_{A_2} -p\vec{n}\,\mathrm{d}A}_{\vec{F}_2=-p_2 A_2\vec{n}_2} + \underbrace{\iint_{A_w} -p\vec{n}\,\mathrm{d}A}_{\vec{R}_w}$$

- $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ су силе којима околни флуид преко површи A_1 и A_2 делује на посматрану масу флуида, p_1 и p_2 су вредности средњег притиска у улазном и излазном пресеку цеви, а $\vec{R}_\mathrm{w}$ је сила којом омотач цеви делује на посматрани флуид.
- **Брзина струјања је управна** на **површи улазног (*A*₁) и излазног (*A*₂) попречног пресека** (брзина је колинеарна са јединичним вектором спољашње нормале ових површи): .

$$\sphericalangle\left(\vec{U}_1,\vec{n}_1\right)=\pi,\ \sphericalangle\left(\vec{U}_2,\vec{n}_2\right)=0$$

- **Брзина струјања је у правцу тангенте на површ омотача струјне цеви *A*w**:

$$\sphericalangle\left(\vec{U}_\mathrm{w},\vec{n}_\mathrm{w}\right)=\pi/2$$

- Узимајући у обзир угао између вектора брзине струјања и орта површи по којима се одређује интеграл, следи:

$$\iint\limits_{A_1} \rho\vec{U}\left(\vec{U}\cdot\vec{n}\right)\mathrm{d}A = -\underbrace{\rho_1 U_1 A_1}_{\dot{m}_1}\vec{U}_1 \quad \iint\limits_{A_2} \rho\vec{U}\left(\vec{U}\cdot\vec{n}\right)\mathrm{d}A = \underbrace{\rho_2 U_2 A_2}_{\dot{m}_2}\vec{U}_2 \quad \iint\limits_{A_w} \rho\vec{U}\left(\vec{U}\cdot\vec{n}\right)\mathrm{d}A = 0$$

- **Једначина количине кретања за стационарни једнодимензијски модел струјања** своди се на **алгебарску једначину**:

$$-\dot{m}_1\vec{U}_1 + \dot{m}_2\vec{U}_2 = \iiint\limits_{V} \rho\vec{f}\,\mathrm{d}V + \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{R}_w$$

- На основу **трећег Њутновог закона**, **интензитет силе којом омотач цеви делује на флуид** $\vec{R}_\mathrm{w}$ **једнак је интензитету силе којом флуид делује на омотач цеви** $\vec{F}_\mathrm{f}$**, а супротног су смера**:

$$\vec{R}_\mathrm{w} = -\vec{F}_\mathrm{f}$$

- Ако на флуид делује масена сила Земљине теже, **сила којом флуид делује на омотач цеви** је:

$$\boxed{\begin{aligned}&\vec{F}_\mathrm{f} = \dot{m}_1\vec{U}_1 - \dot{m}_2\vec{U}_2 + \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \rho V\vec{g}\\&\vec{F}_1 = -p_1 A_1\vec{n}_1, \quad \vec{F}_2 = -p_2 A_2\vec{n}_2,\\&F_1 = p_1 A_1, \quad F_2 = p_2 A_2\end{aligned}}$$

- **Како је струјање невискозно, брзине** U_1 и U_2 су **брзине флуида у улазном и излазном попречном пресеку**.
- **Ако се** при одређивању силе којом флуид делује на омотач цеви **узме у обзир и сила којом околина делује** на њега, **резултујућа сила која делује на омотач цеви је**:

$$\vec{F}_{\mathrm{f}} = \dot{m}_1\vec{U}_1 - \dot{m}_2\vec{U}_2 + \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \rho V\vec{g}$$

$$\vec{F}_1 = -\left(p_1 - p_a\right)A_1\vec{n}_1, \quad \vec{F}_2 = -\left(p_2 - p_a\right)A_2\vec{n}_2,$$

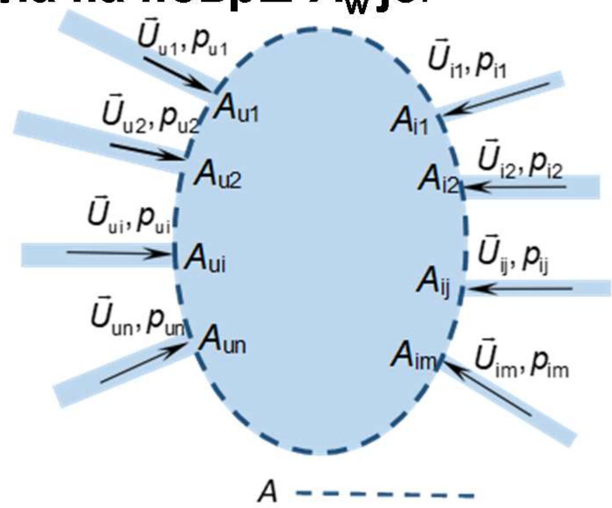
$$F_1 = \left(p_1 - p_a\right)A_1 \quad F_2 = \left(p_2 - p_a\right)A_2$$

- **У општем случају, када контролна запремина** V **има i=1, 2,...n улазних пресека и j=1, 2, …m излазних пресека, сила на површ** A_w **је**:

$$\vec{F}_{\mathrm{f}} = \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}}\dot{m}_{\mathrm{i}}\vec{U}_{\mathrm{i}} - \sum_{\mathrm{j}=1}^{\mathrm{m}}\dot{m}_{\mathrm{j}}\vec{U}_{\mathrm{j}} + \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}}\vec{F}_{\mathrm{i}} + \sum_{\mathrm{j}=1}^{\mathrm{m}}\vec{F}_{\mathrm{j}} + \rho V\vec{g}$$

$$\vec{F}_{\mathrm{i}} = -\left(p_{\mathrm{i}} - p_a\right)A_{\mathrm{i}}\,\vec{n}_{\mathrm{i}}, \quad \vec{F}_{\mathrm{j}} = -\left(p_{\mathrm{j}} - p_a\right)A_{\mathrm{j}}\vec{n}_{\mathrm{j}}$$

$$F_{\mathrm{i}} = \left(p_{\mathrm{i}} - p_a\right)A_{\mathrm{i}} \quad F_{\mathrm{j}} = \left(p_{\mathrm{j}} - p_a\right)A_{\mathrm{j}}$$



$$\vec{F}_{\mathrm{f}} = -\sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{n+m}}\left[\dot{m}_{\mathrm{k}}U_{\mathrm{k}} + \left(p_{\mathrm{k}} - p_a\right)A_{\mathrm{k}}\right]\vec{n}_{\mathrm{k}} + \rho V\vec{g}$$

5.3 Бернулијев интеграл Ојлерове једначине

- **Бернулијева једначина при невискозном струјању флуида** је интеграл **Ојлерове једначине**. Репрезентује **закон одржања механичке енергије** која у некој тачки флуида осим збира **кинетичке и потенцијалне** садржи и **струјну (притисну) енергију струје флуида**.
- **Када се конвективни део материјалног извода брзине у Ојлеровој једначини количине кретања напише у облику** $\left(\vec{U}\cdot\nabla\right)\vec{U}=0{,}5\,\mathrm{grad}\,U^2-\vec{U}\times\left(\nabla\times\vec{U}\right)$ добија се:

$$\boxed{\frac{\partial\vec{U}}{\partial t}+\frac{1}{2}\mathrm{grad}\,U^2-2\vec{U}\times\vec{\omega}=\vec{f}-\frac{1}{\rho}\mathrm{grad}\,p}$$

- Бернулијева једначина изводи се из Ојлерове уз следеће претпоставке:
  1. **Струјање** је **стационарно** $\Rightarrow \partial\vec{U}/\partial t=0$;
  2. **Запреминске силе** су **конзервативне** ($\vec{f}=\mathrm{grad}\,\Phi$, где је Φ потенцијал силе; у пољу силе Земљине теже Φ=-gz за z↑);
  3. **Флуид** је **баротропан**, па је ρ=ρ(p) и важи: $\boxed{\frac{1}{\rho}\mathrm{grad}\,p=\mathrm{grad}\int_p\frac{\mathrm{d}p}{\rho(p)}^{*}}$.

*Нека је $f=\int_p\frac{\mathrm{d}p}{\rho(p)}$ тада је $f'=\frac{\partial f}{\partial p}=\frac{1}{\rho(p)}$ и $\mathrm{grad}f=\frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial z}\vec{k}=f'\,\mathrm{grad}\,p=\frac{\mathrm{grad}\,p}{\rho(p)}$

- Када се узму у обзир наведене **претпоставке Ојлерова једначина** је:

$$\mathrm{grad}\left(\int_p \frac{\mathrm{d}p}{\rho(p)} - \Phi + \frac{1}{2}U^2\right) = 2\vec{U}\times\vec{\omega}$$

- $\vec{U}\times\vec{\omega} = 0$ ако је:
  - $\vec{U} = 0$, тј. **нема струјања** (такав случај нема смисла) или
  - $\vec{\omega} = 0$ $(\mathrm{rot}\vec{U} = 0)$, тј. **струјање је невртложно** или
  - $\vec{U} \,||\, \vec{\omega}$, тј. **вектори брзине и вртложности су колинеарни**.

- Ако је десна страна једначине једнака нули добија се:

$$\boxed{\int_p \frac{\mathrm{d}p}{\rho(p)} - \Phi + \frac{1}{2}U^2 = const.*}$$

- **Јединична механичка енергија је иста у свим тачкама струјног поља у случају невискозног стационарног струјања баротропног флуида у пољу конзервативних масених сила, ако је оно:**
  - **невртложно** $\vec{\omega} = 0$ **или су**
  - **вектори брзине и вртложности колинеарни** $\vec{U} \,||\, \vec{\omega}$**.**

- Ако је **струјање невртложно брзина има потенцијал** $\operatorname{rot}(\operatorname{grad}\varphi)=0$, а ако је **и нестишљиво** једначина континуитета $\operatorname{div}\vec{U}=0$ своди се на $\operatorname{div}(\operatorname{grad}\varphi)=0$, па **потенцијал брзине задовољава Лапласову једначину**:

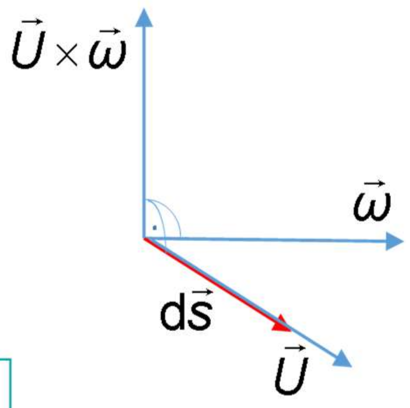
$$\operatorname{div}(\operatorname{grad}\varphi)=\left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right)\cdot\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k}\right)=0\Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=\Delta\varphi=0}$$

- **Лапласова једначина** је **линеарна парцијална диференцијална једначина другог реда.**
- **У случају невртложних и нестишљивих струјања, брзина** се одређује **из Лапласове једначине**, а **притисак из једначине** обележене *.

- **Бернулијева једначина** се добија када се **Ојлерова једначина помножи усмереним елементом струјнице** или **вртложне линије** (или **вектором брзине**):

$$\left[\operatorname{grad}\left(\int_p \frac{\mathrm{d}p}{\rho(p)} - \Phi + \frac{1}{2}U^2\right)\right] \cdot \mathrm{d}\vec{l} = 2\left(\vec{U} \times \vec{\omega}\right) \cdot \mathrm{d}\vec{s}$$



- Вектор брзине и елемент струјнице су колинеарни вектори, па је $\left(\vec{U} \times \vec{\omega}\right) \cdot \mathrm{d}\vec{s} = 0$.
- На тај начин се добија да је:

$$\mathrm{d}_s \underbrace{\left(\int_p \frac{\mathrm{d}p}{\rho(p)} - \Phi + \frac{U^2}{2}\right)}_{\text{B – Бернулијев трочлан}} = 0^{*} \Rightarrow \boxed{\int_p \frac{\mathrm{d}p}{\rho(p)} - \Phi + \frac{U^2}{2} = \mathrm{C}_\psi}$$

- Овде је **B Бернулијев трочлан**, који представља **укупну механичку енергију јединичне масе флуида** у **некој тачки** и:
  - **константан је дуж струјнице B=C$_\psi$** (ψ=*cosnt.*) или вртложне линије;
  - може бити **константан и у целом струјном пољу (невртложна струјања)**.

$$^{*}\operatorname{grad}\mathrm{B} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = \left(\frac{\partial \mathrm{B}}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial \mathrm{B}}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial \mathrm{B}}{\partial z}\vec{k}\right) \cdot \left(\mathrm{d}x\vec{i} + \mathrm{d}y\vec{j} + \mathrm{d}z\vec{k}\right) = \frac{\partial \mathrm{B}}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial \mathrm{B}}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial \mathrm{B}}{\partial z}\mathrm{d}z = \mathrm{d}_s\mathrm{B} = 0$$

- **Бернулијева једначина важи** и **за вртложна струјања.**
- **При стационарном струјању невискозног баротропног флуида у пољу конзервативних масених сила јединична механичка енергија се не мења дуж струјнице или вртложне линије и једнака је збиру јединичне:**
  - **Струјне** $\int_p \frac{\mathrm{d}p}{\rho(p)} \quad \left[\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}}\right]$,
  - **потенцијалне** $-\Phi \quad \left[\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}}\right]$ **и**
  - **кинетичке** $\frac{U^2}{2} \quad \left[\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}}\right]$ **енергије.**
- Како се **Бернулијева једначина** изводи под претпоставком да је **струјање стационарно** (поклапају се струјница и трајекторија), **укупна механичка енергија по јединици масе флуида не мења се дуж трајекторије флуидног делића.**
- Бернулијева једначина репрезентује и могућност **претварања једне врсте енергије у другу** дуж струјнице (трајекторије) или вртложне линије.
- **Бернулијева једначина за невискозно струјање** флуида важи **у деловима струјног поља где вискозност не долази до изражаја.**

5.3.1 Бернулијева једначина за нестишљив флуид

- **Бернулијева једначина (основна једначина Хидраулике)** при **стационарном струјању невискозног нестишљивог флуида** (ρ=*const.*) **у пољу силе Земљине теже** (z↑, Φ=-*gz*) гласи:
  - **Јединична механичка енергија једнака збиру јединичне струјне, јединичне потенцијалне и јединичне кинетичке енергије не мења се дуж струјнице (трајекторије) или вртложне линије:**

$$\frac{p}{\rho}+\frac{U^2}{2}+gz=Const.$$

  - **Хидрауличка висина** једнака **збиру пиезометријске, брзинске и геодезијске висине не мења се дуж струјнице (трајекторије)** или **вртложне линије:**

брзинска висина

геодезијска висина

$$\text{пијезометарска висина} \leftarrow \boxed{\frac{p}{\rho g}}+\boxed{\frac{U^2}{2g}}+\boxed{z}=Const.$$

- **Ако је струјница хоризонтална** *z=const,* претходне две једначине гласе:

$\dfrac{p}{\rho}+\dfrac{U^2}{2}=Const.$ или $\dfrac{p}{\rho g}+\dfrac{U^2}{2g}=Const,$ док у јединицама притиска Бернулијева једначина може да се напише као: $p+\boxed{\dfrac{\rho U^2}{2}}=Const.$

→динамички притисак

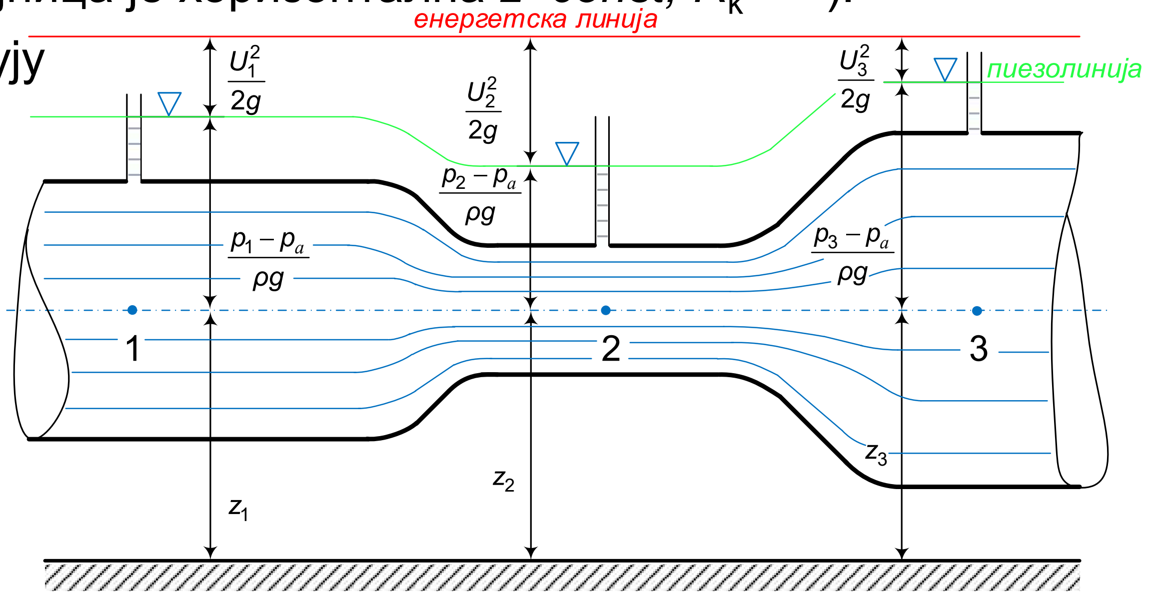
- **Када су струјнице праве линије притисак се у правцу нормале на њих расподељује као у хидростатици (из пројекције Ојлерове једначине на нормалу** $\Rightarrow f_n = \dfrac{\partial p}{\rho \partial n}$ **).**
- Пример 1 Нестишљив флуид струји протоком $\dot{V} = Const.$ кроз хоризонталну цев променљивог попречног пресека. Одредити брзине у пресецима у којима су пречници d_1, d_2 и d_3 као и вредности притиска у тачкама 1, 2 и 3 тих пресека, које су на средишњој струјници.
- **Јединична механичка** енергија дуж **средишње струјнице** се расподељује као на слици. Централна струјница је хоризонтална $z=const,\ R_k \to \infty$).
- **Брзина** и **притисак** се одређују из **једначине континуитета**:

$$\boxed{U_1}\frac{d_1^2\pi}{4} = \boxed{U_2}\frac{d_2^2\pi}{4} = \boxed{U_3}\frac{d_3^2\pi}{4} = \dot{V}$$

и **Бернулијеве једначине** за **средишњу струјницу**:

$$\frac{\boxed{p_1}}{\rho g} + \frac{U_1^2}{2g} + \cancel{z_1} = \frac{\boxed{p_2}}{\rho g} + \frac{U_2^2}{2g} + \cancel{z_2} =$$

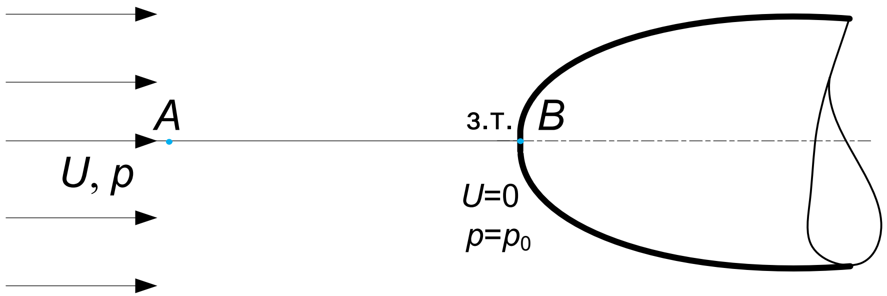
$$= \frac{\boxed{p_3}}{\rho g} + \frac{U_3^2}{2g} + \cancel{z_3} = \mathrm{C}_{123}$$



$$z_1 = z_2 = z_3,\quad d_3 > d_1 > d_2,\quad U_2 > U_1 > U_3,\quad p_3 > p_1 > p_2$$

- При опструјавању **заобљеног тела невискозним нестишљивим флуидом** за **хоризонталну струјницу** AB која пролази кроз **зауставну тачку B** у којој је **брзина једнака 0**, а **притисак** је **зауставни** (**тотални**, **стагнациони**), важи **Бернулијева једначина**:

$$\boxed{\underbrace{p}_{\text{струјни (статички) притисак}}+\overbrace{\frac{\rho U^2}{2}}^{\text{динамички притисак}}=\underbrace{p_0}_{\text{зауставни (тотални, стагнациони) притисак}}}$$



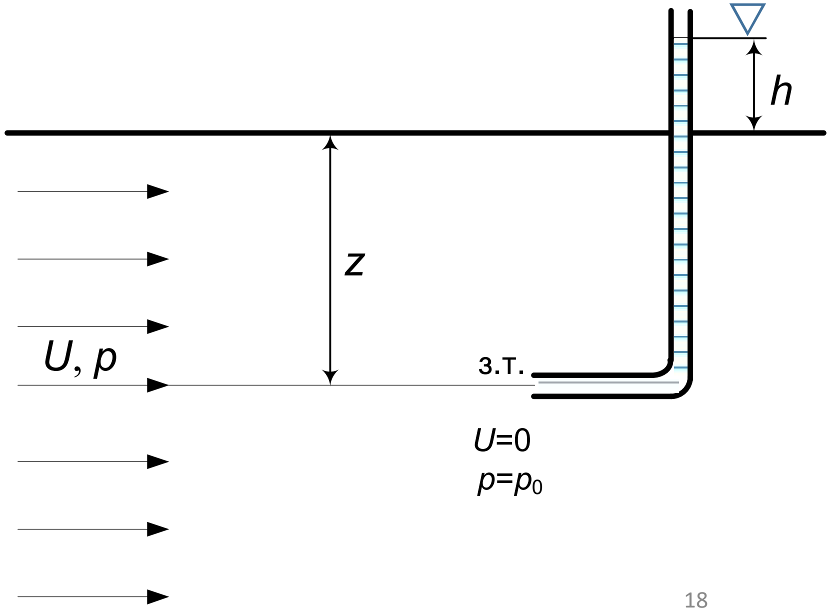
- **Пито сондом и Пито-Прантловом сондом се мери брзина флуида**.

- Пример 2 Одредити брзину реке.

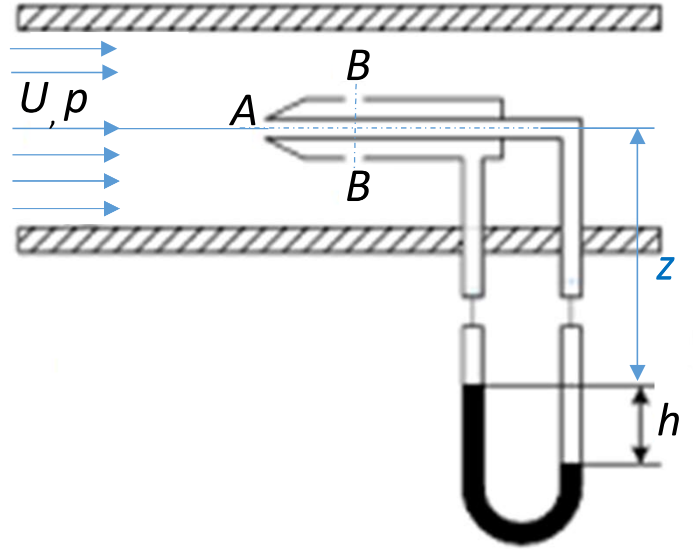
(Како је Пито одредио брзину Сене?)

$$\underbrace{\cancel{p_a}+\cancel{\rho g z}}_{p}+\frac{\rho U^2}{2}=\underbrace{\cancel{p_a}+\rho g\left(h+\cancel{z}\right)}_{p_0}\Rightarrow$$

$$\boxed{U=\sqrt{2gh}}$$



- Пример 3 Одредити брзину нестишљивог флуида Пито-Прантловом сондом.
  - Осе отвора B су управне на правац струјања флуида и осу сонде.
  - У отворома B притисак је једнак струјном притиску p.
  - На врху сонде у отвору A притисак је једнак зауставном притиску p_0.



$$p + \frac{\rho U^2}{2} = p_0 \;\Rightarrow\; \boxed{U = \sqrt{\frac{2(p_0 - p)}{\rho}}}$$

$$p_A = p_0$$

$$p_B = p$$

$$p + \rho g z + \rho_m g h = p_0 + \rho g (h + z) \;\Rightarrow$$

$$p_0 - p = (\rho_m - \rho) g h \;\Rightarrow\; \boxed{U = \sqrt{\frac{2(\rho_m - \rho) g h}{\rho}}}$$

Кавитација

- Из Бернулијеве једначине следи да је (ако се занемари промена висине) притисак у флуиду најмањи када је брзина струјања највећа (на пример у најужем пресеку Вентуријеве цеви, или на површи брзоротирајућих лопатица хидрауличних машина...).
- Ако **притисак** приликом струјања течности на неком месту **падне испод притиска испаравања на радној температури**, настаје **кључање** при ком се **формирају мехурови паре**, а **струјање** постаје **двофазно** што доводи до **кавитације**.
  - Ношени струјом течности мехурови доспевају у зону повишеног притиска (на пример у ротор пумпе) где долази до њихове кондензације.
  - Околна течност се у тренутку формирања капљице, чија је запремина мања од запремине одговарајућег мехура од кога настаје, креће ка центру мехура у ком се сударају делићи течности и долази до краткотрајног, али великог повећања притиска (и до 10^4bar).
- **Кавитација** доводи до **интензивне ерозије материјала** (најчешће **кола пумпе**) изазивајући **буку** и **вибрације**.
- **Обавезно је избећи кавитацију**, што се чини **спречавањем пада притиска до притиска испаравања на радној температури** (нпр. потапањем пумпе).