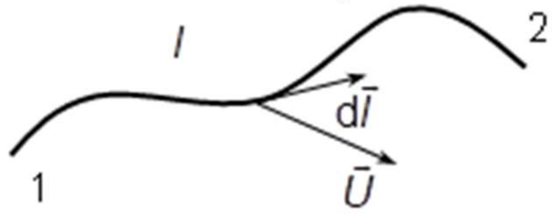
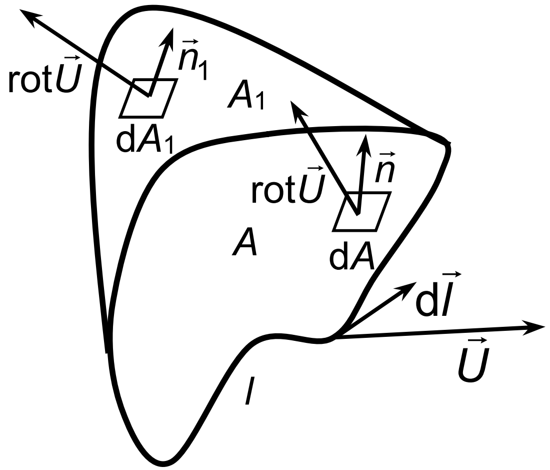
4.4 Циркулација брзине

- **Циркулација брзине дуж линије *l* од тачке 1 до тачке 2 дефинише се као**:

$$\Gamma = \int_1^2 \vec{U} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$



- Ако је **поље брзине конзервативно (градијентно)**, **брзина има потенцијал** ($\vec{U} = \mathrm{grad}\varphi$), па **циркулација зависи само од положаја почетне и крајње тачке криве *l***. Ако је **крива затворена циркулација брзине дуж те криве биће једнака нули**.
- **Циркулација брзине дуж неке затворене контуре *l*,** према Стоксовој теореми о превођењу криволинијског интеграла по затвореној линији *l* у површински по површи *A* ограниченој том линијом, једнака је **протоку (флуксу) вектора вртложности кроз површ ограничену том контуром:**



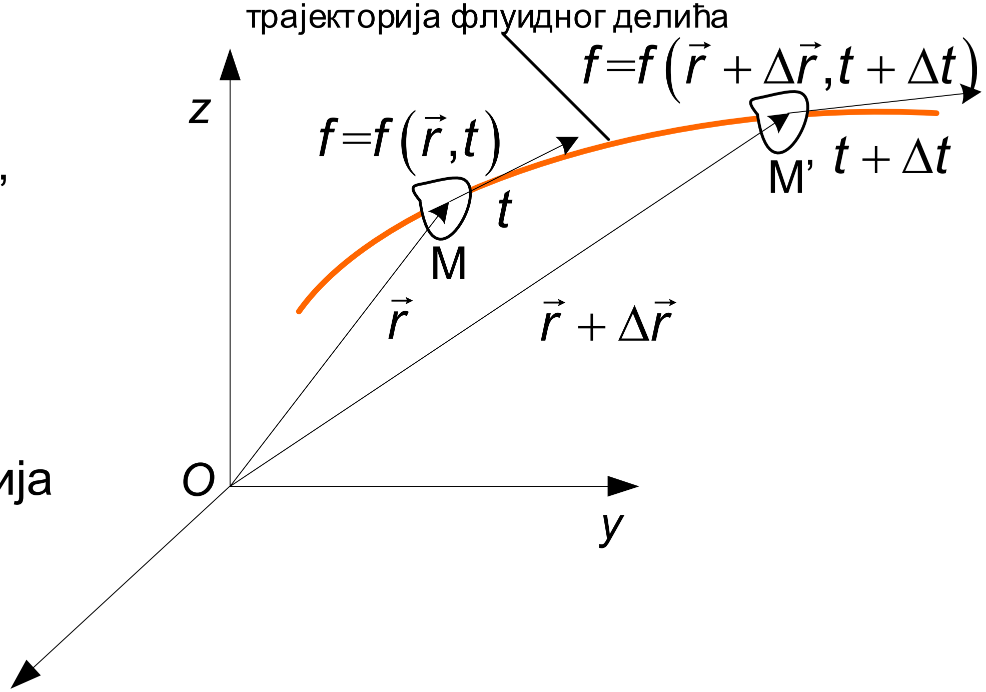
$$\boxed{\Gamma = \oint_l \vec{U} \cdot \mathrm{d}\vec{l} \overset{\text{Стокс}}{\overbrace{=}} \int_A \overbrace{\mathrm{rot}\vec{U}}^{2\vec{\omega}} \cdot \vec{n}\,\mathrm{d}A}$$

- **Циркулација** у механици флуида **представља карактеристику вртложног струјања**.
- Ако је струјање флуида:
  - **невртложно** $\vec{\omega} = 0$ (брзина има потенцијал) **циркулација дуж затворене криве је једнака нули** *Γ*=0 **и обрнуто, ако је** *Γ*=0 тада је $\vec{\omega} = 0$;
  - **вртложно** $\vec{\omega} \neq 0$ **циркулација дуж затворене криве је различита од нуле** *Γ*≠0 **и обрнуто, ако је** *Γ*≠0 тада је $\vec{\omega} \neq 0$.

- У литератури се за ротор вектора користи термин „циркулација по јединици површине *A*“, тј. „густина циркулације“.

4.5 Материјални извод

- **Материјални извод** величине *f* по времену *t* је промена величине *f* флуидног делића са временом у правцу кретања флуидног делића (дуж трајекторије флуидног делића).



- Кроз тачку M, чија је позиција дефинисана вектором положаја $\vec{r}$, у тренутку *t* пролази флуидини делић носећи величину $f = f\left(\vec{r}, t\right)$.

- У тренутку $t+\Delta t$ флуидни делић налази се у тачки M’ чија је позиција дефинисана вектором положаја $\vec{r} + \Delta\vec{r}$, а вредност величине *f* је $f + \Delta f = f\left(\vec{r} + \Delta\vec{r}, t + \Delta t\right)$.

- Промена величине *f* је:

$$\Delta f = f\left(\vec r + \Delta\vec r, t+\Delta t\right) - f\left(\vec r, t\right) = \overbrace{f\left(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z, t+\Delta t\right)}^{\text{развој у Тејлоров ред у околини тачке М}} - f\left(x,y,z,t\right) =$$

$$\cancel{f\left(x,y,z,t\right)} + \boxed{\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x} + \cancel{\frac{1}{2!}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\Delta x^2} + \ldots + \boxed{\frac{\partial f}{\partial y}\Delta y} + \cancel{\frac{1}{2!}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\Delta y^2} + \ldots$$

$$+ \boxed{\frac{\partial f}{\partial z}\Delta z} + \cancel{\frac{1}{2!}\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\Delta z^2} + \ldots + \boxed{\frac{\partial f}{\partial t}\Delta t} + \cancel{\frac{1}{2!}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\Delta t^2} + \ldots \cancel{- f\left(x,y,z,t\right)}$$

- **Занемаривањем малих величина вишег реда** ($(\Delta x)^2 \ll \Delta x\ldots$), **промена величине *f*** флуидног делића на путу од тачке М до тачке М' је:

$$\Delta f = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial f}{\partial z}\Delta z + \frac{\partial f}{\partial t}\Delta t$$

- **Промена величине *f* по времену**, **у правцу кретања флуидног делића**, дефинише се **материјалним изводом:**

$$\frac{\mathrm{D}f}{\mathrm{D}t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\Delta y}{\Delta t} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\Delta z}{\Delta t}\right)$$

$$\overbrace{\frac{Df}{Dt}}^{\text{Лагранж}}_{\text{материјални извод}} = \overbrace{\underbrace{\frac{\partial f}{\partial t}}_{\text{локални део}} + \underbrace{u\frac{\partial f}{\partial x} + v\frac{\partial f}{\partial y} + w\frac{\partial f}{\partial z}}_{\text{конвективни део}}}^{\text{Ојлер}}$$

$$u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y} + w\frac{\partial}{\partial z} = \left(u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k}\right)\cdot\left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right) = \vec{U}\cdot\nabla$$

$$\underbrace{\frac{Df}{Dt}}_{\text{материјални извод}} = \underbrace{\frac{\partial f}{\partial t}}_{\text{локални део}} + \underbrace{\left(\vec{U}\cdot\nabla\right)f}_{\text{конвективни део}}$$

- **Материјални извод** који произилази из **Лагранжовог приступа** (промена величине са временом **дуж трајекторије флуидног делића**) може се описати **Ојлеровим приступом** тј. **праћењем промена у тачкама М и М’** струјног поља.
- **Локални део** $\partial f/\partial t$ представља **локалну брзину промене величине *f* са временом** у тачки М. Јавља се **услед нестационарности** поља величине ***f***. Ако је $\partial f/\partial t = 0$, поље величине ***f* је стационарно**, тј. величина *f* се не мења током времена.
- **Конвективни део** $\left(\vec{U}\cdot\nabla\right)f$ представља **разлику између величине *f* у тачки М и тачки М’ у тренутку *t***. Јавља се **услед нехомогености поља величине *f***. Ако је поље величине ***f* хомогено**, **конвективни део материјалног извода је једнак нули**.

- $\dfrac{\mathrm{D}f}{\mathrm{D}t} = 0 \Rightarrow f = Const.$ - **величина *f* се не мења дуж трајекторије флуидног делића**.
- *ρ=Const.* - **густина флуидних делића се не мења.**
- *ρ=const.* - **густина флуидних делића се не мења и сви флуидни делићи су исте густине**.

- Ако је ***f*** **скалар материјални извод је**:

$$\boxed{\frac{\mathrm{D}f}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial f}{\partial t} + \vec{U}\cdot\nabla f = \frac{\partial f}{\partial t} + \vec{U}\cdot \operatorname{grad} f}$$

- **Материјални извод брзине је убрзање флуидног делића:**

$$\boxed{\vec{a} = \frac{\mathrm{D}\vec{U}}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \left(\vec{U}\cdot\nabla\right)\vec{U} = \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \left(u\frac{\partial \vec{U}}{\partial x} + v\frac{\partial \vec{U}}{\partial y} + w\frac{\partial \vec{U}}{\partial z}\right)}$$

- Како је

$$\frac{\mathrm{D}\left(u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k}\right)}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial\left(u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k}\right)}{\partial t} + \left(u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y} + w\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k}\right)$$

следе **пројекције вектора убрзања**:

$$\boxed{\begin{aligned} a_x &= \frac{\mathrm{D}u}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} \\ a_y &= \frac{\mathrm{D}v}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} \\ a_z &= \frac{\mathrm{D}w}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} \end{aligned}}$$

- **Конвективни део материјалног извода** $\left(\vec{U}\cdot\nabla\right)\vec{U}$ може се **трансформисати** применом теорије поља у облик погодан за интеграљење једначине одржања количине кретања:

$$\left(\vec{U}\cdot\nabla\right)\vec{U} = \frac{1}{2}\,\mathrm{grad}\,U^2 - \vec{U}\times\left(\nabla\times\vec{U}\right)^*$$

- *Доказ:

$$\vec{U}\times\left(\nabla\times\vec{U}\right) = \vec{U}_c\times\left(\nabla\times\vec{U}\right) = \left(\vec{U}_c\cdot\vec{U}\right)\nabla - \left(\vec{U}_c\cdot\nabla\right)\vec{U} =$$

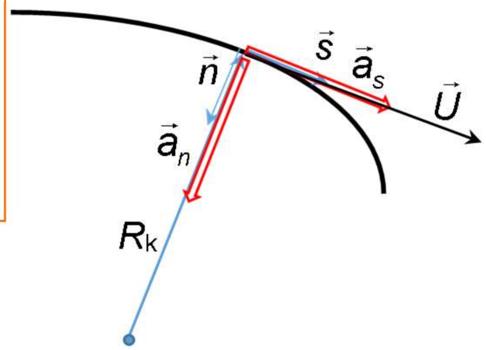
$$= \underbrace{\nabla\left(\vec{U}_c\cdot\vec{U}\right)}_{\substack{\nabla U^2 = \nabla\left(\vec{U}_c\cdot\vec{U}\right)+\nabla\left(\vec{U}\cdot\vec{U}_c\right)= \\ =2\nabla\left(\vec{U}_c\cdot\vec{U}\right)}} - \underbrace{\left(\vec{U}_c\cdot\nabla\right)\vec{U}}_{\left(\vec{U}\cdot\nabla\right)\vec{U}} = \frac{1}{2}\,\mathrm{grad}\,U^2 - \left(\vec{U}\cdot\nabla\right)\vec{U}$$

- Тако се **убрзање** може написати и на следећи начин:

$$\boxed{\vec{a}=\frac{\mathrm{D}\vec{U}}{\mathrm{D}t}=\frac{\partial\vec{U}}{\partial t}+\frac{1}{2}\mathrm{grad}\,U^2-\vec{U}\times\left(\nabla\times\vec{U}\right)}$$

- **Вектор убрзања флуидног делића** који се креће дуж **криволинијске трајекторије** може се разложити на **убрзање у правцу тангенте** $\vec{a}_s$ и на **убрзање у правцу нормале** $\vec{a}_n$ на трајекторију флуидног делића.
- **Вектор брзине флуидног делића** се може написати као $\vec{U}=U\vec{s}$, где је $\vec{s}$ **јединични вектора тангенте на трајекторију флуидног делића**, па је **убрзање у природним координатама**:

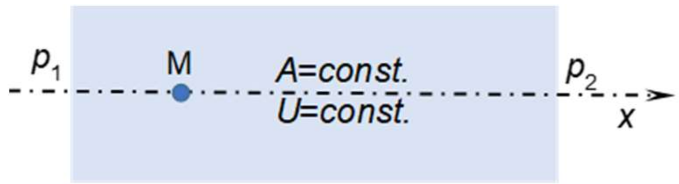
$$\boxed{\vec{a}=\frac{\mathrm{D}(U\vec{s})}{\mathrm{D}t}=\frac{\mathrm{D}(U)}{\mathrm{D}t}\vec{s}+U\underbrace{\frac{\mathrm{D}\vec{s}}{\mathrm{D}t}}_{\frac{U}{R_\mathrm{k}}\vec{n}}=\left(\frac{\partial U}{\partial t}+U\frac{\partial U}{\partial s}\right)\vec{s}+\frac{U^2}{R_\mathrm{k}}\vec{n}=\vec{a}_s+\vec{a}_n}$$



Пример: Да ли постоји локално и/или конвективно убрзање у означеним тачкама струјног поља? Тачке M, N и O налазе се на осама цеви, где **брзина** и **убрзање имају само једну пројекцију**, а флуид струји **нестишљиво**.

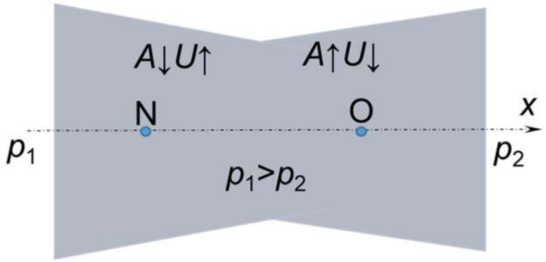
- Тачка M налази се на оси **цеви константног попречног пресека**.

  - $p_1=const.\ p_2=const. \Rightarrow \partial U/\partial t=0$
    $A=const. \Rightarrow\ U\,\partial U/\partial x=0$ $\Big\}\ a_M=0$
  - $p_1 \neq const.$ или $p_2 \neq const. \rightarrow \partial U/\partial t \neq 0$
    $A=const. \Rightarrow\ U\partial U/\partial x=0$ $\Big\}\ a_M=\partial U/\partial t$



- Тачке N и O налазе се на оси **цеви променљивог попречног пресека**.

  - $p_1=const.\ p_2=const. \rightarrow \partial U/\partial t=0$
    $A\downarrow \rightarrow U\uparrow \Rightarrow\ U\,\partial U/\partial x>0$
    $A\uparrow \rightarrow U\downarrow \Rightarrow\ U\,\partial U/\partial x<0$ $\Big\}\ a_N=U\,\partial U/\partial x>0$, $a_O=U\,\partial U/\partial x<0$



  - $p_1 \neq const.$ или $p_2 \neq const. \rightarrow \partial U / \partial t \neq 0$
    $A\downarrow \rightarrow U\uparrow \Rightarrow\ U\,\partial U/\partial x>0$
    $A\uparrow \rightarrow U\downarrow \Rightarrow\ U\,\partial U/\partial x<0$ $\Big\}\ a_N=\partial U/\partial t + U\,\partial U/\partial x$, $a_O=\partial U/\partial t + U\,\partial U/\partial x$

4.6 Средње вредности величина стања

- **Средња брзина U_s у пресеку струјне цеви** је **фиктивна константна брзина** која **помножена са површином попречног пресека струјне цеви** даје **проток као** и **стварна расподела брзине**:

$$U_s A = \overbrace{\iint_A \vec{U} \cdot \vec{n} \, \mathrm{d}A}^{\dot{V}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{U_s = \frac{\iint_A \vec{U} \cdot \vec{n} \, \mathrm{d}A}{A}}$$

- **Средња густина ρ_s** је она **вредност густине** која **помножена са запреминским протоком** даје **исти масени проток као** и **стварна расподела густине**:

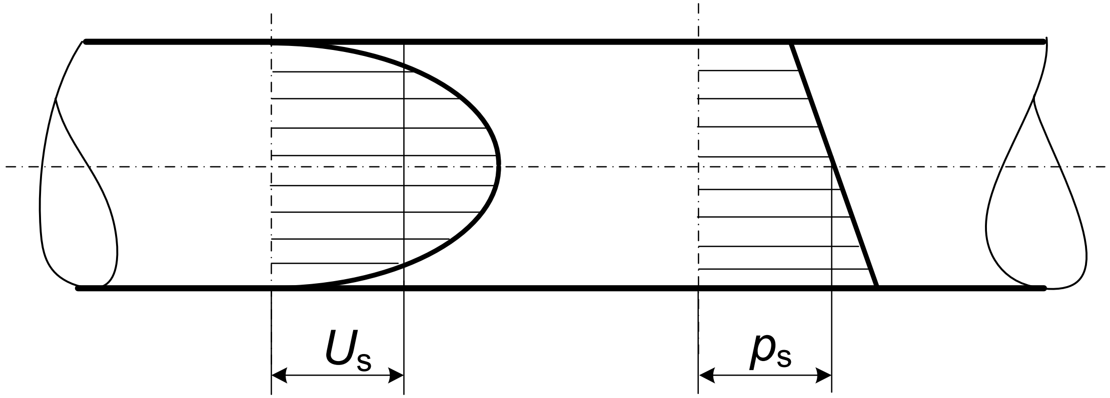
$$\rho_s \overbrace{\iint_A \vec{U} \cdot \vec{n} \, \mathrm{d}A}^{\dot{V}} = \overbrace{\iint_A \rho \vec{U} \cdot \vec{n} \, \mathrm{d}A}^{\dot{m}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\rho_s = \frac{\iint_A \rho \vec{U} \cdot \vec{n} \, \mathrm{d}A}{\iint_A \vec{U} \cdot \vec{n} \, \mathrm{d}A}}$$

- **Средњи притисак p_s у пресеку струјне цеви** је онај фиктивни **константни притисак** који **помножен са површином попречног пресека *A* струјне цеви** даје **силу притиска на попречни пресек као** и **стварна расподела притиска**:

$$p_s A = \overbrace{\iint_A p\,\mathrm{d}A}^{F} \quad \Rightarrow \quad \boxed{p_s = \frac{\iint_A p\,\mathrm{d}A}{A}}$$

- **Средња температура T_s** се добија **из конститутивне једначине.** На пример, у случају разматрања **струјања идеалног гаса,** из **једначине стања идеалног гаса**:

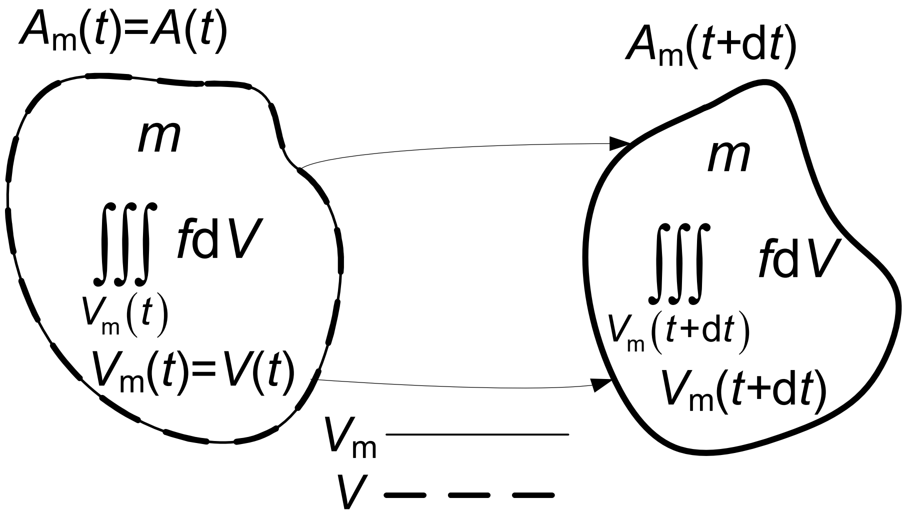
$$\boxed{T_s = \frac{p_s}{R\rho_s}}$$



4.7 Материјални извод запреминског интеграла Рејнолдсова транспортна теорема

- **Рејнолдсова транспортна теорема** (**теорема преноса**) **повезује законе механике флуида** добијене **различитим методама** – **Лагранжовом** и **Ојлеровом**.

- Дефинише **промену у времену интеграла неке величине *f*** по **материјалној запремини** $\iiint\limits_{V_m(t)} f\mathrm{d}V$.



- **Материјална запремина** у току свог кретања садржи **увек исте флуидне делиће**, па као што се промене током кретања флуидног делића дефинишу материјалним изводом, тако се и **промене интеграла** по материјалној запремини у току њеног кретања **такође дефинишу материјалним изводом**:

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\iiint\limits_{V_m(t)} f\mathrm{d}V$$

- **У основним једначинама механике флуида физичке величине које се одређују интегралом по материјалној запремини** су:
    - **маса** $m = \iiint\limits_{V_\mathrm{m}} \rho \mathrm{d}V \quad \Rightarrow \quad f = \rho$
    - **количина кретања** $\vec{K} = \iiint\limits_{V_\mathrm{m}} \rho \vec{U} \mathrm{d}V \quad \Rightarrow \quad f = \rho \vec{U}$
    - **енергија** $E = \iiint\limits_{V_\mathrm{m}} \rho \left(e + \frac{U^2}{2} \right) \mathrm{d}V \quad \Rightarrow \quad f = \rho \left(e + \frac{U^2}{2} \right)$
    - **енталпија** $H = \iiint\limits_{V_\mathrm{m}} \rho c_p T \mathrm{d}V \quad \Rightarrow \quad f = \rho c_p T$
- **Материјална запремина се мења током времена**, али **маса флуида** у њој је **увек иста**, па се према **Лајбницовом правилу диференцијал интеграла може трансформисати у интеграл диференцијала**:

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t} \iiint\limits_{V_m(t)} f \mathrm{d}V = \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t} \iiint\limits_{m\,y\,V_m(t)} \frac{f}{\rho} \overbrace{\rho \mathrm{d}V}^{\mathrm{d}m} = \iiint\limits_{m\,y\,V_m(t)} \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t} \left(\frac{f}{\rho} \mathrm{d}m \right) = \iiint\limits_{m\,y\,V_m(t)} \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t} \left(\frac{f}{\rho} \right) \mathrm{d}m = \iiint\limits_{V_m(t)} \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t} \left(\frac{f}{\rho} \right) \rho \mathrm{d}V$$

- **Интеграл се одређује за један тренутак времена**, а **у том тренутку материјална запремина се поклапа са контролном запремином**, па се **интеграл по материјалној запремини може заменити интегралом по контролној запремини**:

$$\iiint\limits_{V_m(t)} \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\left(\frac{f}{\rho}\right)\rho \mathrm{d}V = \iiint\limits_{V} \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\left(\frac{f}{\rho}\right)\rho \mathrm{d}V = \iiint\limits_{V} \left[\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{D}f}{\mathrm{D}t} + f\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\left(\frac{1}{\rho}\right)\right]\rho \mathrm{d}V =$$

$$= \iiint\limits_{V} \left(\frac{1}{\cancel{\rho}}\frac{\mathrm{D}f}{\mathrm{D}t} - \frac{f}{\rho^{\cancel{2}}}\frac{\mathrm{D}\rho}{\mathrm{D}t}\right)\cancel{\rho}\mathrm{d}V \underset{\mathrm{div}\vec{U}=\frac{1}{\mathrm{d}V}\frac{\mathrm{D}(\mathrm{d}V)}{\mathrm{D}t}=-\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{D}(\rho)}{\mathrm{D}t}}{=} \iiint\limits_{V} \left(\frac{\mathrm{D}f}{\mathrm{D}t} + f\,\mathrm{div}\vec{U}\right)\mathrm{d}V = \iiint\limits_{V} \left(\frac{\mathrm{D}f}{\mathrm{D}t} + f\nabla\cdot\vec{U}\right)\mathrm{d}V$$

- **Први облик Рејнолдсове транспортне теореме** је:

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\iiint\limits_{V_m(t)} f\mathrm{d}V = \iiint\limits_{V} \left(\frac{\mathrm{D}f}{\mathrm{D}t} + f\nabla\cdot\vec{U}\right)\mathrm{d}V$$

- Применом теореме Гаус-Остроградски, следи **други облик Рејнолдсове транспортне теореме**:

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\iiint\limits_{V_m(t)} f\mathrm{d}V = \iiint\limits_{V} \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \underbrace{\left(\vec{U}\cdot\nabla\right)f + f\,\mathrm{div}\vec{U}}_{\nabla\cdot\left(f\vec{U}\right)}\right)\mathrm{d}V = \iiint\limits_{V} \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \nabla\cdot\left(f\vec{U}\right)\right)\mathrm{d}V = \iiint\limits_{V} \frac{\partial f}{\partial t}\mathrm{d}V + \oiint\limits_{A} f\vec{U}\cdot\vec{n}\mathrm{d}A$$

- Овде је

$$\underbrace{\boxed{\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\iiint\limits_{V_m(t)} f\,\mathrm{d}V}}_{\text{Лагранж}} = \underbrace{\boxed{\underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\iiint\limits_{V} f\,\mathrm{d}V}_{\text{локална промена}} + \underbrace{\oint\!\!\!\!\oint\limits_{A} f\vec{U}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}A}_{\text{конвективна промена}}}}_{\text{Ојлер}}$$

- **Материјални извод запреминског интеграла** који произилази из **Лагранжовог приступа** (промене интеграла по материјалној запремини у току њеног кретања) **може се описати Ојлеровим приступом** тј. праћењем промена у контролној запремини.

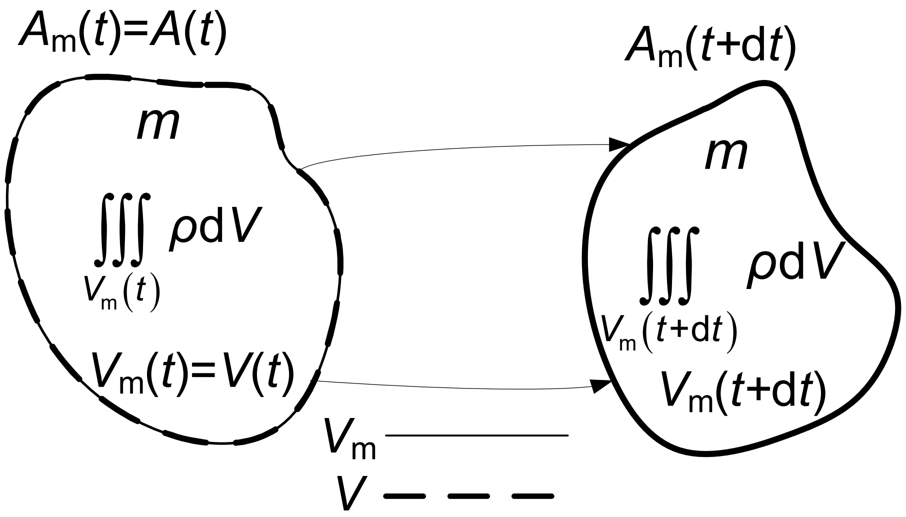
- **Локални део** $\iiint\limits_V \frac{\partial f}{\partial t}\mathrm{d}V$ представља **локалну промену величине** $\iiint\limits_V f\,\mathrm{d}V$ **у времену**, у контролној запремини *V*. Јавља се услед нестационарности величине $\iiint\limits_V f\,\mathrm{d}V$. Ако је $\iiint\limits_V \frac{\partial f}{\partial t}\mathrm{d}V = 0$, поље величине $\iiint\limits_V f\,\mathrm{d}V$ је стационарно, тј. не мења се током времена.

- **Конвективни део** представља **флукс величине** $f\vec{U}$ **кроз контролну површ *A* тренутку *t***.

4.8 Закон одржања масе - једначина континуитета

- **Лагранж**:

Материјална запремина V_m садржи **увек исте флуидне делиће**, тј. **маса материјалне запремине се не мења** током времена.



$$\boxed{\frac{D}{Dt}\int\limits_{m \text{ у } V_m} dm \overset{\text{Лајбниц}}{\overset{\downarrow}{=}} \int\limits_{m \text{ у } V_m} \frac{D}{Dt} dm = 0}$$

- Како је $dm=\rho dV$, следи

$$\iiint\limits_{V_m} \frac{D}{Dt}(\rho dV) = \iiint\limits_{V_m}\left(\frac{D\rho}{Dt}dV + \rho\frac{D(dV)}{Dt}\right) = \iiint\limits_{V_m}\left(\frac{D\rho}{Dt} + \rho\underbrace{\frac{1}{dV}\frac{D(dV)}{Dt}}_{\mathrm{div}\vec{U}}\right)dV =$$

$$= \boxed{\iiint\limits_{V_m}\left(\frac{D\rho}{Dt} + \rho\,\mathrm{div}\vec{U}\right)dV = 0}$$ **интегрални облик једначине континуитета**

- Да би неодређен интеграл увек био једнак нули, подинтегрална функција мора да буде једнака нули. Следи **диференцијални облик једначине континуитета**:

$$\boxed{\frac{\mathrm{D}\rho}{\mathrm{D}t}+\rho\,\mathrm{div}\vec{U}=0}$$

- Како је $\dfrac{\mathrm{D}\rho}{\mathrm{D}t}=\dfrac{\partial\rho}{\partial t}+\left(\vec{U}\cdot\nabla\right)\rho$, једначина континуитета може се написати и као:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\left(\vec{U}\cdot\nabla\right)\rho+\rho\,\mathrm{div}\vec{U}=0\;\Rightarrow\;\boxed{\frac{\partial\rho}{\partial t}+\mathrm{div}\left(\rho\vec{U}\right)=0}$$

- **Једначина континуитета** у **Декартовим координатама** гласи:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho w)}{\partial z}=0$$

Облици једначине континуитета за различите услове струјања

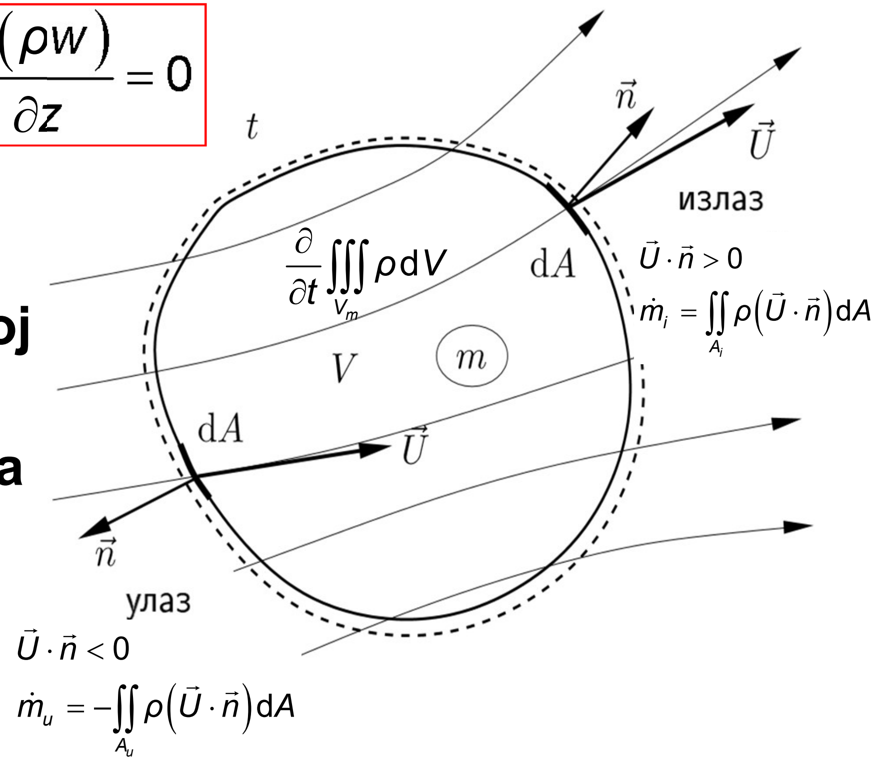
- **Нестишљиво** струјање флуида $\rho=Const. \Rightarrow \dfrac{\mathrm{D}\rho}{\mathrm{D}t}=0$

$$\boxed{\mathrm{div}\vec{U}=0 \text{ или } \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0}$$

- **Стационарно** струјање $\partial\rho / \partial t = 0$ **стишљивог** флуида $\rho \neq Const.$

$$\boxed{\mathrm{div}\left(\rho\vec{U}\right)=0 \text{ или } \frac{\partial(\rho u)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho w)}{\partial z}=0}$$

- **Ојлер**:
- **Промена масе** флуида у **контролној запремини у јединици времена** једнака је **разлици масеног протока флуида који улази и масеног протока који излази из те контролне запремине**.



$$\frac{\partial m}{\partial t} = \dot{m}_u - \dot{m}_i$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint\limits_V \rho \mathrm{d}V = -\iint\limits_{A_u} \rho \vec{U} \cdot \vec{n}\, \mathrm{d}A - \iint\limits_{A_i} \rho \vec{U} \cdot \vec{n} \mathrm{d}A$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint\limits_V \rho \mathrm{d}V = -\oint\!\!\!\oint\limits_A \rho \vec{U} \cdot \vec{n} \mathrm{d}A$$

- **Применом Рејнолдсове транспортне теореме**

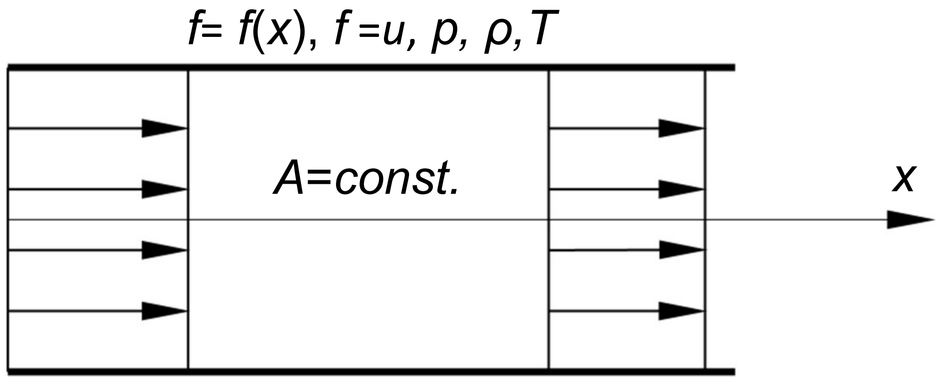
$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\iiint\limits_{V_m} f \mathrm{d}V = \iiint\limits_V \frac{\partial f}{\partial t} \mathrm{d}V + \oint\!\!\!\oint\limits_A f \vec{U} \cdot \vec{n} \mathrm{d}A$$

за *f*=*ρ*, **Лагранжов облик једначине континуитета своди се на Ојлеров облик**:

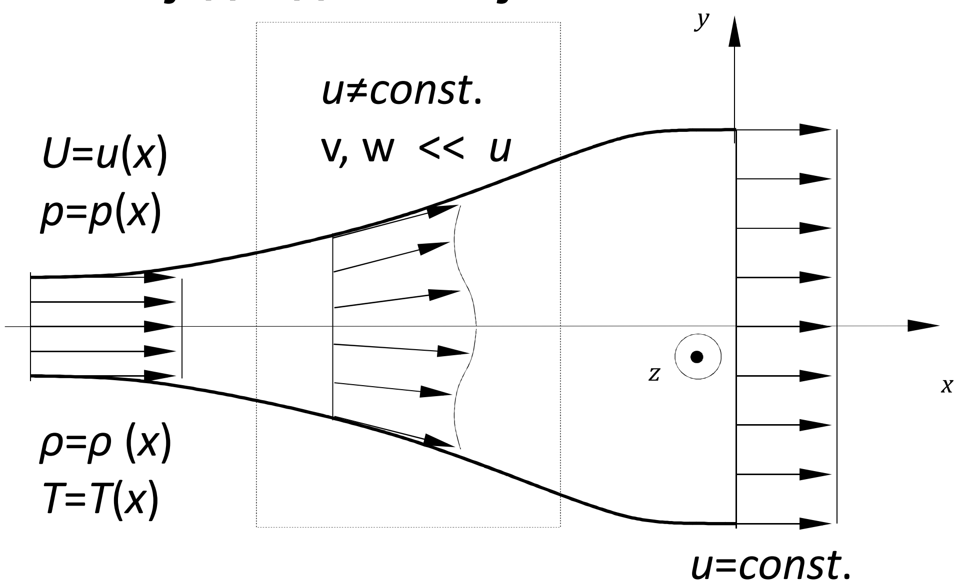
$$\boxed{\underbrace{\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\iiint\limits_{V_m} \rho \mathrm{d}V}_{\text{Лагранж}} = \underbrace{\iiint\limits_V \frac{\partial \rho}{\partial t} \mathrm{d}V + \oint\!\!\!\oint\limits_A \rho \vec{U} \cdot \vec{n}\, \mathrm{d}A}_{\text{Ојлер}} = 0}$$

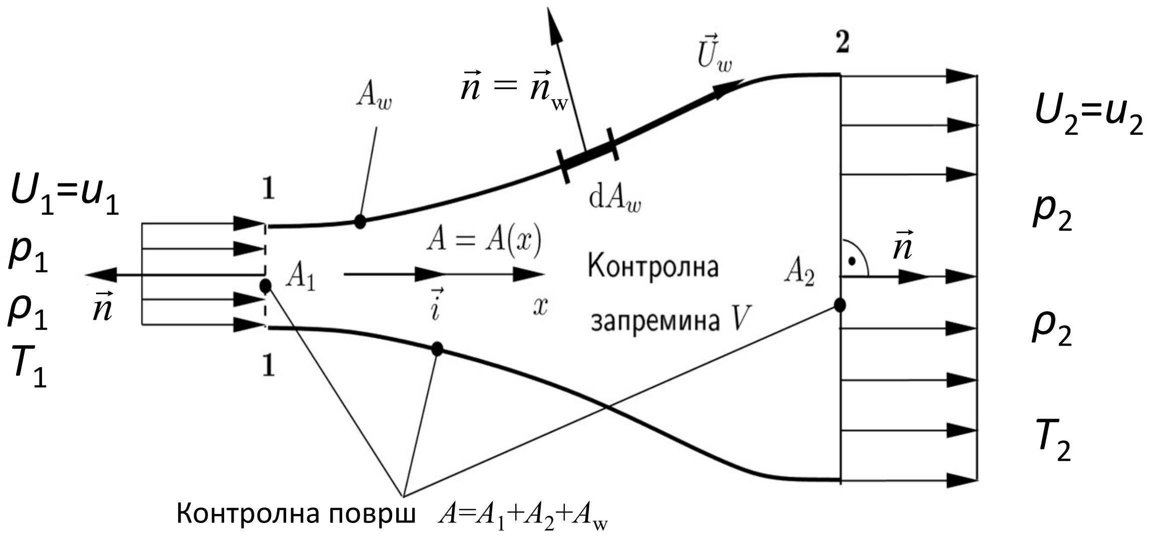
Примена једначине континуитета на једнодимензијски модел струјања

- **Једнодимензијско струјање** је струјање флуида **кроз канал или цев константног попречног пресека *A=const***, где постоји **само једна пројекција брзине**, која се као и све остале величине које описују струјно поље (p, ρ, T) **не мења по попречном пресеку**, тј. **зависи само од подужне праволинијске или криволинијске координате $f=f(x)$**.
  - Пример је **невискозно струјање кроз цев константног попречног пресека**.



- **Струјање кроз канале** и **цеви** је у општем случају **вишедимензијско**, јер се **не могу занемарити промене физичких величина по попречном пресеку**. Ако **цев** има **променљив попречни пресек**, биће присутне и **све три пројекције брзине** које **зависе од све три просторне координате**. Међутим, ако је **могуће изабрати пресек цеви** у коме је **брзина управна** на њега, **увођењем средње вредности брзине** и **свих осталих физичких величина (*p,T, ρ*)**, за струјање флуида у њему је **могуће применити једнодимензијски модел**. Каже се да струјање тада има **једнодимензијски карактер или да је квазиједнодимензијско**.





- Применом **интегралног Ојлеровог облика једначине континуитета** на **издвојену контролну запремину струјне цеви**, **ограничену контролном површи A=A_1+A_2+A_w**, за **стационарно струјање** добија се:

$$\oiint_A \rho \vec{U} \cdot \vec{n} \, \mathrm{d}A = 0$$

- **Интеграл по затвореној контролној површи A** једнак је **збиру површинских интеграла** по површи **улазног попречног пресека A_1**, **излазног попречног пресека A_2** и **омотача струјне цеви A_w**.

$$\iint_{A_1} \rho \vec{U} \cdot \vec{n} \, \mathrm{d}A + \iint_{A_2} \rho \vec{U} \cdot \vec{n} \, \mathrm{d}A + \iint_{A_w} \rho \vec{U} \cdot \vec{n} \, \mathrm{d}A = 0$$

- **Брзина струјања је управна** на **површи улазног (A_1) и излазног (A_2) попречног пресека** (брзина је колинеарна са јединичним вектором спољашње нормале ових површи):

$$\sphericalangle\left(\vec{U}_1,\vec{n}_1\right)=\pi,\ \sphericalangle\left(\vec{U}_2,\vec{n}_2\right)=0$$

- **Брзина струјања је у правцу тангенте на површ омотача струјне цеви A_w**:

$$\sphericalangle\left(\vec{U}_w,\vec{n}_w\right)=\pi/2$$

- С обзиром на угао између вектора брзине струјања и орта површи по којима се одређује интеграл, следи:

$$\iint_{A_1}\rho\vec{U}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}A=-\rho_1U_1A_1,\quad \iint_{A_2}\rho\vec{U}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}A=\rho_2U_2A_2,\quad \iint_{A_w}\rho\vec{U}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}A=0$$

- **Једначина континуитета за једнодимензијски модел струјања** своди се на **алгебарску једначину**:

$$\boxed{\rho_1U_1A_1=\rho_2U_2A_2}$$

Овде су U_1 и U_2 у случају:

- **невискозног струјања - брзине флуида у улазном и излазном попречном пресеку**;
- **вискозног струјања - средње брзине флуида у улазном и излазном попречном пресеку**.
- Ако је **струјање флуида нестишљиво (ρ_1=ρ_2=ρ=*const*.)**:

$$\boxed{U_1A_1 = U_2A_2}$$

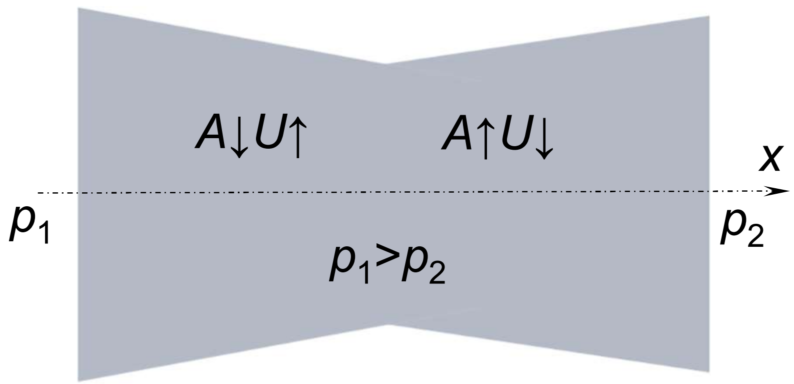
- Избором било ког попречног пресека струјне цеви у ком је задовољен услов да је вектор брзине струјања управан на њега, следи да се једначина континуитета може написати као ρUA =*const*., а у случају нестишљивог флуида (ρ=*const*.) UA=*const.*
- У случају када **струјање** у попречном пресеку **има једнодимензијски карактер**, величина **ρUA је масени проток**, а ***UA* запремински проток** кроз тај попречни пресек, па следи:

$$\boxed{\dot{m} = \rho UA = const,} \quad \rho = const. \quad \Rightarrow \boxed{\dot{V} = UA = const.}$$

- **Једнодимензијски модел једначине континуитета** може се применити **и ако у попречном пресеку струјне цеви није задовољено да је брзина у свим тачкама управна на њега** (проширење или сужење цеви), тј. када вектор брзине нема само једну компоненту $\left(\vec{U} = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k}\right)$. За компоненту брзине у правцу струјања, једначина континуитета и даље важи:

$$\boxed{\dot{m} = \rho u A = const,} \quad \rho = const. \quad \Rightarrow \boxed{\dot{V} = uA = const.}$$

- Шта се може закључити из **једначине континуитета за једнодимензијски модел струјања**?
  - **Флуид струји кроз цев промењљивог попречног пресека**
    - Ако је струјање флуида **нестишљиво (ρ=*const.*)**, осим **масеног** и **запремински проток флуида у свим попречним пресецима је исти** $\dot{V} = uA = const$. Тада **пораст површине попречног пресека** доводи до **пада брзине** $(A\uparrow U\downarrow)$ и **обрнуто** $(A\downarrow U\uparrow)$, као што је приказано на слици.
    - **Масени проток** је **константан** и у случају **стишљивог струјања**, али се због **промене густине не зна да ли брзина расте или опада са променом попречног пресека**.



- **Флуид струји кроз цев константног попречног пресека**
- **Масени проток флуида у свим попречним пресецима је исти па важи**:

$$\rho U A = const.$$

  - Ако је **струјање** флуида **нестишљиво брзина и густина се не мењају дуж цеви**.
  - Ако је **струјање** флуида **стишљиво** ($\rho \neq const.$) **масени проток флуида у свим попречним пресецима је исти**, а **пад густине** дуж канала **доводи до пораста брзине** ($\rho\downarrow$ $U\uparrow$) и **обрнуто** ($\rho\uparrow$ $U\downarrow$).