4 Кинематика флуида
4.1 Методе за опис струјног поља. Врсте струјања

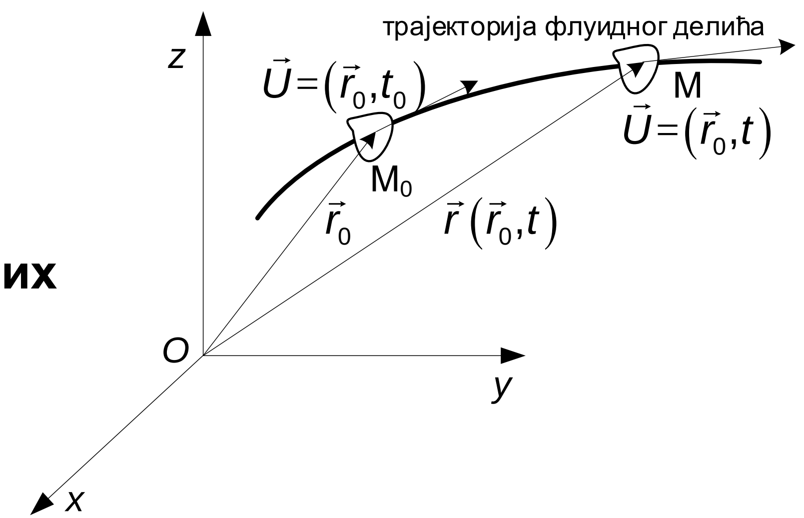
- **Кинематика флуида** се бави **струјањем флуида без анализе сила које изазивају струјање**.
- Када се на основу адекватног **система једначина** реши неки проблем добија се као резултат **поље брзине** на основу кога је могуће **графички приказати струјно поље**.
- Тако добијен **теоријски резултат** могуће је даље проверити **експериментом** у коме се одређеним методама може **визуализовати струјно поље**.
- Постоје два приступа (методе) за прорачун струјног поља:
  - Лагранжов и
  - Ојлеров.
- У том смислу дефинисаће се појам **трајекторије** који произилази из **Лагранжове методе** описа струјног поља, као и појам **струјнице** који је повезан са **Ојлеровим приступом**.

Лагранжова метода

- **Лагранжова метода** подразумева **праћење флуидног делића**, као и свих величина које се односе на тај флуидни делић при његовом кретању.
- Дефинисати струјно поље Лагранжовом методом значи познавати кретање свих флуидних делића и њихових величина у току времена.
- **Вектор положаја флуидног делића** $\vec{r}(t)$ у сваком тренутку одређује његов положај у струјном пољу и може се изразити помоћу пројекција на осе Декартовог правоуглог координатног система:

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

- **Трајекторија** или **путања флуидног делића** је **ходограф вектора положаја флуидног делића** од почетног тренутка t_0 до неког произвољног тренутка времена t.
- **Трајекторија флуидног делића** се може дефинисати као **низ узастопних положаја центра масе тог делића** током његовог кретања.



- **Брзина флуидног делића** једнака је **изводу вектора положаја флуидног делића по времену**:

$$\vec{U}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}.$$

- **Диференцијалне једначине** које одређују **трајекторију** су:

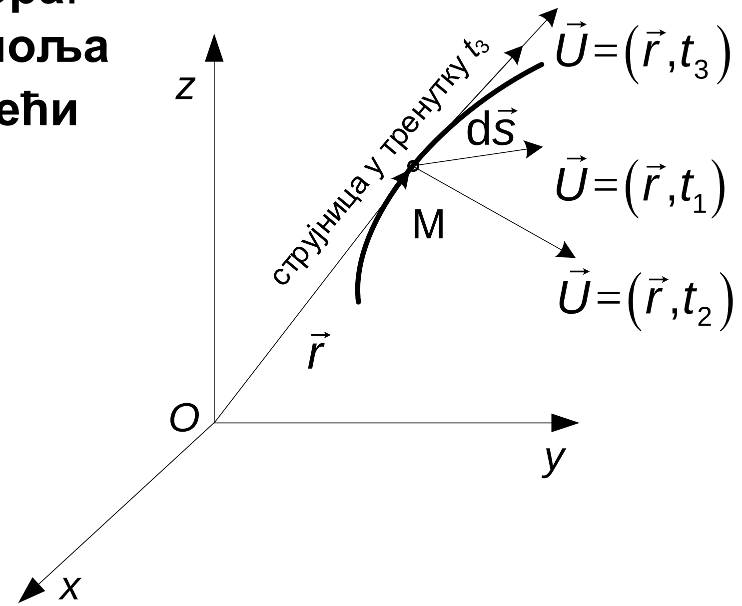
$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = u(x,y,z,t), \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = v(x,y,z,t), \quad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = w(x,y,z,t).$$

- **Интеграцијом диференцијалних једначина** при **познатом пољу брзине** уз **познате почетне услове t_0, x_0, y_0** и **z_0** добијају се **параметарске једначине линије путање** (време t је параметар). **Елиминацијом параметра t** добија се **једначина линије путање**.
- **Трајекторија флуидног делића** је **део** или **цела линија путање по којој се креће флуидни делић**.
- **Недостатак** овог приступа је што треба дефинисати **једначине кретања** за **бескрајно много флуидних делића** у струјном пољу.
- Како **вектор положаја неког флуидног делића зависи од времена** јер одређује његов тренутни положај, његове **пројекције x, y** и **z** такође **зависе од времена**, па ***нису*** **Ојлерове координате** (четири независне временско-просторне координате x, y, z и t су Ојлерове координате).
- Да ли трајекторија флуидног делића може сећи саму себе?

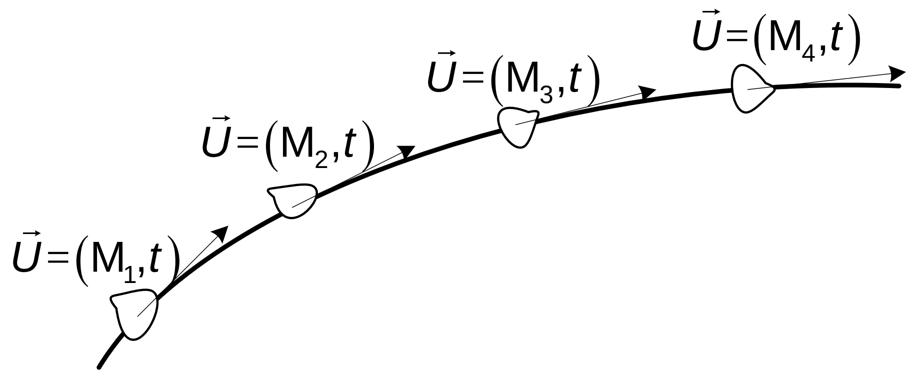
Ојлерова метода

- **Ојлерова метода** подразумева посматрање **промена физичких величина** у **свим тачкама струјног простора**.
- Током времена **кроз једну тачку струјног поља пролазе различити флуидни делићи носећи са собом своје физичке величине**.
- **Брзина у посматраној тачки** је:

$$\vec{U} = \vec{U}\left(\vec{r}, t\right)$$



- **Струјнице су векторске линије поља брзине**.
- **У одређеном тренутку струјницу формирају различити флуидни делићи** чија је **брзина тангента на ту линију**.
- **Флуидни делићи** који чине **струјницу крећу се** у посматраном тренутку времена **у правцу тангенте** на њу.



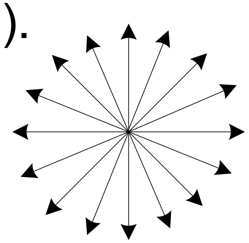
- Ако је $\mathrm{d}\vec{l} = \mathrm{d}x\,\vec{i} + \mathrm{d}y\,\vec{j} + \mathrm{d}z\,\vec{k}$ усмерени елемент струјнице, из услова $\vec{U} \parallel \mathrm{d}\vec{l}$ следи једначина струјнице:

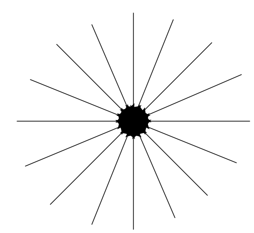
$$\vec{U} \times \mathrm{d}\vec{l} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u & v & w \\ \mathrm{d}x & \mathrm{d}y & \mathrm{d}z \end{vmatrix} = \left(v\,\mathrm{d}z - w\,\mathrm{d}y\right)\vec{i} - \left(u\,\mathrm{d}z - w\,\mathrm{d}x\right)\vec{j} + \left(u\,\mathrm{d}y - v\,\mathrm{d}x\right)\vec{k} = 0 \quad \Rightarrow$$

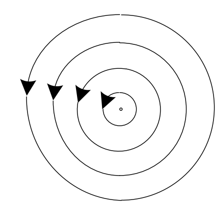
$$\boxed{\frac{\mathrm{d}x}{u(x,y,z,t)} = \frac{\mathrm{d}y}{v(x,y,z,t)} = \frac{\mathrm{d}z}{w(x,y,z,t)}}$$

- У претходној једначини ***x*, *y* и *z* су Ојлерове координате**.
- **Струјнице** се **не секу** у општем случају, јер би то значило да флуидни делић који се налази у датом тренутку у пресечној тачки има две различите брзине или да се у једној тачки у једном тренутку времена налазе два флуидна делића (различитих брзина).
- Изузеци:
  - извор
  - понор

  ∞ струјница

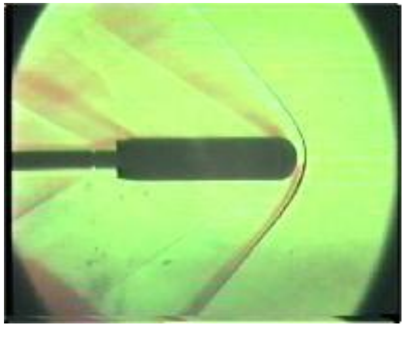


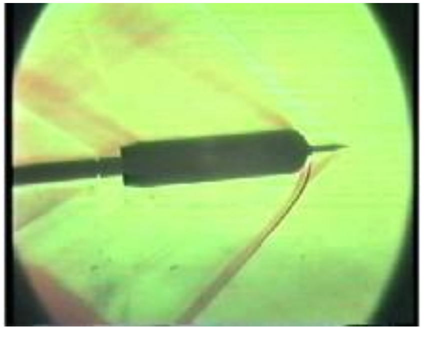




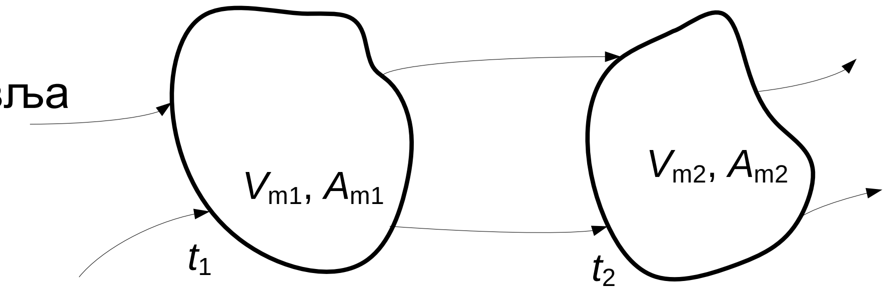
- Осамљени вртлог - ниједна струјница.
- При **стационарном струјању струјнице и трајекторије се поклапају**.

- **Визуализацијом струјног поља** при експерименту омогућава се **квалитативна** и **квантитативна анализа резултата**.
- **Визуализација струјног поља** омогућава да се **трајекторије појединих флуидних делића** или **струјнице у појединим тренуцима времена** учине **видљивим**. Може се постићи на разне начине, на пример:
    - **убацивањем опиљака неког метала** (на пример Al због мале густине и доброг рефлектовања светлости) чији се делићи крећу са делићима течности;
    - **континуалним убризгавањем обојене течности** у струјно поље течности и **дима** у струјно поље гаса.
- При **експерименталним испитивањима** у **ваздушним тунелима** доминирају **оптичке методе визуализације**. Неке од њих су: **метода сенке**, **шлирен метода**, **ласер-доплер анемометрија**, **интерферометрија**...

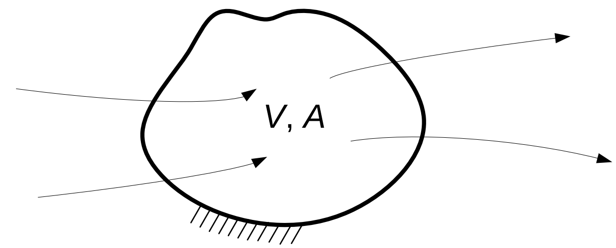




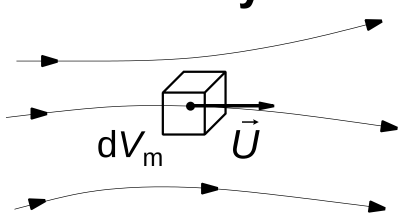
- Из **Лагранжове методе** произилази појам **материјалне запремине V_{m}** која представља издвојену запремину флуида која у себи садржи **увек исте флуидне делиће**, а ограничена је **материјалном површи A_{m}**.

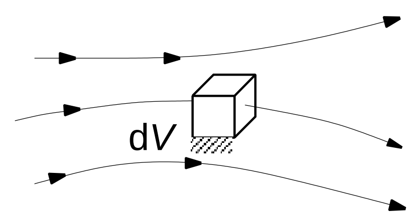


- Из **Ојлерове методе** произилази појам **контролне запремине** која представља **фиксну запремину V (геометријски појам)** ограничену **фиксном површи A**.

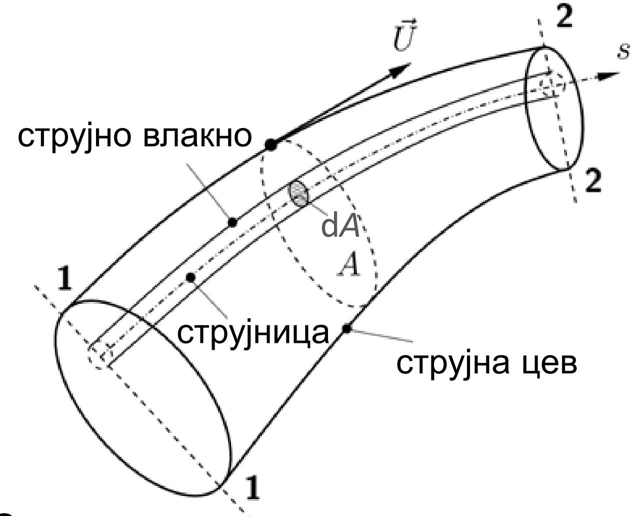


- Приликом **извођења основних једначина механике флуида** користе се **појмови материјалне V_{m}** и **контролне запремине V**.
- Њихове **инфитезималне вредности dV_{m}** (**запремина флуидног делића**) и **dV** (**фиксна инфинитезимална запремина кроз коју протиче флуид**) користе се приликом **извођења основних једначина механике флуида у диференцијалном облику**.





- **Површ коју у неком тренутку образују струјнице повучене кроз тачке замишљене криве *l*** струјног простора назива се **струјна површ** (**флуид кроз њу не протиче**).



- Када је **крива *l* затворена**, **струјна површ представља омотач струјне цеви**.
- **Струјна цев** је **део струјног простора ограничен омотачем струјне цеви**.
- **Струјна цев инфинитезимално малог попречног пресека d*A*** је **струјно влакно**.
- Због инфинитезимално мале површине попречног пресека d*A* **све физичке величине се сматрају константним по d*A*** и **мењају само дуж струјног влакна.**
- Струјање **унутар струјног влакна** се зато може сматрати **једнодимензијским (1Д)**, јер иако је правац струјног влакна просторни (3Д) постији само једна пројекција брзине (дуж струјног влакна).
- Само је **струјање дуж струјнице једнодимензијско**.
- За **струјно влакно**, тј. за 1Д модел, **основне једначине** могу се свести на **алгебарски облик**, али је суштински недостатак у општем случају непознавање положаја и облика струјног влакна.

Врсте струјања

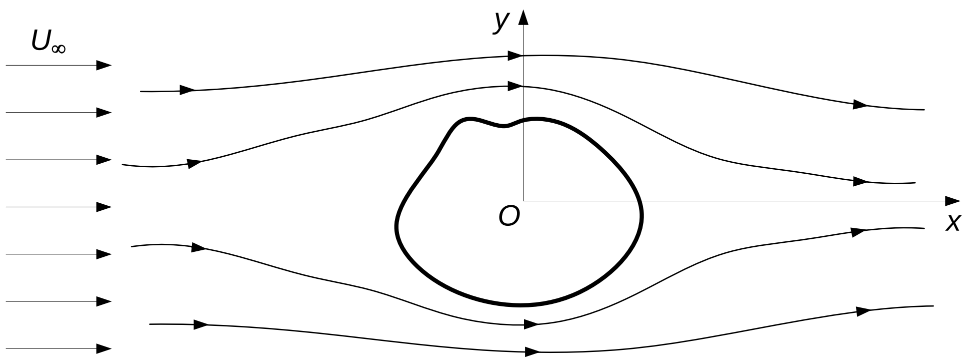
- Струјања је могуће класификовати према различитрим критеријумима. Један од њих је подела **према броју координата** којима се описују.
- У општем случају физичке величине зависе од **све четири независне** временско-просторне (**Ојлерове**) координате $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{z}$ и $\boldsymbol{t}$, $\boldsymbol{f=f\,(x, y, z, t)}$.
- Зависно од тога да ли се физичке величине мењају са временом или не, струјања могу бити **нестационарна** и **стационарна**.
  - **Нестационарна** су када се **величине f_i мењају у току времена**, $\boldsymbol{\partial f_i / \partial t \neq 0}$. Некад је могуће погодним **избором координатног система свести нестационаран проблем на стационаран** и тако га решавати на једноставнији начин.
    - На пример, за посматрача на обали брод који се креће константном брзином изазива у води нестационарно струјање, док је то исто струјање стационарно за посматрача (инерцијални систем везан за брод) који се налази на броду. Према *Галилејевом принципу* сви закони механике важе у инерцијалним системима у истом облику као и у системима који апсолутно мирују.
  - **Стационарна** су ако **нема промене величина f_i по времену,** $\boldsymbol{\partial f_i / \partial t = 0}$, па су **довољне три просторне координате**, $\boldsymbol{f=f\,(x, y, z)}$.

- **Према броју просторних координата струјања могу бити тродимензијска, дводимензијска и једнодимензијска**.
  - **Тродимензијска струјања** (**3Д**) су струјања у којима брзина флуида има све **три компоненте брзине**, а све величине зависе од **три просторне координате**.
  - **Дводимензијска струјања** (**2Д**) су струјања у којима брзина флуида има две компоненте брзине, а све величине зависе само од **две просторне координате**.
- У **дводимензијска струјања** спадају **раванско** и **осносиметрично струјање**.

Раванско струјање

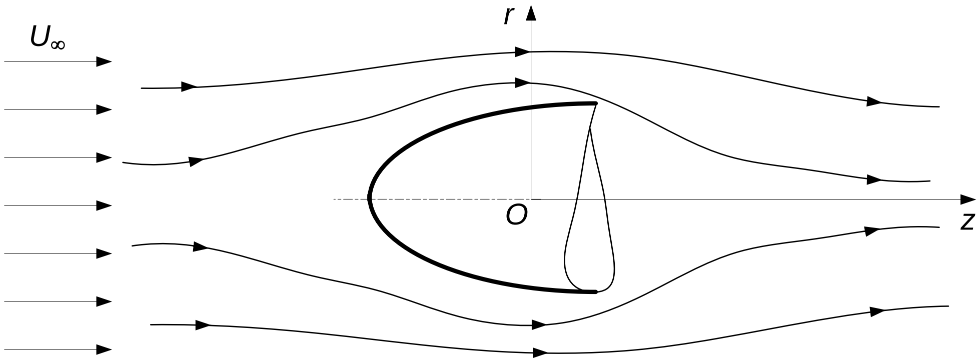
- **Бесконачно дуг цилиндар опструјава се у правцу управном на правац изводнице** (слика).
  - **Струјна слика** је **идентична** у свим равнима ***z=const***.
  - Постоје само **две компоненте брзине** (***u*** и ***v***) које **зависе** само **од *x***, ***y*** и ***t*** координате при **нестационарном** или само од ***x*** и ***y*** координате при **стационарном струјању**.

$\boxed{w=0 \text{ и } \partial f_i / \partial z = 0}$



- **Примери раванског струјања**
  - **опструјавање** авионског крила (спољашње струјање);
  - **струјање** у каналу правоугаоног попречног пресека.

Осносиметрично струјање



- **Обртно тело се опструјава у правцу осе симетрије** (слика).
  - **Струјна слика** је **идентична** у свим **меридијанским равнима** θ=*const*.
  - Постоје само **две компоненте брзине** (v_r и v_z) које зависе само од **z**, ***r*** и ***t*** координате при **нестационарном** или само од **z** и ***r*** координате при **стационарном струјању**.

$$\boxed{v_\theta = 0 \text{ и } \partial f_i / \partial \theta = 0}$$

- **Примери осносиметричног струјања**
  - лет ракета и пројектила (**спољашње** струјање);
  - струјање у цевима кружног попречног пресека (**унутрашње струјање**).

- **Једнодимензијска струјања** (**1Д**) су струјања у којима брзина флуида има само једну компоненту, а све величине зависе само од **једне координате**.
  - **Модел једнодимензијског струјања** примењује се за **прорачун струјања у цевоводима**. При струјању флуида кроз цев брзина се мења дуж цеви, али и у попречном пресеку. **Проблем се своди на једнодимензијски увођењем средњих вредности** како **брзине**, тако и **свих осталих величина**.

- Према **врсти** или **режиму струјања** разликују се **ламинарно** и **турбулентно струјање**.

Ламинарно струјање

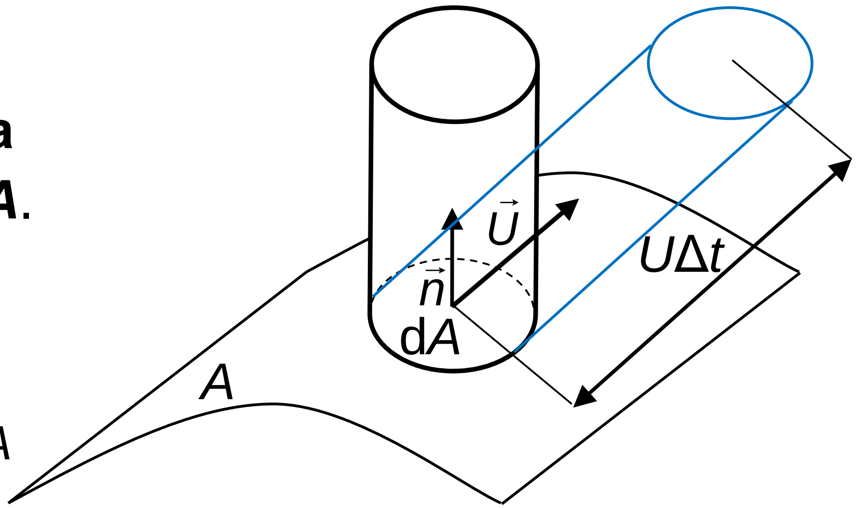
- **Ламинарно струјање** (од латинске речи *lamina*-слој) се одликује особином да се **устаљује током времена** и **постаје стационарно ако су за то испуњени неки неопходни услови. На пример, у цевима ако је** $\Delta p = const$.
- Ако би се **притисци** у појединим пресецима цеви **мењали током времена**, **резултујуће ламинарно струјање** било би **нестационарно**.
- **Флуидни делићи „глатко“ прилагођавају своје путање облику струјног простора, тако** да су оне приближно паралелне границама струјног простора, а и међусобно.
- **Ламинаран** значи **слојевит**.
  - Пример: Када је **славина одврнута за мали угао струјање воде** одговара **ламинарном**. **Мала** је **брзина истицања** воде. **Граница млаза** изгледа као да је **непокретна** (тешко се примећује ма какво кретање млаза). Због **дејства силе теже попречни пресек млаза се благо сужава наниже**, а **струјнице** су **благо конвергентне**. **Путање флуидних делића приближно** су **паралелне границама струјног простора**, а такође **и међусобно**.

Турбулентно струјање

- **Турбулентно струјање** (од латинске речи *turbo*-вртлог) је изразито **нестационарно,** (и при $\Delta p=const.$) **сложено** струјање које има **хаотичан карактер**.
- **Мерења показују** да поједине **физичке величине у некој тачки турбулентног струјног поља** на веома **нерегуларан начин осцилују**, са релативно **великим амплитудама** и **високим учестаностима**, око неких **временски средњих вредности** које се називају **просечним вредностима**.
- Ове **осцилације** се називају **флуктуацијама**.
- Мерења показују да су **ламинарна струјања** по правилу **одржива при релативно малим брзинама струјања**, а да **са повећањем брзине ламинарно струјање постаје нестабилно, па долази до преласка у турбулентно струјање**. **Разлог** за прелазак је **нестабилност ламинарног струјања**.
- Проблемима **преласка из ламинарног режима струјања у турбулентни** бави се део механике флуида који се назива **хидродинамичка теорија стабилности**.
  - Пример: Када се славина отвара све више, **карактер струјања** прелази **из ламинарног у турбулентни**. **Млаз** почиње да се **лелуја**, па **интензивно таласа**, а **флуидни делићи упоредо са кретањем у главном правцу врше и секундарно (попречно) премештање**.

4.2 Запремински и масени проток

- Дефиниција: **Запремински проток флуида** $\dot{V}$ представља **запремину флуида** V која у **јединици времена протекне кроз контролну површ** A.



- **Запремина флуида** која за време Δt прође кроз елементарну површ dA је:

$$\mathrm{d}V = \left(\vec{U}\Delta t\right)\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}A = \left(\vec{U}\cdot\vec{n}\right)\Delta t\,\mathrm{d}A = \vec{U}\cdot\vec{n}\Delta t\,\mathrm{d}A$$

- **Запремина флуида** која за време Δt прође кроз површ A је:

$$\Delta V = \iint_A \vec{U}\cdot\vec{n}\Delta t\,\mathrm{d}A \;= \Delta t\iint_A \vec{U}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}A$$

- **Запремински проток флуида** кроз површ A је према дефиницији:

$$\boxed{\dot{V} \overset{def}{=} \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta V}{\Delta t} = \iint_A \vec{U}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}A}$$

- **Запремински проток је флукс брзине кроз површ** A**.**

- Дефиниција: **Масени проток флуида** $\dot{m}$ представља масу флуида m која у **јединици времена протекне кроз контролну површ A**.

$$\dot{m} \stackrel{def}{=} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta t} = \iint_A \rho \vec{U} \cdot \vec{n}\, \mathrm{d}A$$

- Запремински и масени проток кроз **затворену површ** су:

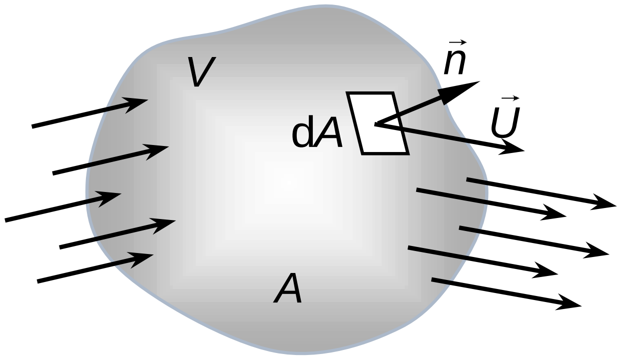
$$\dot{V} = \oiint_A \vec{U} \cdot \vec{n}\, \mathrm{d}A = \oiint_A \left(u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k}\right) \cdot \left(n_x\vec{i} + n_y\vec{j} + n_z\vec{k}\right) \mathrm{d}A =$$

$$= \oiint_A \left(un_x + vn_y + wn_z\right) \mathrm{d}A \overset{\text{Гаус-Остроградски}}{\overset{\uparrow}{=}} \iiint_V \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) \mathrm{d}V = \iiint_V \mathrm{div}\vec{U}\, \mathrm{d}V$$

$$\dot{m} = \iiint_V \mathrm{div}\left(\rho \vec{U}\right) \mathrm{d}V$$

- **Проток нестишљивог флуида** (ρ=*const.*) **кроз затворену површ једнак је нули.**

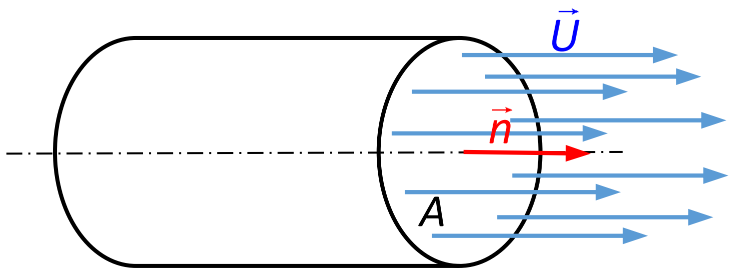
$$\rho=const, \quad \text{ј.к:} \quad \mathrm{div}\vec{U}=0 \Rightarrow \dot{V}=0, \dot{m}=0$$



- Ако је **брзина управна на површ кроз коју се одређује проток** ($\vec{U} \parallel \vec{n}$) **масени** и **запремински** проток су:

$$\dot{V}=\iint_A U \mathrm{d}A$$

$$\dot{m}=\iint_A \rho U \mathrm{d}A$$

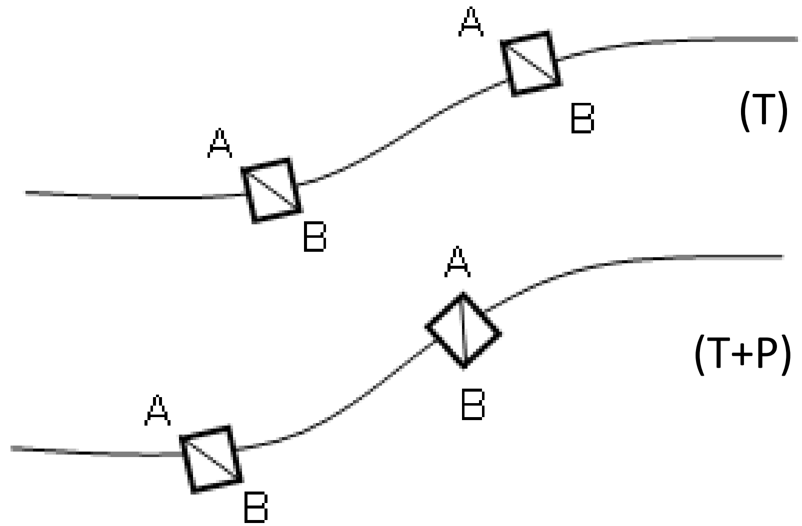


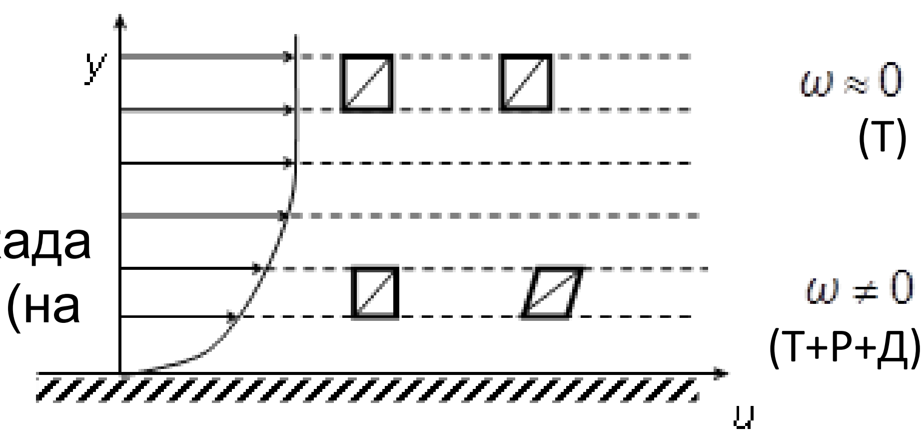
4.3 Поље брзине у флуиду

- **Транслаторно кретање** је кретање при ком свака дуж остаје паралелна самој себи.

- **Кретање крутог тела** у општем случају подразумева **транслацију** и **ротацију**.

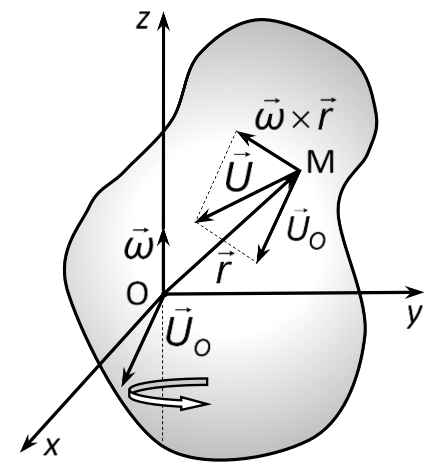
- При **кретању флуида** у општем случају јавља се **транслација**, **ротација** и **деформација флуидних делића**. **Ротација** и **деформација** се јављају само када је **поље брзине неуниформно** (на пример у граничном слоју).





4.3.1 Поље брзине унутар крутог тела

- Кинематичке карактеристике крутог тела као целине при његовом општем кретању су:
  - **транслаторна брзина** $\vec{U}_0$, која је једнака брзини произвољно изабране тачке O за пол,
  - **тренутна угаона брзина тела** $\vec{\omega}$ и
  - **тренутно угаоно убрзање** тела $\vec{\varepsilon}$.



- Брзина произвољне тачке M крутог тела је:

$$\vec{U} = \vec{U}_O + \vec{\omega}\times\vec{r}$$

Када се обе стране претходне једначине векторски помноже вектором и диференцијалним оператором ∇ добија се

$$\nabla\times\vec{U} = \cancel{\nabla\times\vec{U}_O} + \nabla\times\vec{\omega}\times\vec{r}$$

Како је дупли векторски производ по дефиницији
$\vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right) = (\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b} - \left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)\vec{c}$ када је први вектор ∇ следи:

$$\nabla\times\left(\vec{\omega}\times\vec{r}\right) = \underbrace{\left(\nabla\cdot\vec{r}\right)}_{\frac{\partial x}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial z}=3}\vec{\omega} + \cancel{\left(\vec{r}\cdot\nabla\right)\vec{\omega}} - \cancel{\left(\nabla\cdot\vec{\omega}\right)\vec{r}} - \underbrace{\left(\vec{\omega}\cdot\nabla\right)\vec{r}}_{\vec{\omega}} = 2\vec{\omega} \quad\Rightarrow\quad \boxed{\vec{\omega} = \frac{\mathrm{rot}\vec{U}}{2}}$$

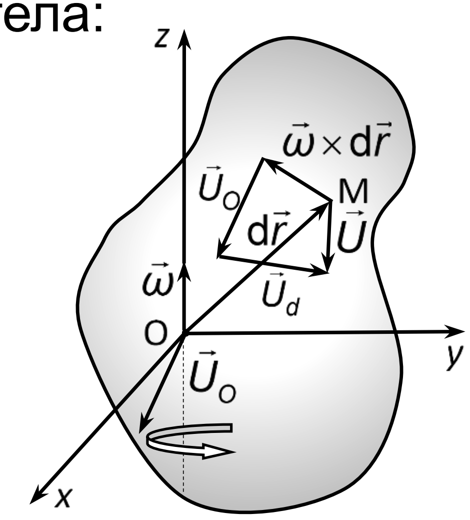
4.3.2 Брзина флуидног делића

- **Опште кретање флуидног делића** може се разложити на **транслаторно**, **ротационо** и **деформационо**.
- Тако се **брзина флуидног делића** дефинише као:

$$\boxed{\vec{U} = \underbrace{\vec{U}_O}_{\text{Т}} + \overbrace{\underbrace{\vec{\omega}\times \mathrm{d}\vec{r}}_{\text{Р}} + \underbrace{\vec{U}_d}_{\text{Д}}}^{\mathrm{d}\vec{U}}}$$

- Угаона брзина флуидног делића којом флуидни делић ротира око сопствене осе дефинише се као код крутог тела:

$$\vec{\omega} = \frac{\mathrm{rot}\vec{U}}{2}$$



- **Угаона брзина** $\vec{\omega}$ зове се **вртложност флуидног делића.**
- **Циљ** је **одредити брзину деформисања**:

$$\vec{U}_d = \mathrm{d}\vec{U} - \vec{\omega}\times \mathrm{d}\vec{r}$$

$$d\vec{U} = du\vec{i} + dv\vec{j} + dw\vec{k} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz\right)\vec{i} +$$

$$+\left(\frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy + \frac{\partial v}{\partial z}dz\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial w}{\partial x}dx + \frac{\partial w}{\partial y}dy + \frac{\partial w}{\partial z}dz\right)\vec{k}$$

$$\vec{\omega} = \frac{\mathrm{rot}\vec{U}}{2} = \frac{\nabla\times\vec{U}}{2} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u & v & w \end{vmatrix} = \underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right)}_{\omega_x}\vec{i} + \underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right)}_{\omega_y}\vec{j} + \underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)}_{\omega_z}\vec{k}$$

$$\vec{\omega}\times d\vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ dx & dy & dz \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) \\ dx & dy & dz \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right)dz +\right.$$

$$\left.+\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right)dy\right]\vec{i} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)dx + \left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y}\right)dz\right]\vec{j} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right)dy + \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z}\right)dx\right]\vec{k}$$

- **Брзина деформисања је коначно**:

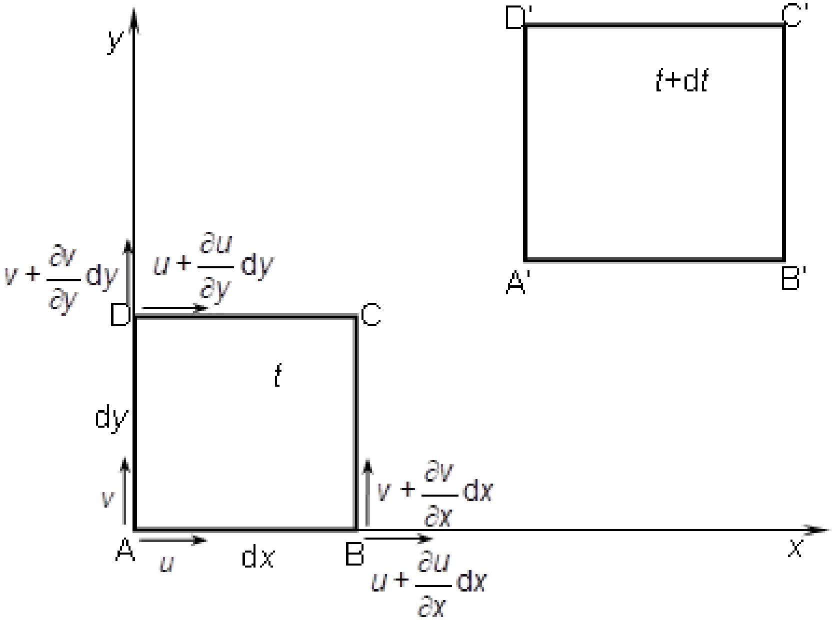
$$\vec{U}_d = \mathrm{d}\vec{U} - \vec{\omega}\times \mathrm{d}\vec{r} = \left[\boxed{\frac{\partial u}{\partial x}}\mathrm{d}x + \boxed{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)}\mathrm{d}y + \boxed{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)}\mathrm{d}z\right]\vec{i} +$$
$$+\left[\boxed{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)}\mathrm{d}x + \boxed{\frac{\partial v}{\partial y}}\mathrm{d}y + \boxed{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right)}\mathrm{d}z\right]\vec{j} +$$
$$+\left[\boxed{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\right)}\mathrm{d}x + \boxed{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\right)}\mathrm{d}y + \boxed{\frac{\partial w}{\partial z}}\mathrm{d}z\right]\vec{k}$$

- **Брзина деформисања дефинише се помоћу тензора брзине деформисања** (чији су елементи заокружени):

$$\tilde{S} = \begin{vmatrix} S_{xx} & S_{xy} & S_{xz} \\ S_{yx} & S_{yy} & S_{yz} \\ S_{zx} & S_{zy} & S_{zz} \end{vmatrix}$$

- **Тензор брзине деформисања је симетричан тензор**.
- **Помоћу тензора брзине деформисања дефинише се напонско стање у флуиду.**

Физички смисао компонената на дијагонали тензора брзине деформисања



$$S_{xx}=\frac{\partial u}{\partial x},\ S_{yy}=\frac{\partial v}{\partial y},\ S_{zz}=\frac{\partial w}{\partial z}$$

- **Компоненте S_{xx}, S_{yy} и S_{zz} су одговорне за промену запремине флуидног делића**.
- Доказ: Посматра се **промена пресека флуидног делића облика квадра у равни *xy* за време d*t*.**
- Претпоставља се да је $\partial u/\partial y=0$ и $\partial v/\partial x=0$, тј. да флуидни делић не мења облик.
- Долази само до издужења или скраћења његових страница.

- У тренутку *t* дужина његових страница је:

$$\overline{\mathrm{AB}}=\mathrm{d}x,\quad \overline{\mathrm{AD}}=\mathrm{d}y$$

- У тренутку *t*+d*t* услед различитих брзина тачака A и B, као и тачака A и D мењају се дужине страница:

$$\overline{\mathrm{A'B'}}=\mathrm{d}x+\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}t,\quad \overline{\mathrm{A'D'}}=\mathrm{d}y+\frac{\partial v}{\partial y}\mathrm{d}y\mathrm{d}t$$

- **Релативна промена дужине страница AB** и **AD** за време d*t* je:

$$\frac{\mathrm{d}\overline{\mathrm{AB}}}{\overline{\mathrm{AB}}}=\frac{\overline{\mathrm{A'B'}}-\overline{\mathrm{AB}}}{\overline{\mathrm{AB}}}=\frac{\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}t,\quad \frac{\mathrm{d}\overline{\mathrm{AD}}}{\overline{\mathrm{AD}}}=\frac{\overline{\mathrm{A'D'}}-\overline{\mathrm{AD}}}{\overline{\mathrm{AD}}}=\frac{\frac{\partial v}{\partial y}\mathrm{d}y\mathrm{d}t}{\mathrm{d}y}=\frac{\partial v}{\partial y}\mathrm{d}t$$

- **Релативна промена површине правоугаоника ABCD** за време d*t* je:

$$\frac{\mathrm{d}A}{A}=\frac{\mathrm{d}\left(\overline{\mathrm{AB}}\cdot\overline{\mathrm{AD}}\right)}{\overline{\mathrm{AB}}\cdot\overline{\mathrm{AD}}}=\frac{\overline{\mathrm{AD}}\cdot\mathrm{d}\overline{\mathrm{AB}}+\overline{\mathrm{AB}}\cdot\mathrm{d}\overline{\mathrm{AD}}}{\overline{\mathrm{AB}}\cdot\overline{\mathrm{AD}}}=\frac{\mathrm{d}\overline{\mathrm{AB}}}{\overline{\mathrm{AB}}}+\frac{\mathrm{d}\overline{\mathrm{AD}}}{\overline{\mathrm{AD}}}$$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}A}{A}=\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)\mathrm{d}t}$$

- Ако би се узела у обзир и промена треће странице квадра, добило би се да je **релативна промена запремине флуидног делића**:

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}V}{V}=\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)\mathrm{d}t}\quad\Rightarrow\quad\frac{1}{V}\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}$$

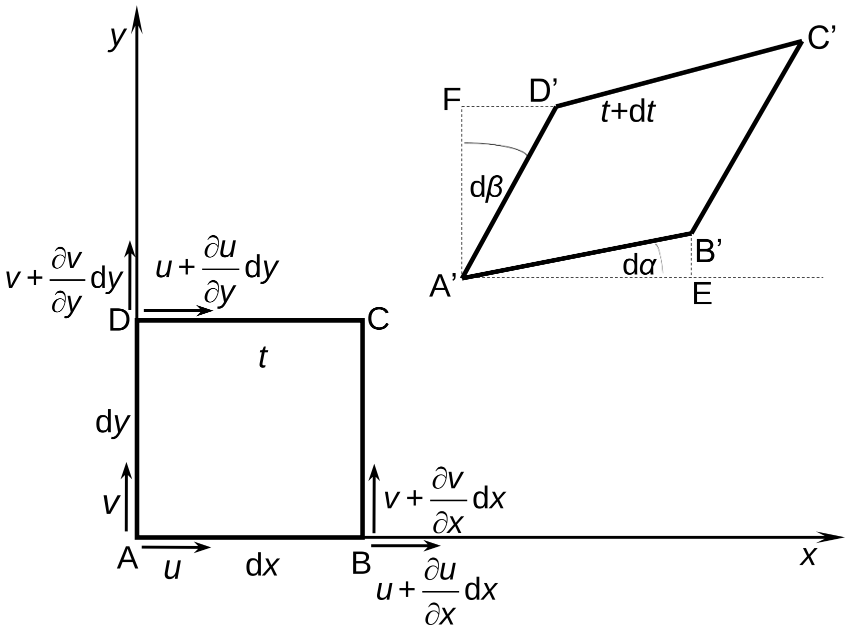
- Како се **запремина флуидног делића** обележава са $\mathbf{d}\boldsymbol{V}_{\mathbf{m}}$ и како се **промене величина које се дешавају током времена при кретању флуидног делића облежавају материјалним изводом**, следи:

$$\frac{1}{\mathrm{d}V_{\mathrm{m}}}\frac{\mathrm{D}\left(\mathrm{d}V_{\mathrm{m}}\right)}{\mathrm{D}t}=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=S_{xx}+S_{yy}+S_{zz}=\mathrm{div}\vec{U}$$

- **Збир компонената на дијагонали тензора брзине деформисања $S_{xx}+S_{yy}+S_{zz}$ једнак је $\mathrm{div}\vec{U}$ и представља релативну промену запремине флуидног делића у времену.**

- Ако је $S_{xx}+S_{yy}+S_{zz}=\mathrm{div}\vec{U}=0$, **запремина** тј. **густина флуидног делића се не мењају у времену**, па је струјање флуида **нестишљиво**.

Физички смисао компонената ван дијагонале тензора брзине деформисања



$$S_{xy}=S_{yx}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right),\quad S_{xz}=S_{zx}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)$$

$$S_{yz}=S_{zy}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right)$$

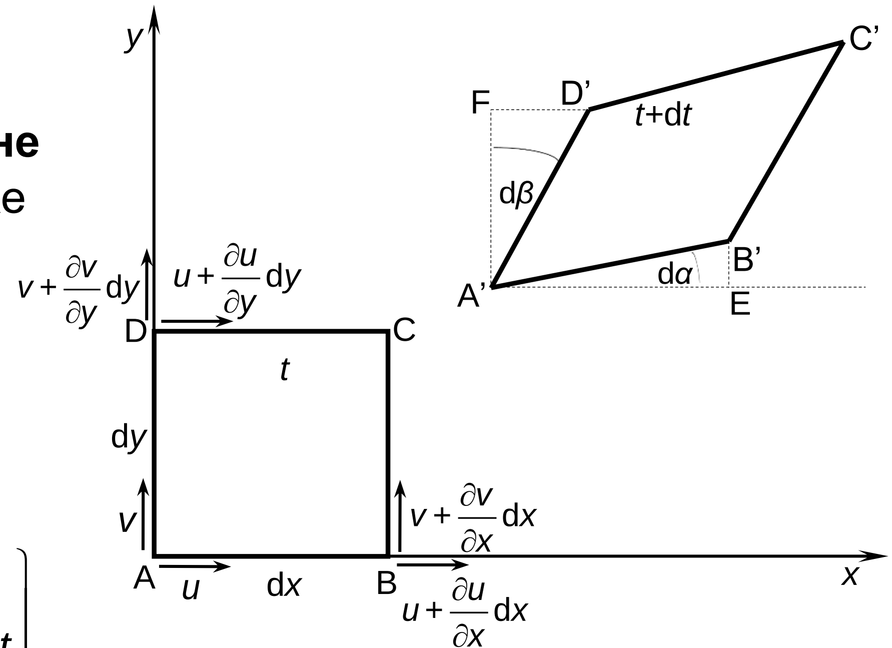
- **Компоненте S_{ij} тензора** $\tilde{S}$ **за $i \neq j$** одређују **брзину промене облика флуидног делића, тј. брзину пром. угла** између **две странице флуидног делића.**

- Доказ: Посматра се **промена угла BAD** флуидног делића у равни *xy* за време d*t.*
- У тренутку *t:* $\sphericalangle \mathrm{BAD}=\pi/2$
- У тренутку *t*+d*t*: $\sphericalangle \mathrm{B'A'D'}=\pi/2-\mathrm{d}\alpha-\mathrm{d}\beta$
- **Брзина промене облика** флуидног делића у равни *xy* је:

$$\frac{\mathrm{d}\left(\sphericalangle \mathrm{BAD}\right)}{\mathrm{d}t}=\frac{\sphericalangle \mathrm{BAD}-\sphericalangle \mathrm{B'A'D'}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}t}$$

- **Угао dα** настаје услед **различите брзине тачке B у односу на тачку A**, тј. разлике између пређеног пута тачке B и тачке A за време dt. Пројекције странице A'B' (у тренутку t+dt) на x и y правац су:

$$\overline{\mathrm{A'E}} = \mathrm{d}x + \frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}t, \quad \overline{\mathrm{B'E}} = \frac{\partial v}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}t$$



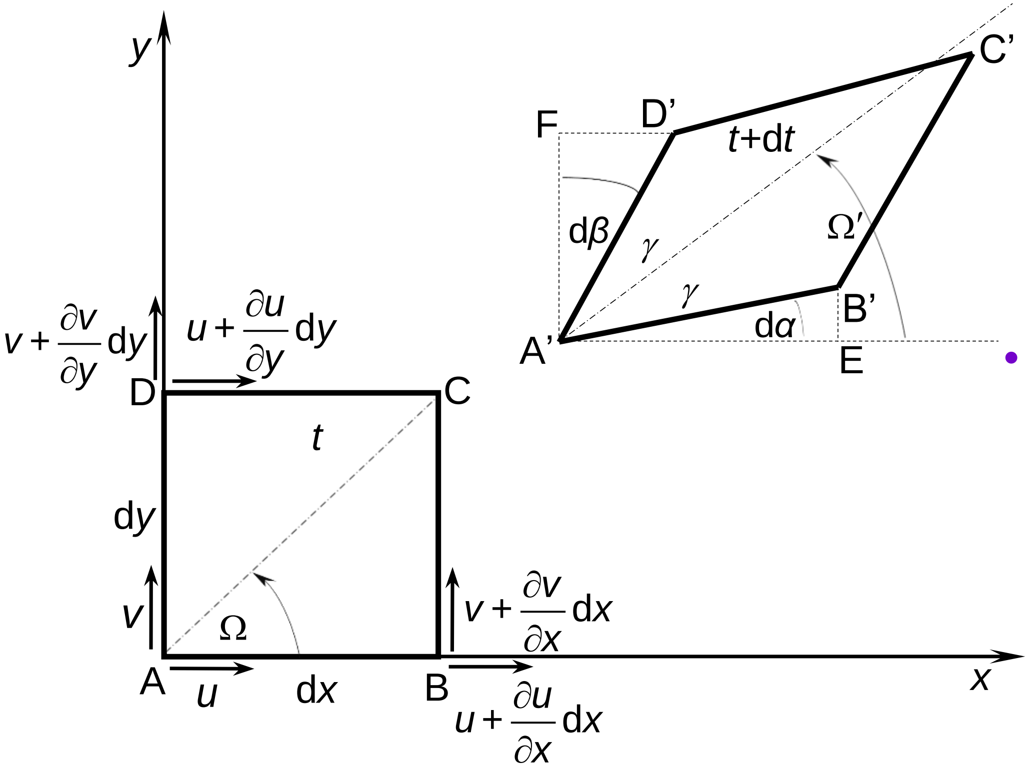
- **Угао dβ** настаје услед **различите брзине тачке D у односу на тачку A**, тј. разлике између пређеног пута тачке D и тачке A за време dt. Пројекције странице A'D' (у тренутку t+dt) на x и y правац су:

$$\overline{\mathrm{FD'}} = \frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y\mathrm{d}t, \quad \overline{\mathrm{A'F}} = \mathrm{d}y + \frac{\partial v}{\partial y}\mathrm{d}y\mathrm{d}t$$

- **Углови dα** и **dβ** су:

$$\left.\begin{aligned}
\mathrm{d}\alpha &\approx tg\left(\mathrm{d}\alpha\right) = \frac{\overline{\mathrm{B'E}}}{\overline{\mathrm{A'E}}} = \frac{\frac{\partial v}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x + \cancelto{\ll \mathrm{d}x}{\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}t}} = \frac{\partial v}{\partial x}\mathrm{d}t \\
\mathrm{d}\beta &\approx tg\left(\mathrm{d}\beta\right) = \frac{\overline{\mathrm{FD'}}}{\overline{\mathrm{A'F}}} = \frac{\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y\mathrm{d}t}{\mathrm{d}y + \cancelto{\ll \mathrm{d}y}{\frac{\partial v}{\partial y}\mathrm{d}y\mathrm{d}t}} = \frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}t
\end{aligned}\right\}
\boxed{\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 2S_{xy}}$$

Физички смисао угаоне брзине флуидног делића



$$\vec{\omega}=\underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}\right)}_{\omega_x}\vec{i}-\underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial z}\right)}_{\omega_y}\vec{j}+\underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)}_{\omega_z}\vec{k}$$

- **Угаона брзина флуидног делића у равни *xy* (око осе *z*)** је дефинасана пројекцијом ω_z угаоне брзине флуидног делића на *z осу*:

$$\omega_z=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

- Физички смисао: **Угаона брзина флуидног делића** у равни *xy* (**око осе *z***) **је брзина промене угла између симетрале угла флуидног делића и неког референтног правца** (у равни *xy*).

- Доказ: Посматра се **промена угла између симетрале угла флуидног делића и неког референтног правца Ω у равни *xy* за време d*t*.**
- У тренутку *t*: Ω=*π*/4.
- У тренутку *t*+d*t* : Ω'= d*α*+*γ*.

$$\gamma = \frac{\sphericalangle B'A'D'}{2} = \left(\frac{\pi}{2} - \mathrm{d}\alpha - \mathrm{d}\beta\right) \Big/ 2$$

- **Промена угла** између симетрале угла флуидног делића и некоg референтног правца (у равни *xy*) за време d*t* је:

$$\mathrm{d}\Omega = \Omega' - \Omega = \mathrm{d}\alpha + \frac{\pi/2 - \mathrm{d}\alpha - \mathrm{d}\beta}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\mathrm{d}\alpha - \mathrm{d}\beta}{2}$$

- **Угаона брзина флуидног делића у равни *xy*** (око осе *z*) је:

$$\omega_z = \frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}t}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

- Струјања су:
- **вртложна** ако је $\vec{\omega} \neq 0$, тј. ако је $\mathrm{rot}\vec{U} \neq 0$ (флуидни делићи имају угаону брзину $\vec{\omega}$.
- **невртложна** ако је $\vec{\omega} = 0$, тј. ако је $\mathrm{rot}\vec{U} = 0$. Тада брзина има потенцијал φ , па је $\vec{U} = \mathrm{grad}\,\varphi$. Таква струјања зову се **потенцијална струјања**.