3.3.2 Релативно мировање нестишљивог флуида

- **Ојлерова једначина** мировања флуида се може применити и у случају када **флуид мирује у односу на суд у коме се налази**, тј. при **релативном мировању флуида.** То се дешава при:
  - **транслаторном кретању суда константним убрзањем** $\vec{a}$ када на флуид осим **силе Земљине теже** делује и **инерцијална сила услед убрзања** .

$$\vec{f}_{in} = -\vec{a} \qquad (\vec{f}_{in}\text{- јединична инерцијална сила})$$

  - **обртном кретању суда константном угаоном брзином** $\vec{\omega}$, када на флуид осим **силе Земљине теже** делује и **инерцијална центрифугална сила** .

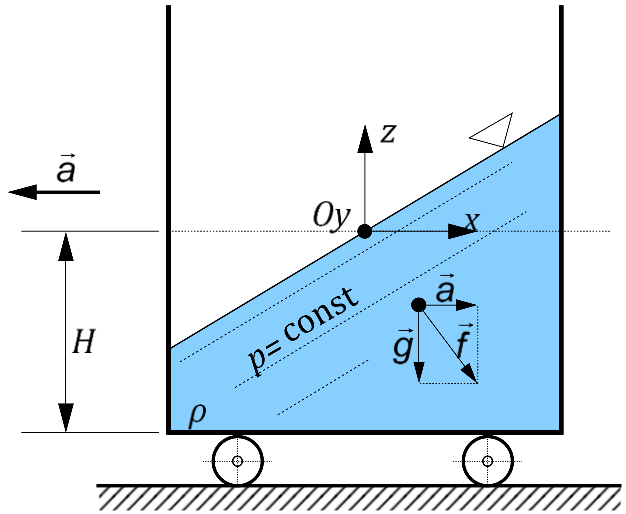
$$\vec{f}_{in} = \omega^2 \vec{r}$$

- **Избор координатног система који је везан за суд** и са њим се креће, омогућава примену **Ојлерове једначине мировања флуида**

$$\boxed{\mathrm{grad}p = \rho \underbrace{\left(\vec{g} + \vec{f}_{in}\right)}_{\vec{f}}}$$

- Изобарске површи су:
  - **равни** ако је јединична инерцијална сила иста за све флуидне делиће (**транслација**)
  - **криве површи** ако је јединична инерцијална сила различита за различите флуидне делиће (**ротација**)

Релативно мировање нестишљивог флуида при транслаторном кретању константним убрзањем



Пример: Одредити **поље притиска у суду** испуњеном флуидом који се креће **константним убрзањем.** На флуид делују:

- **сила Земљине теже и**
- **инерцијална сила**

Флуид мирује у односу на суд.
За координатни систем који се креће заједно са судом примењује се Ојлерова једначина:

$$\mathrm{d}p = \rho\left(f_x \mathrm{d}x + f_y \mathrm{d}y + f_z \mathrm{d}z\right)$$

Пројекције масених сила на осе *x*, *y* и *z* су $f_x = a, f_y = 0, f_z = -g$, па су Ојлерова једначина и њен интеграл редом:

$$\mathrm{d}p = \rho\left(a\mathrm{d}x - g\mathrm{d}z\right) \quad \Rightarrow \quad p = \rho\left(ax - gz\right) + C$$

Из услова x=0, z=0, p=p_a, следи да је константа интеграције $C = p_a$, па је **коначно решење** за **расподелу притиска у флуиду**:

$$\boxed{p = p_a + \rho\left(ax - gz\right)}$$

Једначина слободне површи је $\boxed{z_\nabla = ax/g}$. **Изобаре су равни управне на** $\vec{f}$.

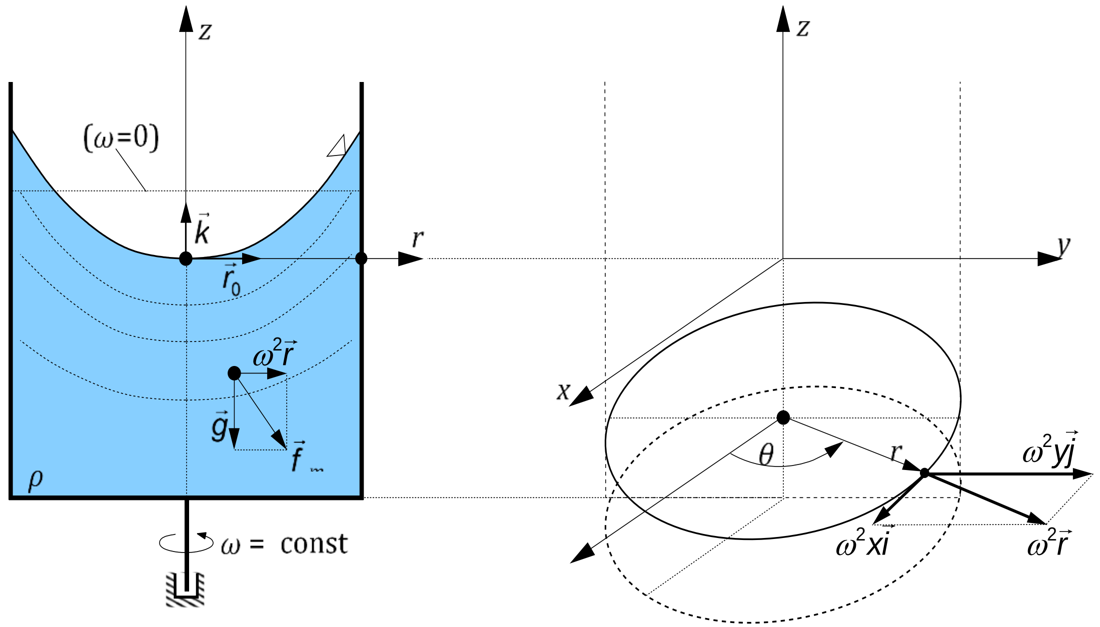
(поље масених сила је хомогено)

Релативно мировање нестишљивог флуида при ротацији константном угаоном брзином

Пример: Одредити **поље притиска у суду** испуњеном флуидом који се обрће константном угаоном брзином ω.

Флуид мирује у односу на суд.
На флуид делују:

- сила Земљине теже и
- инерцијална центрифугална с.



За координатни систем који се креће заједно са судом (оса z је оса ротације) примењује се Ојлерова једначина:

$$dp = \rho\left(f_x dx + f_y dy + f_z dz\right)$$

Пројекције масених сила на осе x,y и z су $f_x = \omega^2 x,\ f_y = \omega^2 y,\ f_z = -g$, па су Ојлерова једначина и њен интеграл редом:

$$dp = \rho\left(\omega^2 x dx + \omega^2 y dy - g dz\right) \Rightarrow p = \rho\left(\underbrace{\frac{\omega^2 x^2}{2} + \frac{\omega^2 y^2}{2}}_{\frac{\omega^2 r^2}{2}} - gz\right) + C$$

Из услова $r=0, z=0, p=p_a$, следи да је константа интеграције $C=p_a$, па је коначно решење за расподелу притиска у флуиду:

$$\boxed{p=p_a+\rho\left(\frac{\omega^2 r^2}{2}-gz\right)}$$

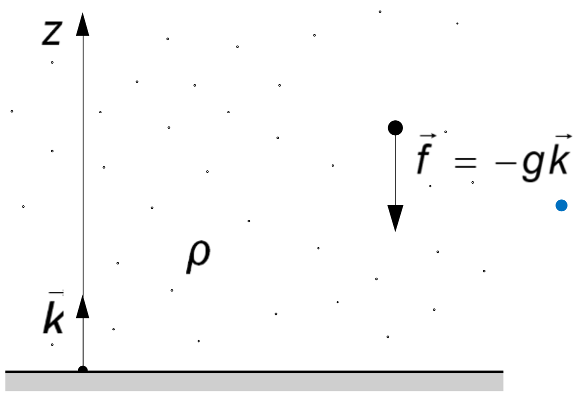
Једначина слободне површи следи из услова $p=p_a$:

$$\boxed{z_\nabla=\frac{\omega^2 r^2}{2g}}$$

Изобара слободне површи има облик обртног параболоида.

- Како је **поље масених сила нехомогено** све **изобаре су криве површи**.
- При релативном мировању нестишљивог флуида у суду који се обрће константном угаоном брзином **изобаре су конгруентни обртни параболоиди са теменима на оси обртања.**
- **Задатак** Одредити **позиције** и **вредности** највећих и најмањих вредности притиска у претходним примерима.

3.4 Мировање стишљивог флуида у пољу силе Земљине теже



- Мировање стишљивог флуида описано је такође **Ојлеровом једначином** $\mathrm{d}p = \rho\left(f_x\mathrm{d}x + f_y\mathrm{d}y + f_z\mathrm{d}z\right)$.
- При мировању стишљивог флуида у пољу силе Земљине теже пројекције масене силе су f_x=0, f_y=0, $f_z = -g$, па се Ојлерова једначина своди на $\mathrm{d}p = -\rho g\mathrm{d}z$.

- Када су **промене висине гаса мале**, занемарује се промена густине гаса са висином и **гас се третира као нестишљив флуид (ρ=*const*.).**
- Међутим, када су **промене висине гаса значајне**, као нпр. у атмосфери, **узима се у обзир промена густине гаса са висином**.
- **Расподела притиска** тада зависи од густине која је функција притиска и температуре $\rho = \rho(p,T)$.

3.4.1 Расподела притиска у стишљивом флуиду у пољу силе Земљине теже при **изотермској** промени стања

- **Стишљив флуид (ваздух) константне температуре** мирује у пољу силе Земљине теже (**стратосфера**).
- z↑, пројекције масене силе Земљине теже су $f_x=0, f_y=0, f_z=-g$, а

  Ојлерова једначина у диференцијалном облику гласи $\mathrm{d}p=-\rho g \mathrm{d}z$.
- Гас задовољава **једначину стања идеалног гаса**, при чему је $T=const$.

$$\rho=\frac{p}{RT}$$

- Ојлерова једначина може се написати као $\mathrm{d}p=-\frac{p}{RT}g\mathrm{d}z$, тј.

$$\frac{\mathrm{d}p}{p}=-\frac{g}{RT}\mathrm{d}z$$

- Ако је познат притисак p_0 на висини z_0, интеграл претходне једначине одређује **притисак *p* на некој висини *z***:

$$\ln\frac{p}{p_0}=-\frac{g}{RT}\left(z-z_0\right)$$

- **Расподела притиска** у **стишљивом** флуиду у **пољу силе Земљине теже** при **изотермској промени стања** је

$$\boxed{p = p_0 e^{-\frac{g}{RT}\left(z - z_0\right)}}$$

- **Расподела густине** у **стишљивом** флуиду у **пољу силе Земљине теже** при **изотермској промени стања** је

$$\boxed{\rho = \rho_0 e^{-\frac{g}{RT}\left(z - z_0\right)}}$$

3.4.2 Расподела притиска у стишљивом флуиду у пољу силе Земљине теже при **изентропској** промени стања

- Стишљив флуид (ваздух) мирује **на површи Земље** на различитим надморским висинама у пољу силе Земљине теже.
- z↑, пројекције масене силе Земљине теже су $f_x=0, f_y=0, f_z=-g$, а

  Ојлерова једначина у диференцијалном облику гласи $\mathrm{d}p=-\rho g \mathrm{d}z$.
- Гас задовољава **једначину стања идеалног гаса** $p=\rho RT$, при чему је

  зависност густине од притиска изентропска:

$$\frac{p}{\rho^{\kappa}}=\frac{p_0}{\rho_0^{\kappa}}=const. \Rightarrow \rho=\rho_0\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{1}{\kappa}}$$

- Ојлерова једначина се може написати као $\mathrm{d}p=-\rho_0\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{1}{\kappa}} g\mathrm{d}z$, тј.

$$p^{-\frac{1}{\kappa}}\mathrm{d}p=-\frac{\rho_0 g}{p_0^{\frac{1}{\kappa}}}\mathrm{d}z$$

- Ако је познат притисак p_0 на висини z_0, интеграл претходне једначине одређује **притисак *p* на некој висини *z*** при **изентропској промени стања**:

$$\kappa\left(p^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}-p_0^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}\right)\Big/(\kappa-1)=-\frac{g\rho_0}{p_0^{\frac{1}{\kappa}}}(z-z_0)\;\Rightarrow\;\boxed{p=p_0\left[1-\frac{\kappa-1}{\kappa}\frac{g\rho_0}{p_0}(z-z_0)\right]^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}}$$

- **Расподела густине** у стишљивом флуиду у пољу силе Земљине теже **при изентропској промени стања** је:

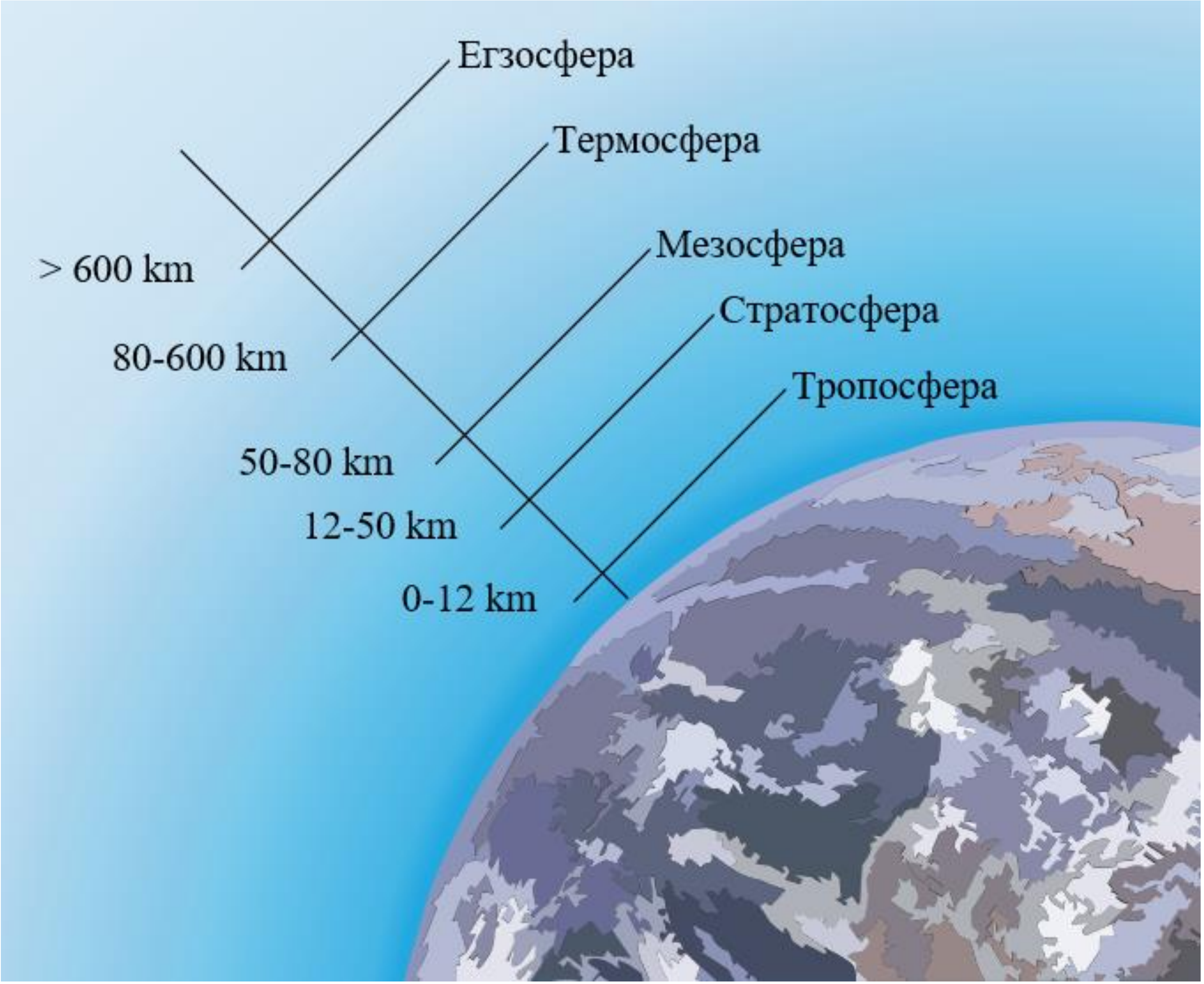
$$\boxed{\rho=\rho_0\left[1-\frac{\kappa-1}{\kappa}\frac{g\rho_0}{p_0}(z-z_0)\right]^{\frac{1}{\kappa-1}}}$$

- **Расподела температуре** у стишљивом флуиду у пољу силе Земљине теже **при изентропској промени стања** је:

$$\boxed{T=T_0\left[1-\frac{\kappa-1}{\kappa}\frac{g\rho_0}{p_0}(z-z_0)\right]}$$

3.4.3 Расподела притиска у стишљивом флуиду у пољу силе Земљине теже у **стандардној атмосфери**

- Зависно од промене температуре са висином, **атмосфера** се састоји од **неколико слојева**:
  - **Тропосфера** је најнижи и најгушћи слој (3/4 масе атмосфере је у тропосфери) у коме **температура опада приближно 6,5°C на 1 km висине**, а протеже се од 7km до 17km од површине Земље. Највиши врх Монт Еверест чија је висина 8848m налази се у тропосфери (T=-42°C, p=314,3mbar, ρ=0,475kg/m^3).
  - **Стратосфера** је слој у коме се температура незнатно мења са порастом висине (***T* ≈ *const*.** на мањим висинама), а протеже се од тропосфере до висине око 50 km.
  - **Мезосфера** је слој у коме **температура опада са порастом висине**, а протеже се од стратосфере до висине око 80 km.
  - **Термосфера** је слој у коме **температура нагло расте са порастом висине**, а протеже се од мезосфере до висине око 800 km.


Егзосфера
Термосфера
Мезосфера
Стратосфера
Тропосфера
> 600 km
80-600 km
50-80 km
12-50 km
0-12 km

Расподела притиска у тропосфери

- Ваздух мирује у пољу силе Земљине теже, при чему температура опада приближно 6,5°C на 1 km висине.
- z↑, пројекције масене силе Земљине теже су $f_x=0,\ f_y=0,\ f_z=-g$, а Ојлерова једначина $\mathrm{d}p=-\rho g\mathrm{d}z$.
- Гас задовољава једначину стања идеалног гаса $p=\rho RT$ при чему је $T=T_0-\gamma z$, (T_0=288K, γ = 6,5°C/km), па је зависност густине од притиска дата релацијом:

$$\rho=\frac{p}{R\left(T_0-\gamma z\right)}$$

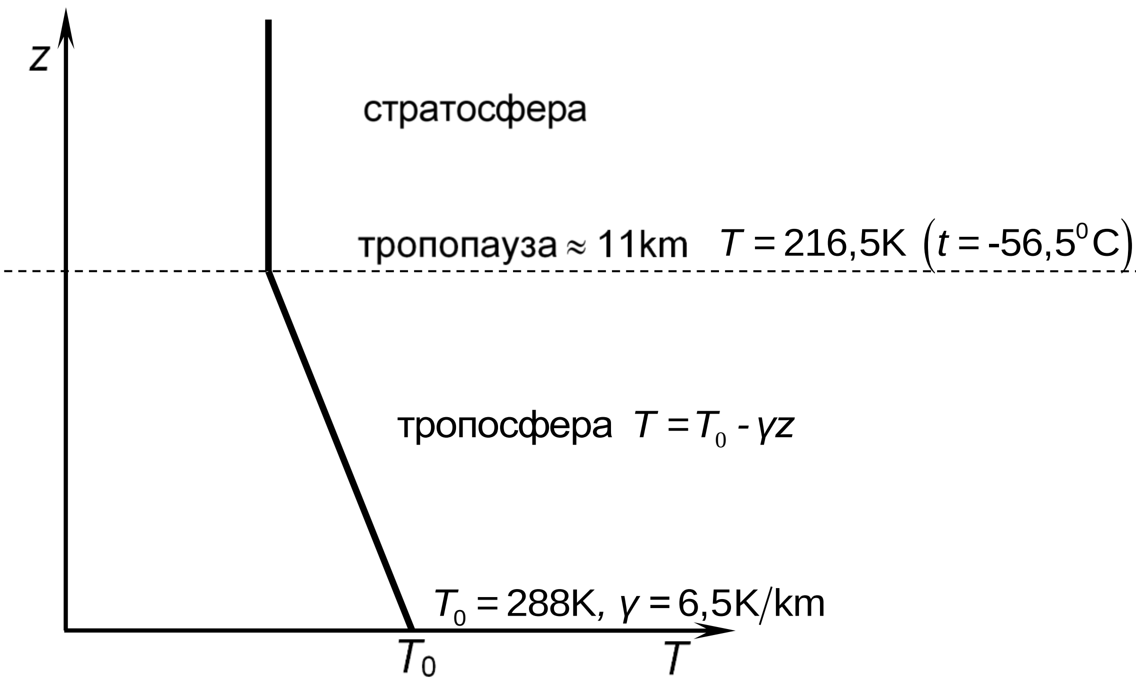
- Ојлерова једначина је тада $\mathrm{d}p=-\frac{p}{R\left(T_0-\gamma z\right)}g\mathrm{d}z \Rightarrow \frac{\mathrm{d}p}{p}=-\frac{g}{RT_0\left(1-\frac{\gamma z}{T_0}\right)}\mathrm{d}z$.
- Ако је за z=0 притисак $p=p_a$, тада интеграл ове једначине одређује притисак p на некој висини z:

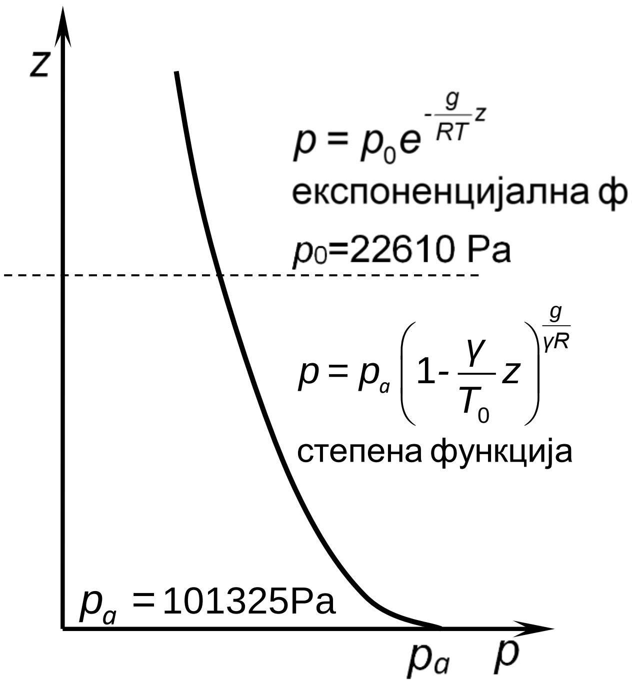
$$\ln\frac{p}{p_a}=\frac{g}{R\gamma}\ln\left(1-\frac{\gamma z}{T_0}\right) \Rightarrow \boxed{p=p_a\left(1-\frac{\gamma z}{T_0}\right)^{\frac{g}{R\gamma}}}$$

- Ако је за z=0 густина ρ_0, густина ρ на некој висини z је:

$$\boxed{\rho=\rho_0\left(1-\frac{\gamma z}{T_0}\right)^{\frac{g}{R\gamma}-1}}$$

Расподела температуре и **притиска** у нижим слојевима **атмосфере**





- У случају **мањих висинских разлика расподела притиска** у стишљивом флуиду је **линеарна**, као у случају нестишљивог флуида.
  - **Изотермска** промена стања:

$$p = p_0 e^{-\frac{g}{RT}(z-z_0)} \approx p_0\left(1-\frac{g}{RT}(z-z_0)\right) = p_0 - \frac{p_0 g}{RT}(z-z_0) = p_0 - \rho_0 g(z-z_0)$$

  - **Изентропска** промена стања:

$$p = p_0\left[1-\frac{\kappa-1}{\kappa}\frac{g\rho_0}{p_0}(z-z_0)\right]^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} \underset{(1+x)^m\approx 1+mx+\dots}{\approx} p_0\left[1-\frac{\kappa}{\kappa-1}\frac{\kappa-1}{\kappa}\frac{g\rho_0}{p_0}(z-z_0)\right] = p_0 - \rho_0 g(z-z_0)$$

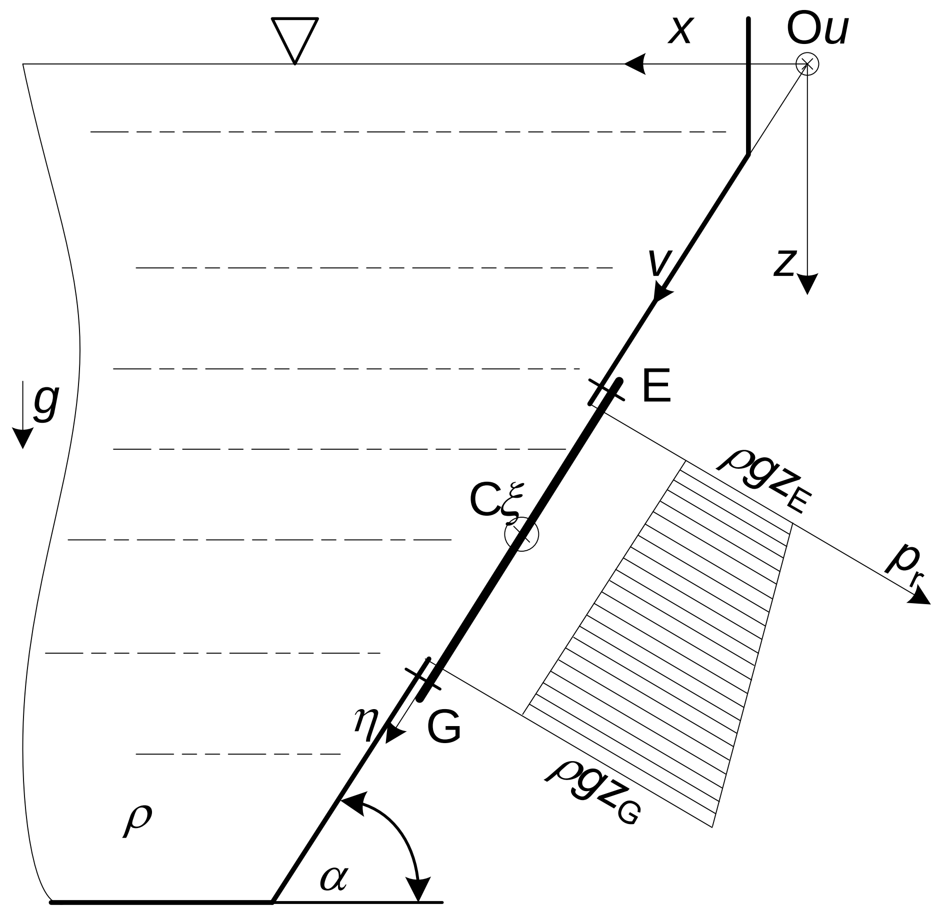
  - **Тропосфера**:

$$p = p_a\left(1\text{-}\frac{\gamma z}{T_0}\right)^{\frac{g}{R\gamma}} = p_a\left(1-\frac{g}{R\gamma}\frac{\gamma z}{T_0}\right) = p_a - \rho_0 g z$$

  - У пракси се, ако је промена висине мала, занемарује промена притиска у гасу, тј. узима се да је притисак у целом простору константан.

3.5 Сила притиска на равне површи

- У случају контакта тела и флуида који мирује често је потребно одредити интензитет, правац, смер и нападну тачку резултантне силе којом флуид делује на тело (пројектовање брана, устава, преводница, насипа, итд.).
- **Задатак**: Одредити **силу којом је оптерећен раван поклопац EG** који затвара отвор у зиду резервоара испуњеног течношћу густине ρ. Резервоар је отворен према атмосфери и налази се у пољу силе Земљине теже.



- Сила на поклопац је резултат континуалног трапезног оптерећења течности и континуалног правоугаоног оптерећења ваздуха (атмосфера).
- На слици су уцртани координатни системи O*xyz*, O*uv* и C$\xi\eta$.
  - Координатни почетак O је у пресеку слободне површи и равни поклопца (осе *y* и *u*) са осом *v* која лежи у равни поклопца и пролази кроз његово тежиште C.
  - Тежишне осе ξ и η паралелне су осама *u* и *v* респективно.

Интензитет, правац и смер силе

- Елементарна површинска сила (на dA поклопца):

$$\mathrm{d}\vec{F} = (p - p_a)\vec{n}\,\mathrm{d}A$$

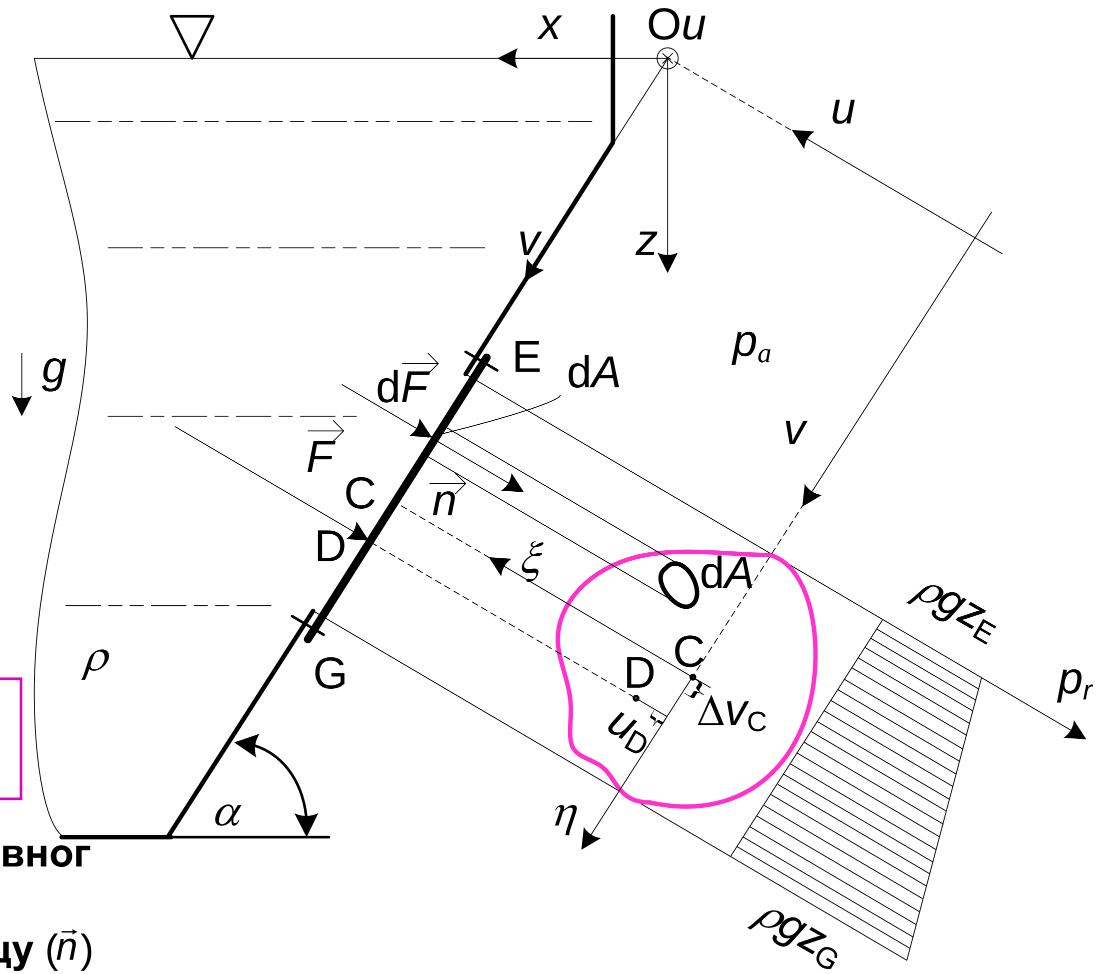
- Резултујућа сила на поклопац:

$$\vec{F} = \vec{n}\iint_A (p - p_a)\,\mathrm{d}A \Rightarrow$$

Правац силе је **правац нормале** $\vec{n}$ на површ поклопца.

- Поље притиска у течности је $p=p_a+\rho gz$, па је пројекција силе $\vec{F}$ на $\vec{n}$:

$$\boxed{F = \rho g \iint_A z\,\mathrm{d}A = \rho g\, z_C A = p_{rC} A}$$



- **Интензитет** силе је **производ релативног притиска у тежишту C и површине.**
- **Смер** силе је **од течности ка поклопцу** ($\vec{n}$) **ако је z_C>0** тј. **p_{rC}>0**.

z_C - координата z тежишта C површине поклопца A (координатни почетак је на ∇).

$z_C A$ - статички момент површине поклопца A у односу на раван ∇.

- **Пројекција елементарне силе** (на јединични вектор спољашње нормале поклопца $\vec{n}$) dF је **позитивна** када у течности на елементарној површи dA влада **натпритисак**, а **негативна** када на елементарној површи влада **потпритисак.**
- Када је **у тежишту** С **натпритисак (*p*$_{rC}$>0)**:
  - **пројекција резултанте** (на јединични вектор спољашње нормале поклопца $\vec{n}$) ***F*** је **позитивна,**
  - **смер резултанте** је **од течности ка поклопцу**,
  - **тежиште** С налази се **испод слободне површи** ($z_C > 0$).
- Када је **у тежишту** С **потпритисак (*p*$_{rC}$<0)**, све је обрнуто:
  - **пројекција резултанте** (у односу на јединични вектор спољашње нормале поклопца $\vec{n}$) ***F*** је **негативна,**
  - **смер резултанте** је **од поклопца ка течности**,
  - **тежиште** С налази се **изнад слободне површи** ($z_C < 0$).

Нападна тачке силе

- С обзиром на то да сила на равну површ (изузев кад је површ хоризонтална или на њу делује гас) представља резултујуће трапезно оптерећење, њена нападна тачка се не поклапа са тежиштем.
- **Нападна тачка резултанте** (на слици **D**) назива се **центар притиска.** Како је наћи?

Нападна тачке силе

- Применом **Варињонове теореме** према којој је **момент резултанте** (у овом случају силе $\vec{F}$) за **осу** (у овом случају осу ***u*** или ***v***) једнак **збиру момената компонената** (у овом случају сила $\mathrm{d}\vec{F}$) за ту исту осу, могуће је одредити **координате u_D и v_D нападне тачке D**:

$$v_D F = \iint_A v \, \mathrm{d}F \quad \text{и} \quad u_D F = \iint_A u \, \mathrm{d}F$$

$$v_D \overbrace{\rho g \underbrace{v_C \sin\alpha}_{z_C} A}^{F} = \iint_A v \overbrace{\rho g \underbrace{v \sin\alpha}_{z} \mathrm{d}A}^{\mathrm{d}F} \quad \text{и} \quad u_D \overbrace{\rho g \underbrace{v_C \sin\alpha}_{z_C} A}^{F} = \iint_A u \overbrace{\rho g \underbrace{v \sin\alpha}_{z} \mathrm{d}A}^{\mathrm{d}F}$$

$$\boxed{v_D = \frac{I_u}{v_C A} = \left(\frac{I_u \, \rho g \sin\alpha}{F} \right) \quad \text{и} \quad u_D = \frac{I_{uv}}{v_C A} = \left(\frac{I_{uv} \rho g \sin\alpha}{F} \right)}$$

$I_u = \iint_A v^2 \, \mathrm{d}A$ - аксијални момент инерције површине *A* за осу *u* паралелну тежишној оси ξ;

$I_{uv} = \iint_A uv \mathrm{d}A$ - центрифугални момент инерције површине *A* за осе *u* и *v* паралелне тежишним осама ξ и η.

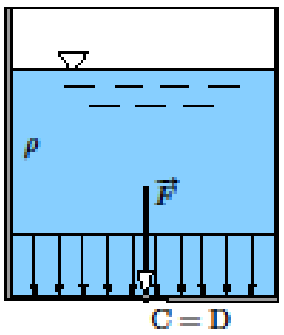
- Растојање центра притиска D у односу на тежиште C по оси v $(\Delta v_C = v_D - v_C)$ одређује се применом **Штајнерове теореме:**

Аксијални момент инерције површине *A* за осу паралелну тежишној оси једнак је **збиру момента инерције за тежишну осу** (**сопственог момента инерције**) и **производа квадрата растојања између оса и површине *A*** (**положајног момента инерције**).

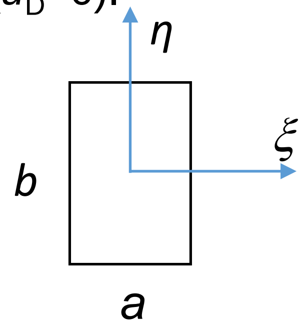
$$\Rightarrow I_u = \underbrace{I_\xi}_{\text{сопствени м.и.}} + \underbrace{v_C^2 A}_{\text{положајни м.и.}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{v_D - v_C = \Delta v_C = \frac{I_\xi}{v_C A}}$$

Специјални случајеви:

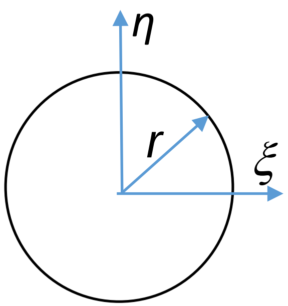
- хоризонталан поклопац, C=D, $v_C \rightarrow \infty$, $\Delta v_C = 0$ (слика)
- вертикалан поклопац, $v_C = z_C$



- Разматраће се само проблеми у којима је поклопац *A* **симетричан у односу на осу *v***. Тада је центрифугални момент инерције $I_{uv}=0$, тј. **центар притиска D је на оси *v*** ($u_D=0$).

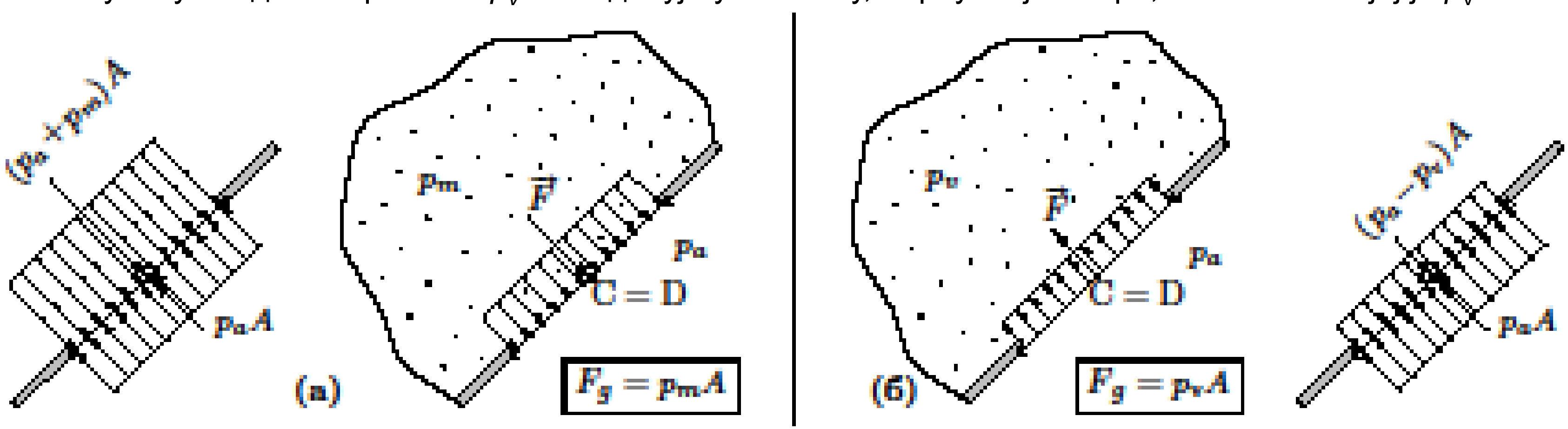


$$I_\xi = \frac{ab^3}{12}$$



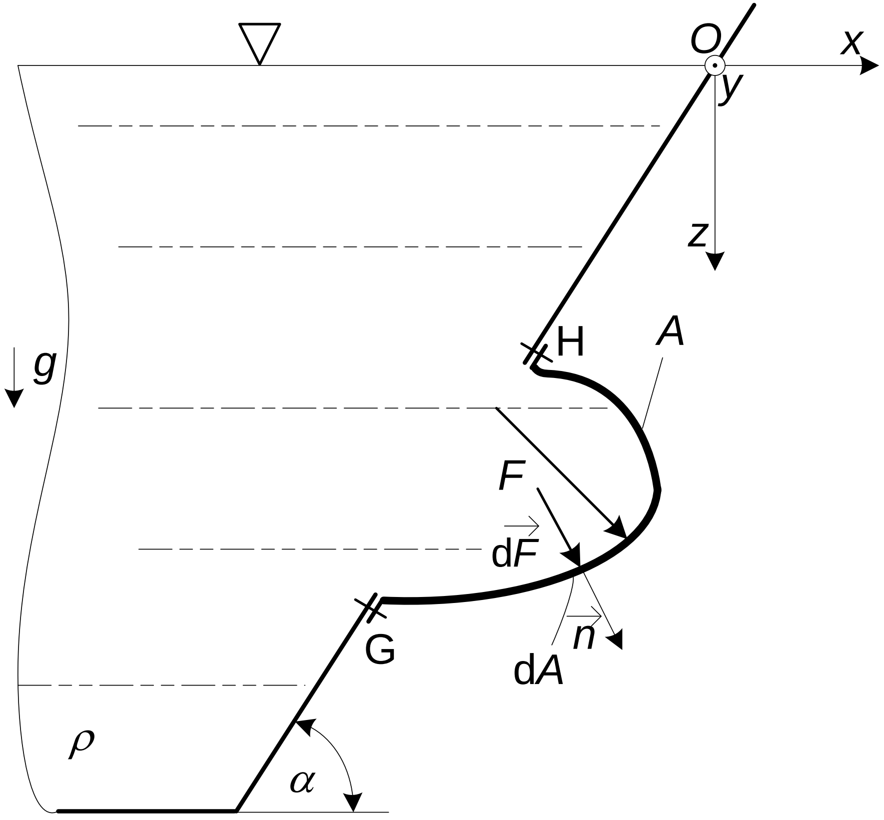
$$I_\xi = \frac{\pi r^4}{4}$$

- Приликом решавања проблема могуће је претпоставити смер резултанте од течности ка површи поклопца и њену нападну тачку D испод тежишта поклопца C не рачунајући претходно вредност притиска у тежишту поклопца.
  - Ако се у том случају добије позитивна вредност пројекције *F*, претпоставка о смеру силе и позицији нападне тачке је добра.
  - У супротном, смер резултанте је од површи поклопца ка течности, а нападна тачка D је изнад тежишта C. .
- Када је резервоар испуњен **гасом**, с обзиром да је у гасу свуда иста вредност притиска, расподела елементарних сила је униформна, па **резултантна сила** делује **у тежишту поклопца**.
  - Ако у гасу влада натпритисак p_m резултанта интензитета $p_m A$ делује у тежишту, управна је на поклопац и делује од гаса ка површи поклопца;
  - Ако у гасу влада потпритисак p_v сила делује у тежишту, обрнутог је смера, а интензитет јој је $p_v A$.



3.6 Сила притиска на криве површи

Задатак: Одредити **силу којом је оптерећен поклопац** који затвара отвор G-H у резервоару испуњеном течношћу густине ρ. Поклопац није раван, са унутрашње стране потпуно је оквашен течношћу, док је са спољашње стране поклопца ваздух под атмосферским притиском. Резервоар је отворен према атмосфери и налази се у пољу силе Земљине теже.



- **Сила на поклопац** је резултат **оптерећења течности са унутрашње** и **ваздуха са спољашње стране** (атмосфера).
- Елементрна сила (на dA поклопца):

$$\mathrm{d}\vec{F} = \left(p - p_a\right)\vec{n}\,\mathrm{d}A$$

- **Резултујућа сила на поклопац**:

$$\vec{F} = \iint_A \left(p - p_a\right)\vec{n}\,\mathrm{d}A = \rho g \iint_A z\,\vec{n}\,\mathrm{d}A$$

- **Јединични вектор спољашње нормале** $\vec{n}$ је **променљив** дуж површи A.
- На слици је уцртан координатни систем Oxyz (осе x и y су на слоб. површи).

Пројекције резултанте

- Јединични вектор спољашње нормале је:

$$\vec{n} = n_x \vec{i} + n_y \vec{j} + n_z \vec{k}$$

- Пројекције вектора $\vec{n}$ на x, y и z осу (n_x, n_y, n_z) једнаке су косинусима углова које $\vec{n}$ образује са осама x, y и z, редом.
- Пројекција елементарне површи dA у правцу оса x, y и z, једнака је производу пројекције вектора на одговарајућу осу и елементарне површи dA:

$$\mathrm{d}A_x = n_x \mathrm{d}A, \;\; \mathrm{d}A_y = n_y \mathrm{d}A \;\text{ и }\; \mathrm{d}A_z = n_z \mathrm{d}A$$

- **Пројекције резултујуће силе на поклопац** $\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k}$ гласе:

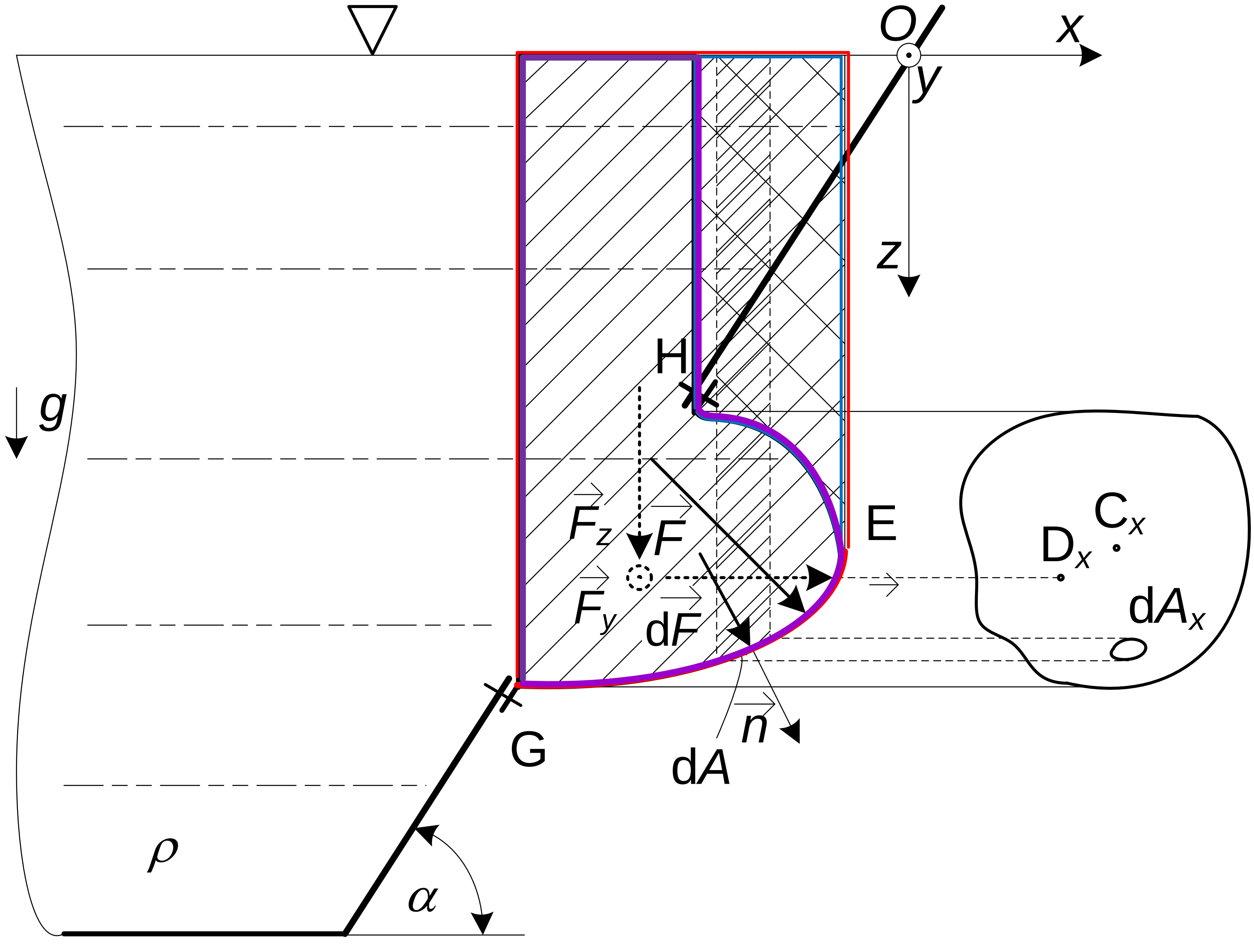
$$\boxed{\begin{aligned} F_x &= \rho g \iint_A z\, n_x \mathrm{d}A = \rho g \iint_{A_x} z \mathrm{d}A_x = \underbrace{\rho g z_{Cx}}_{p_{r\,Cx}} A_x \\ F_y &= \rho g \iint_A z\, n_y \mathrm{d}A = \rho g \iint_{A_y} z \mathrm{d}A_y = \underbrace{\rho g z_{Cy}}_{p_{r\,Cy}} A_y \\ F_z &= \rho g \iint_A z\, n_z \mathrm{d}A = \rho g \iint_{A_z} \underbrace{z \mathrm{d}A_z}_{\mathrm{d}V} = \rho g V \end{aligned}}$$

(p_r у тежишту A_x × површ. п. A_x)

(p_r у тежишту A_y × површ. п. A_y)

(тежина течности унутар запремине V)

- $\iint_{A_x} z \mathrm{d}A_x$ - статички момент површине A_x у односу на раван ∇, z_{Cx} је координата z тежишта A_x (координатни почетак је на ∇), а p_{rCx} је релативни притисак у тежишту A_x.
- $\iint_{A_y} z \mathrm{d}A_y$ - статички момент површине A_y у односу на раван ∇, z_{Cy} је координата z тежишта A_y (координатни почетак је на ∇), а p_{rCy} је релативни притисак у тежишту A_y.



O
x
y
z
H
g
E
C_x
D_x
dA_x
F_z
F
F_y
dF
n
dA
G
ρ
α

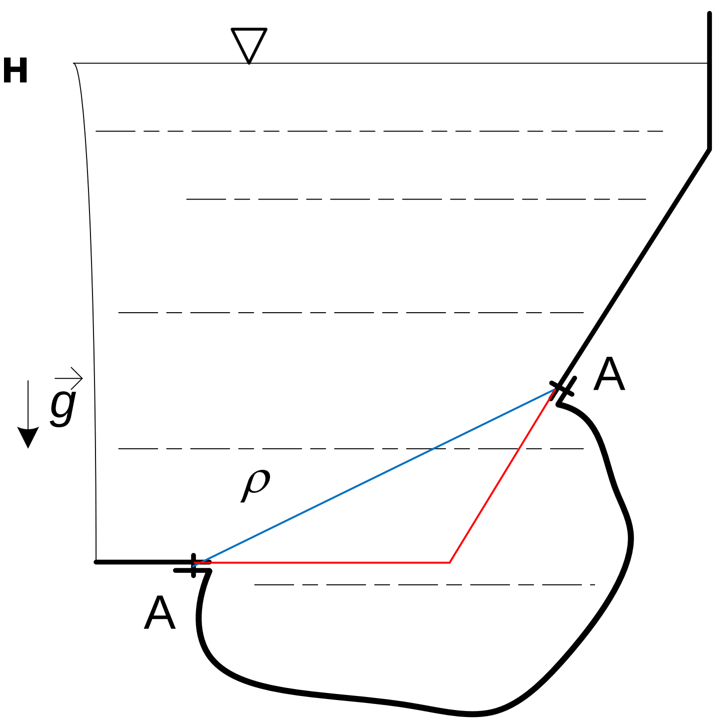
- У проблемима који ће бити разматрани криве површи симетричне су у односу на раван управну на *y* осу. $\Rightarrow F_y$=0
- **Вертикална компонента силе F_z** једнака је **тежини течности** која се налази **унутар цилиндричне запремине** чије су **границе површ поклопца са једне и пројекција поклопца на слободну површ течности са друге стране**, са нападном тачком у тежишту ове запремине.
- **Усмерена је наниже ако се запремина формира са оквашеног дела површи поклопца** (у овом случају са дела површи поклопца испод пресека са хоризонталном равни која пролази кроз најистуренију тачку поклопца Е) и обратно.
- **Усмерена је навише ако се запремина формира са неоквашеног дела површи поклопца** (у овом случају са дела површи поклопца изнад пресека са хоризонталном равни која пролази кроз тачку Е).
- Укупна вертикална компонента силе у овом случају усмерена је наниже (односи се на тежину течности која испуњава запремину која је на слици обележена љубичастом линијом).

Метода равнотеже сила

- Ојлерова једначина статике важи за било који део запремине флуида који мирује у пољу силе Земљине теже.
- Приликом решавања проблема методом равнотеже сила потребно је на **погодан** начин изабрати запремину флуида која је једним делом ограничена кривом површи на коју треба одредити вредност силе притиска флуида.

- **<u>Задатак:</u>** Одредити **силу којом је оптерећен поклопац А-А**.
- Ојлерову једначину статике флуида применићемо на део запремине флуида **ограничен кривом површи поклопца А-А** и **одговарајућим равним површима** (једном, плава, или више, нпр. две црвене) изабраним тако да са кривом А-А чине затворену површ.
- У оба случаја флуид мирује ($\sum \vec{F}_i = 0$), па је:

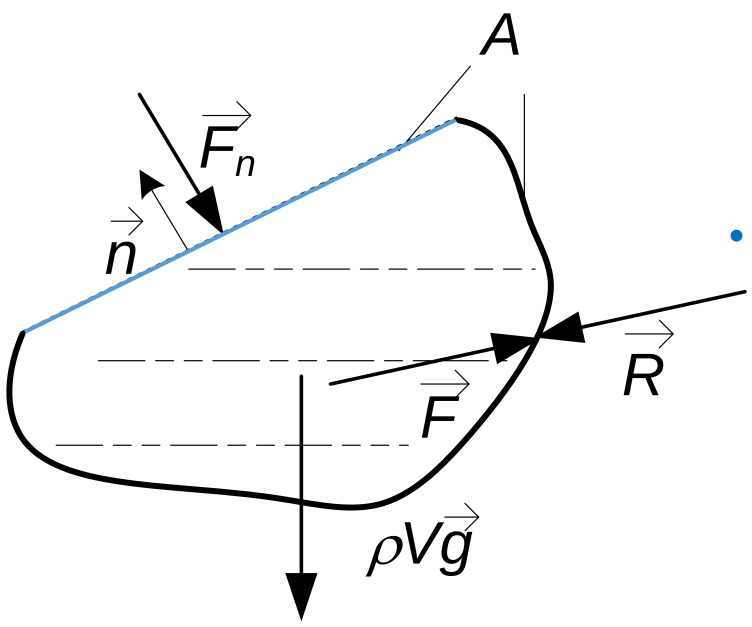
$$\vec{F}_m + \vec{F}_n = 0$$



1. **Случај**: **Посматрани део флуида ограничен је кривом површи поклопца и равном површи** (плава линија).

Посматрани део флуида је **у равнотежи** под дејством збира:

- запреминске силе $\rho V\vec{g}$, где је V запремина посматраног дела флуида и
- површинских сила:
  - $\vec{F}_n$ - којом флуид у резервоару делује на посматрани флуид преко равне површи;
  - $\vec{R}$ - којом површ поклопца A-A делује на посматрани део флуида.



$$\boxed{\rho V\vec{g} + \vec{F}_n + \vec{R} = 0}$$

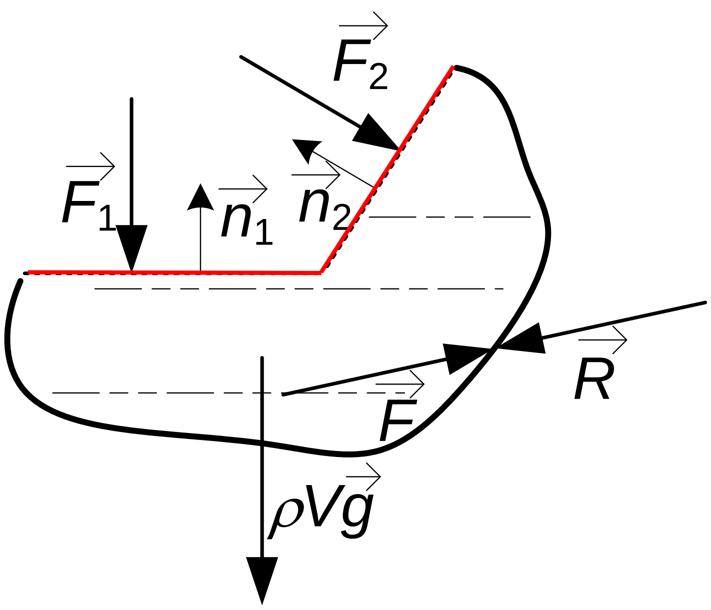
- Сила $\vec{F}$ којом је оптерећен поклопац A-A је истог интензитета и правца, а смера супротног сили $\vec{R}$ ($\vec{F} = -\vec{R}$):

$$\boxed{\vec{F} = \vec{F}_n + \rho V\vec{g}}$$

2. Случај: Посматрани део флуида ограничен је кривом површи поклопца и двема равним површима (црвене линије).

Посматрани део флуида је **у равнотежи** под дејством збира:

- запреминске силе $\rho V\vec{g}$, где је V запремина посматраног дела флуида и
- површинских сила:
  - $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ - којима флуид у резервоару делује на посматрани флуид преко две равне површи;
  - $\vec{R}$ - којом површ поклопца А-А делује на посматрани део флуида.



$$\boxed{\underbrace{\rho V\vec{g}}_{\vec{F}_m} + \underbrace{\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{R}}_{\vec{F}_n} = 0}$$

- Сила $\vec{F}$ којом је оптерећен поклопац А-А је истог интензитета и правца, а смера супротног сили $\vec{R}$ $(\vec{F} = -\vec{R})$:

$$\boxed{\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \rho V\vec{g}}$$

- У општем случају, „затварање“ криве површи на коју се тражи сила притиска, може да се уради и помоћу *i* равних површи и да се на флуид унутар тако формиране границе примени услов мировања.
  Тада је сила на криву површ:

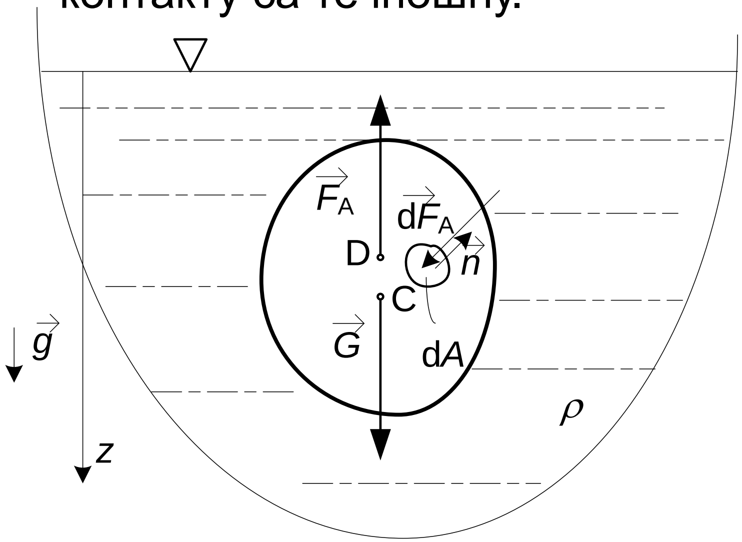
$$\boxed{\vec{F} = \sum_{i=1}^{m} \vec{F}_i + \rho V \vec{g}}$$

- Избор броја равних површи за „затварање“ криве површи на коју се тражи сила притиска зависи од конкретног случаја.
- Тада треба водити рачуна о томе да се равне површи бирају тако да се сила на њих може одредити. То значи да:
  - треба да им се зна површина и
  - позиција тежишта (да би притисак у њиховом тежишту могао да се срачуна).
- Када треба одредити силу у резервоару испуњеним гасом, тежина гаса се може занемарити, јер је густина гаса ρ_g занемарљиво мала, па се сила на криву површ своди на:

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{m} \vec{F}_i$$

Архимедова сила потиска

- Када је **тело делимично** или **потпуно зарођено у течност** која мирује у пољу силе Земљине теже **на њега делују сила теже** (запреминска, *G*) и сила од течности (површинска, F_A) која делује по целој површи преко које је тело у контакту са течношћу.



- **Сила којом течност делује на површ потопљеног тела** је **Архимедова сила потиска** $\vec{F}_A$:

Теорема Гаус-Остроградски

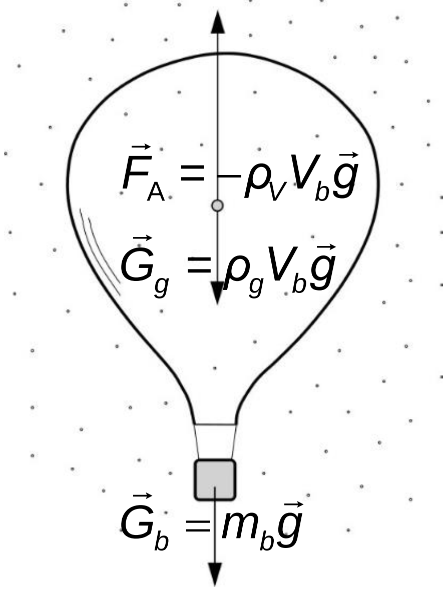
$$\vec{F}_A = -\oint\!\!\oint_A p\vec{n}\,dA = -\oint\!\!\oint_A \left(p_a + \rho g z\right)\vec{n}\,dA =$$

$$= -\oint\!\!\oint\!\!\oint_V \nabla\left(p_a + \rho g z\right)dV = -\oint\!\!\oint\!\!\oint_V \rho g\vec{k}\,dV = -\rho\vec{g}V$$

Особине Архимедове силе:

1. **вертикална је, смера супротног од смера силе Земљине теже**;
2. **нападна тачка** јој је **центар притиска D**;
3. **интензитет** јој је једнак **тежини телом истиснуте течности**.

- **Архимедова сила потиска не зависи од дубине ни од положаја потопљеног тела**.
- **Тежиште** (центар масе) потопљеног тела **C и нападна тачка силе потиска D** у општем случају код **нехомогеног тела** се **не поклапају**. **Тело мирује када су C и D на истој вертикали и C је испод D**. У супротном силе чине спрег који тежи да окрене тело кад се изведе из равнотежног положаја.
- Ако је ***G* >*F*** тело тоне, при $G=F_A$ тело лебди у води, за ***G* <*F*$_a$ тело плива** (делимично је зарођено).
- Пример: Одредити запремину балона испуњеног гасом густине ρ_g, да би могао да се пење окружен ваздухом густине ρ_V ($\rho_g < \rho_V$).



$$F_A = \rho_V V_b g \quad G_g = \rho_g V_b g \quad G_b = m_b g$$

$$F_A > G_b + G_g$$

$$\rho_V V_b g > m_b g + \rho_g V_b g$$

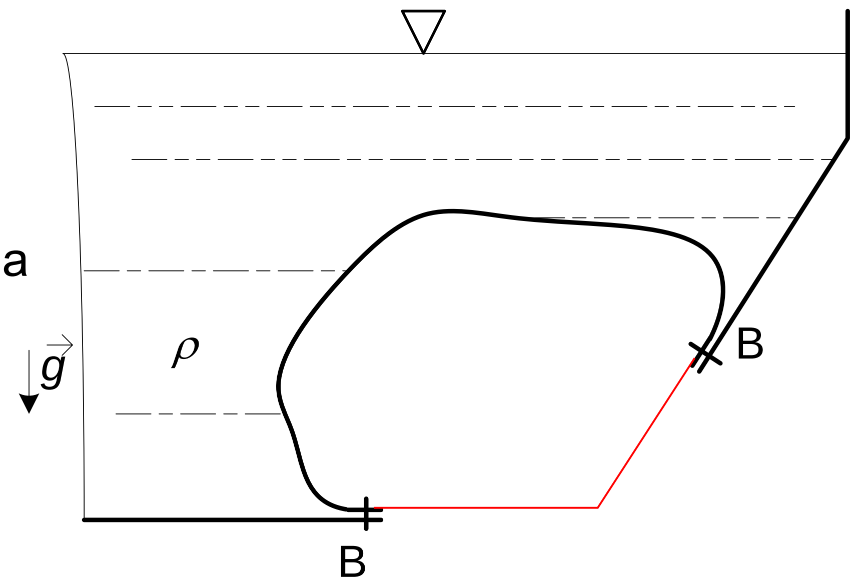
$$\boxed{V_b > \frac{m_b}{(\rho_V - \rho_g)}}$$

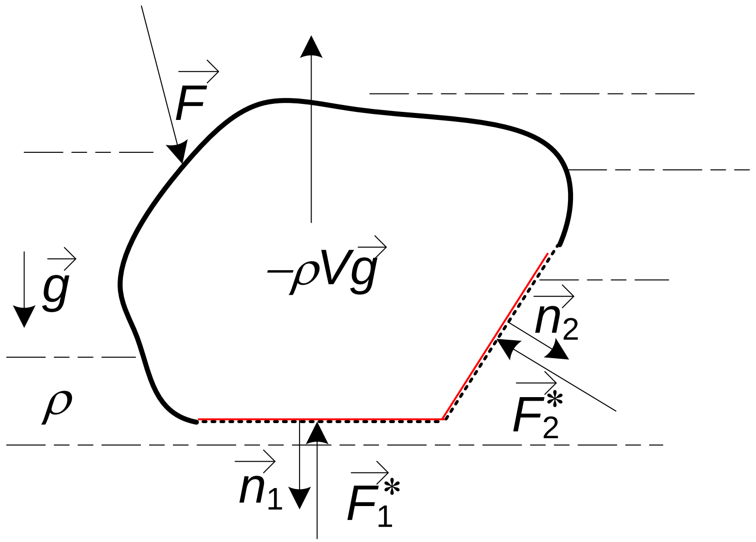
Метода потиска

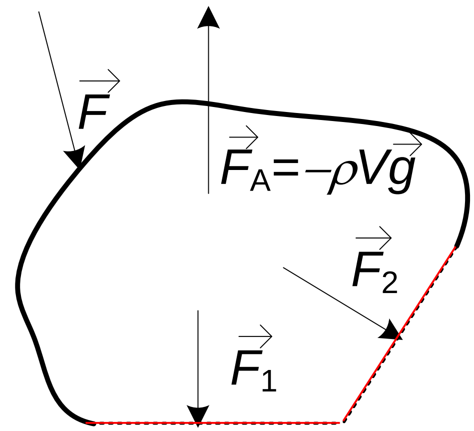
- **Метода потиска** користи се за одређивање **силе на криву површ** која је „**урођена**“ у течност.
- Приликом решавања проблема **методом потиска** треба **формирати затворену површ** сачињену од **криве површи** (на коју треба одредити силу) и одговарајућих равних површи (једне или више).

- **Задатак:** Одредити **силу којом је оптерећен поклопац B-B**.

- Формира се **затворена** површ сачињена **од криве површи поклопца B-B** и **одговарајућих равних површи** (**две црвене линије** на слици).







- Јединични вектори спољашњих нормала ове две равне површи су $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$.
- **Када је затворена површ потпуно зарођена у течност густине ρ** на њу (као у претходном примеру) делује само сила од течности која представља **Архимедову силу потиска** - то је **збир силе на криву** $\vec{F}$ и **две силе на равне** (црвене) **површи** $\vec{F}_1^*$ и $\vec{F}_2^*$.

$$\vec{F}_A = \vec{F} + \vec{F}_1^* + \vec{F}_2^*$$

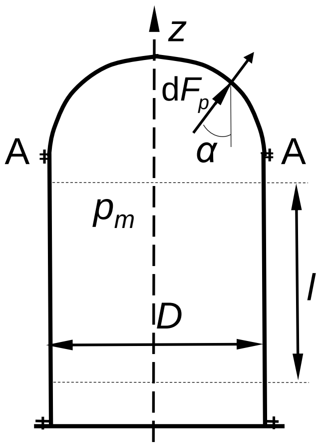
- Тежина ваздуха унутар ове затворене површи се занемарује јер је $\rho_v \ll \rho$.
- **Сила притиска на криву површ поклопца B-B** је коначно**:**

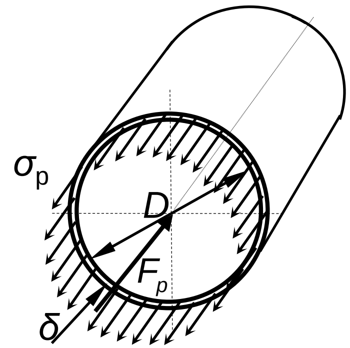
$$\boxed{\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 - \rho V\vec{g}}$$

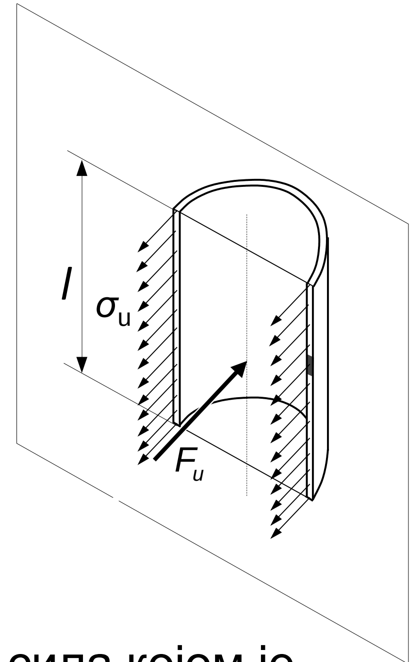
где су $\vec{F}_1 = -\vec{F}_1^*$ и $\vec{F}_2 = -\vec{F}_2^*$.
- Када се одређује сила којом гас делује на површ занемарује се $\vec{F}_A$ (због мале вредности ρ_g), па се сила на криву површ своди на: $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$.

3.7 Судови под притиском. Мариотова формула

- Када је суд испуњен флуидом под притиском много већим од атмосферског, осим одређивања силе на поклопац суда, потребно је одредити и **дебљину зида суда** у складу са вредношћу **дозвољеног напона у материјалу** од ког је сачињен.
- Како су **притисци у флуиду високи**, а **димензије суда релативно мале**, при прорачуну се **занемарује утицај Земљине теже на расподелу притиска**, па се сматра да је **притисак константан у суду** без обзира на то да ли је испуњен **гасом** или **течношћу**.
- **Циљ прорачуна** је одређивање **потребне дебљине зида** суда да би суд издржао притисак.
- **Пример**: Цилиндрични суд пречника D полусферног поклопца испуњен је гасом под натпритиском p_m. **Одредити зависност напона у зиду суда од натпритиска** и **потребну дебљину зида суда** при задатој вредности дозвољеног напона σ_d.







- **Сила која оптерећује попречни пресек суда F_p** је сила којом је оптерећен полусферни поклопац суда (једнака је сили на поклопац кружног облика) и **доводи до настајања напона у зиду суда у попречном правцу σ_p**:

$$\underbrace{p_m \frac{\pi D^2}{4}}_{F_p} = \sigma_p D\pi\delta \quad \Rightarrow \quad \boxed{\sigma_p = \frac{p_m D}{4\delta}}$$

- **Сила која оптерећује уздужни пресек суда F_u доводи до настајања напона у зиду суда у уздужном правцу σ_u**:

$$\underset{F_u}{p_m D l} = 2\delta l \sigma_u \quad \Rightarrow \quad \boxed{\sigma_u = \frac{p_m D}{2\delta}}$$

- За **прорачун потребне дебљине зида суда** користи се израз за **напон у уздужном правцу $\boldsymbol{\sigma_u}$** јер је два пута већи од напона у попречном правцу σ_p ($\sigma_u = 2\sigma_p$).
- Он **треба да буде мањи од дозвољеног напона истезања у суду $\boldsymbol{\sigma_d}$, $\boldsymbol{\sigma_u < \sigma_d}$**.
- Из овог услова следи **Мариотова формула** за прорачун дебљине зида суда под притиском:

$$\boxed{\delta > \frac{p_m D}{2\sigma_d}}$$