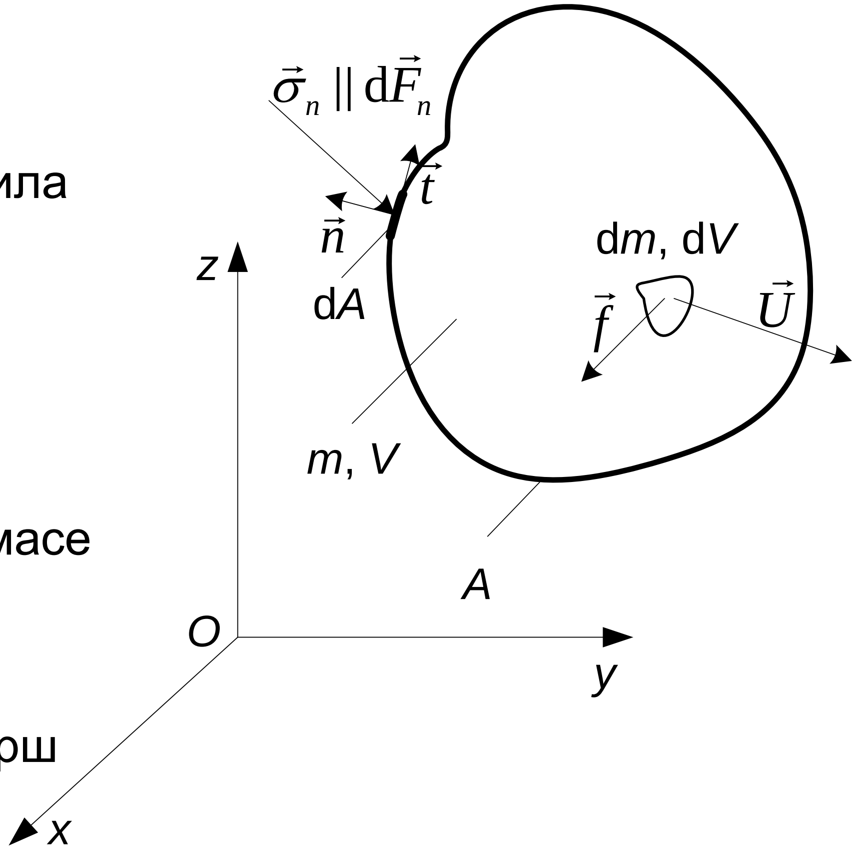
2 Анализа напонског стања у флуиду

2.1 Масене (запреминске) и површинске силе. Вектор напона.

Силе које делују на флуд деле се на:

- **Масене** или запреминске силе $\vec{F}_m$ које делују на масу свих флуидних делића унутар посматране запремине. То су сила Земљине теже, инерцијалне силе, електромагнетна сила…
- **Површинске** силе $\vec{F}_n$ су силе којима околина делује преко преко граничне површи *A* на посматрани део флуида масе *m*. То су силе којима одбачени флуид преко површи *A* делује на посматрану запремину или силе којима чврста површ делује на флуид са којим је у контакту.



Масене силе

- $\vec{f}\left[\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}}\right]$ - јединична масена сила (сила по јединици масе флуида);
- $\mathrm{d}\vec{F}_m = \vec{f}\rho\mathrm{d}V$ - масена сила која делује на флуидни делић масе dm=ρdV;
- $\vec{F}_m = \iiint\limits_V \vec{f}\rho\mathrm{d}V$ - резултујућа масена сила која делује на целокупну масу флуида m;

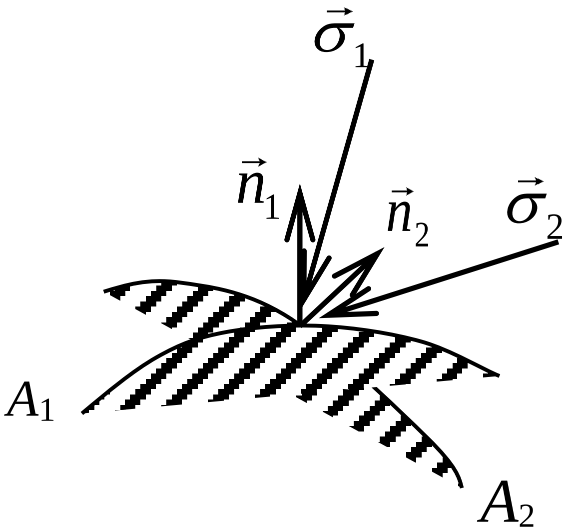
Површинске силе

- $\vec{\sigma}_n\left[\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}\right]$ - површинска сила по јединици површине, **вектор напона;**
- $\mathrm{d}\vec{F}_n = \vec{\sigma}_n\mathrm{d}A$ - елементарна површинска сила (делује на елементарну површ dA);
- $\vec{F}_n = \oiint\limits_A \vec{\sigma}_n\mathrm{d}A$ - резултујућа површинска сила (делује на целокупну површ A);

Вектор напона $\vec{\sigma}_n$ и елементарна површинска сила $\mathrm{d}\vec{F}_n$ су колинеарни вектори.

- **Вектор напона** $\vec{\sigma}_n$ у посматраној тачки **зависи од вектора положаја**, **времена** и **оријентације површи у тој тачки**.

$$\vec{\sigma}_n = \vec{\sigma}_n\left(\vec{r}, t, \vec{n}\right)$$



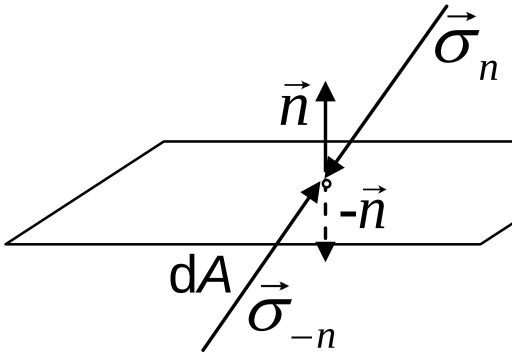
Због тога је при одређивању **напонског стања** у датој тачки потребно дефинисати и ***раван*** за коју се одређује вектор напона. Кроз неку ***тачку*** у којој треба одредити ***напонско стање*** у неком тренутку пролази ***бесконачно*** **много** ***површи*** различитих орјентација које се дефинишу правцем орта нормале $\vec{n}$.

Вектор напона се одређује у датој тачки за дату раван.

Пројекције вектора напона на осе *x*, *y*, *z*: $\vec{\sigma}_n = \sigma_{nx}\vec{i} + \sigma_{ny}\vec{j} + \sigma_{nz}\vec{k}$

Пројекције вектора напона на правац $\vec{n}$ и $\vec{t}$: $\vec{\sigma}_n = \sigma_{nn}\vec{n} + \sigma_{nt}\vec{t}$

Кошијева једначина. Дефинисање вектора напона у некој тачки



3. Њутнов закон (закон акције и реакције)

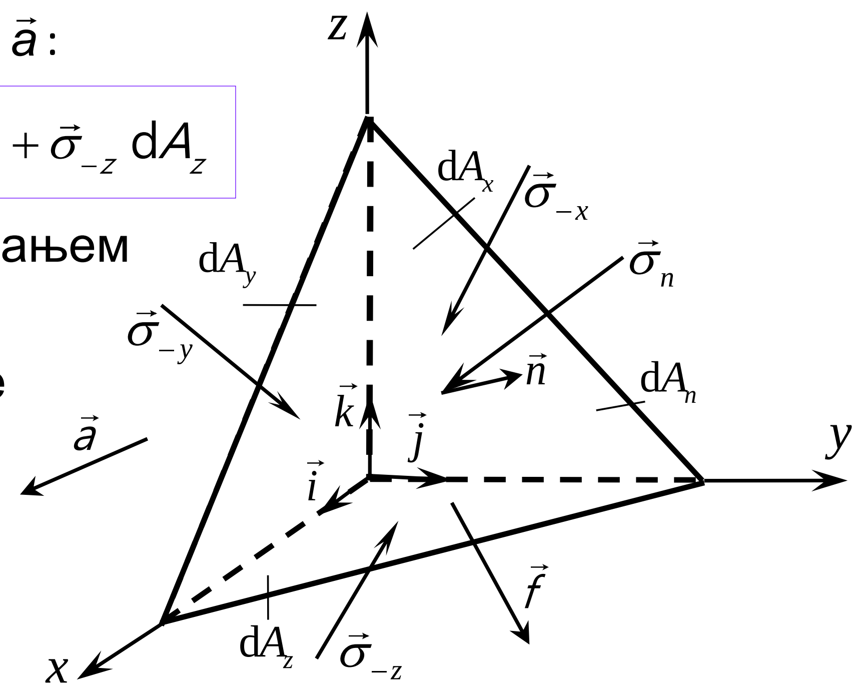
$$\boxed{\vec{\sigma}_n \mathrm{d}A = -\vec{\sigma}_{-n} \mathrm{d}A \Rightarrow \vec{\sigma}_n = -\vec{\sigma}_{-n}}$$

Други Њутнов закон примењен на фл. делић облика тетраедра који се креће убрзањем $\vec{a}$:

$$\boxed{\vec{a}\rho \mathrm{d}V = \vec{f}\rho \mathrm{d}V + \vec{\sigma}_n \mathrm{d}A_n + \vec{\sigma}_{-x} \mathrm{d}A_x + \vec{\sigma}_{-y} \mathrm{d}A_y + \vec{\sigma}_{-z} \mathrm{d}A_z}$$

Како је $\mathrm{d}V \sim (\mathrm{d}l)^3$ и $\mathrm{d}A_i \sim (\mathrm{d}l)^2$, занемаривањем малих величина вишег реда $(\mathrm{d}V)$, и дељењем леве и десне стране претходне једначине са dA_n следи:

$$0 = \vec{\sigma}_n + \vec{\sigma}_{-x} \underbrace{\frac{\mathrm{d}A_x}{\mathrm{d}A_n}}_{\cos\alpha} + \vec{\sigma}_{-y} \underbrace{\frac{\mathrm{d}A_y}{\mathrm{d}A_n}}_{\cos\beta} + \vec{\sigma}_{-z} \underbrace{\frac{\mathrm{d}A_z}{\mathrm{d}A_n}}_{\cos\gamma}$$



α - угао између dA_n и dA_x (dA_n cosα = dA_x) тј. између $\vec{n}$ и $\vec{i}$ $\rightarrow \left|\vec{n}\right|\cos\alpha = n_x$

β - угао између dA_n и dA_y (dA_n cosβ = dA_y) тј. између $\vec{n}$ и $\vec{j}$ $\rightarrow \left|\vec{n}\right|\cos\beta = n_y$

γ - угао између dA_n и dA_z (dA_n cosγ = dA_z) тј. између $\vec{n}$ и $\vec{k}$ $\rightarrow \left|\vec{n}\right|\cos\gamma = n_z$

Орт нормале изражен преко пројекција на осе *x*, *y* и *z* је:

$$\vec{n} = n_x\vec{i} + n_y\vec{j} + n_z\vec{k}$$

Како је: $-\vec{\sigma}_{-n} = \vec{\sigma}_n, \; -\vec{\sigma}_{-x} = \vec{\sigma}_x, \; -\vec{\sigma}_{-y} = \vec{\sigma}_y, \; -\vec{\sigma}_{-z} = \vec{\sigma}_z \Rightarrow$

Кошијева једначина:

$$\boxed{\vec{\sigma}_n = \vec{\sigma}_x\, n_x + \vec{\sigma}_y\, n_y + \vec{\sigma}_z\, n_z}$$

Ако су у некој тачки познати вектори напона за три међусобно управне равни $\left(\vec{\sigma}_x, \vec{\sigma}_y, \vec{\sigma}_z\right)$, тада се може одредити и вектор напона $\vec{\sigma}_n$ у тој тачки за било коју раван чији је орт $\vec{n}$.

Вектори напона $\left(\vec{\sigma}_n, \vec{\sigma}_x, \vec{\sigma}_y, \vec{\sigma}_z\right)$ могу се изразити преко својих пројекција на правце *x*, *y*, *z*:

$$\begin{aligned}
\vec{\sigma}_n &= \sigma_{nx}\vec{i} + \sigma_{ny}\vec{j} + \sigma_{nz}\vec{k} \\
\vec{\sigma}_x &= \sigma_{xx}\vec{i} + \sigma_{xy}\vec{j} + \sigma_{xz}\vec{k} \\
\vec{\sigma}_y &= \sigma_{yx}\vec{i} + \sigma_{yy}\vec{j} + \sigma_{yz}\vec{k} \\
\vec{\sigma}_z &= \sigma_{zx}\vec{i} + \sigma_{zy}\vec{j} + \sigma_{zz}\vec{k}
\end{aligned}$$

Пројекције Кошијеве једначине $\vec{\sigma}_n = \vec{\sigma}_x\, n_x + \vec{\sigma}_y\, n_y + \vec{\sigma}_z\, n_z$ на правац оса *x*, *y*, *z*:

$$\begin{aligned}
\sigma_{nx} &= \sigma_{xx}\, n_x + \sigma_{yx}\, n_y + \sigma_{zx}\, n_z \\
\sigma_{ny} &= \sigma_{xy}\, n_x + \sigma_{yy}\, n_y + \sigma_{zy}\, n_z \Rightarrow \\
\sigma_{nz} &= \sigma_{xz}\, n_x + \sigma_{yz}\, n_y + \sigma_{zz}\, n_z
\end{aligned}
\quad
\begin{bmatrix} \sigma_{nx} \\ \sigma_{ny} \\ \sigma_{nz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_x & n_y & n_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

$$\vec{\sigma}_n = \vec{n}\cdot\tilde{\sigma}, \quad \vec{\sigma}_x = \vec{i}\cdot\tilde{\sigma}, \quad \vec{\sigma}_y = \vec{j}\cdot\tilde{\sigma}, \quad \vec{\sigma}_z = \vec{k}\cdot\tilde{\sigma}$$

$\tilde{\sigma}$ је тензор напона у тачки у којој су $\vec{\sigma}_n, \vec{\sigma}_x, \vec{\sigma}_y, \vec{\sigma}_z$ вектори напона.

- **Тензор напона** $\tilde{\sigma}$ је тензор дугог реда (9 компонената) **:**

$$\tilde{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}, \quad \text{у индексној нотацији} \quad \left(\tilde{\sigma} = \left\| \sigma_{ij} \right\| \right)$$

- σ_{ij} су **елементи тензора напона** (**компоненте напона**).

- Физичка интерпретација елемената матрице $\tilde{\sigma}$:
  Свака *компонента* σ_{ij} представља *пројекцију вектора напона који делује на површ чија је спољашња нормала смера осе i на правац осе j*.
- **Тензор напона** $\tilde{\sigma}$ је физичка величина којом се дефинише **напонско стање у флуиду**, тј. одређује **вектор напона** за *било коју површ у некој тачки флуида*.
- *Бесконачан број вектора напона* за *бесконачан број површи у једној тачки* одређује се преко *једног тензора напона*.

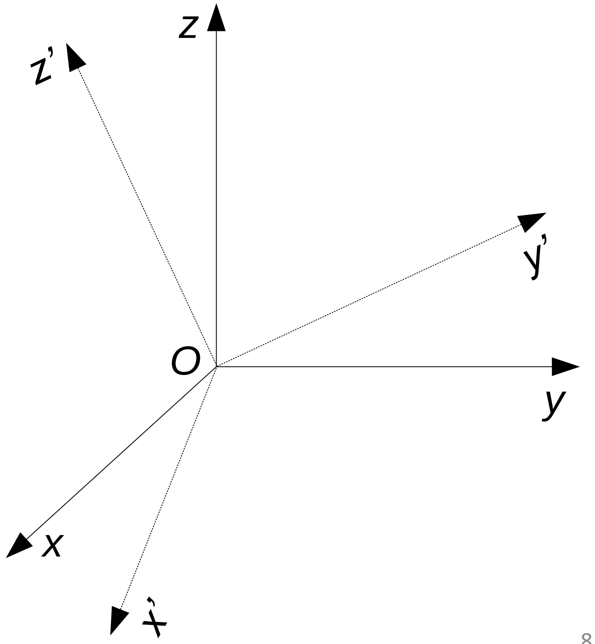
Особине тензора напона $\tilde{\sigma}$

1. **Симетричан тензор** (доказује се применом једначине одржања момента количине кретања). **Довољно** је знати **6 елемената**.

$$\sigma_{xy} = \sigma_{yx}, \sigma_{yz} = \sigma_{zy}, \sigma_{xz} = \sigma_{zx}$$

2. **Збир нормалних напона у једној тачки је исти** без обзира на избор координатног система

$$\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz} = \sigma_{x'x'} + \sigma_{y'y'} + \sigma_{z'z'}$$

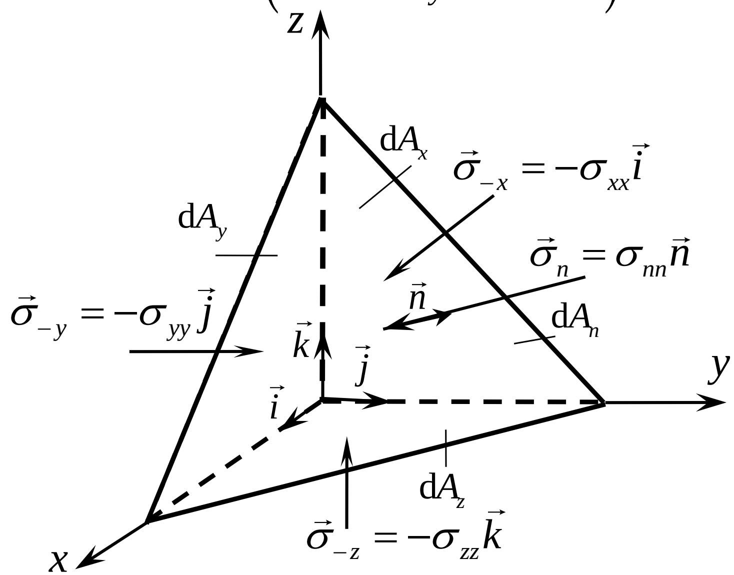


3. При **мировању и невискозном струјању флуида нема тангенцијалних напона** $\sigma_{xy}=\sigma_{yx}=\sigma_{yz}=\sigma_{zy}=\sigma_{xz}=\sigma_{zx}=0$ или $\sigma_{ij}=0 \quad i\neq j$

Постоје само нормални напони, па се Кошијева једначина

$$\vec{\sigma}_n=\vec{\sigma}_x\, n_x+\vec{\sigma}_y\, n_y+\vec{\sigma}_z\, n_z$$

своди на: $\sigma_{nn}\left(n_x\vec{i}+n_y\vec{j}+n_z\vec{k}\right)=\sigma_{xx}\, n_x\vec{i}+\sigma_{yy}\, n_y\vec{j}+\sigma_{zz}\, n_z\vec{k}$



$$\Rightarrow$$

$$\boxed{\sigma_{nn}=\sigma_{xx}=\sigma_{yy}=\sigma_{zz}=-p}$$

$$\tilde{\sigma}=\begin{bmatrix}\sigma_{xx} & 0 & 0\\ 0 & \sigma_{yy} & 0\\ 0 & 0 & \sigma_{zz}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-p & 0 & 0\\ 0 & -p & 0\\ 0 & 0 & -p\end{bmatrix}$$

- При мировању и невискозном струјању флуида постоје само нормални напони, при чему су они у једној тачки међусобно једнаки без обзира на оријентацију површи. **Вредност нормалних напона** је тада **једнака негативној вредности притиска**. **Вектор напона** је тада $\boxed{\vec{\sigma}_n=\vec{n}\cdot\tilde{\sigma}=-p\vec{n}}$

4. **Вредност притиска** у некој тачки флуида у општем случају једнака је **негативној средњој вредности нормалних напона**:

$$p = -\frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}}{3}$$

- Ово је **очигледно при мировању и невискозном струјању флуида**.
- **При вискозном струјању** флуида **укупан напон** се може приказати као **збир напона при мировању** или **невискозном струјању** и **напона који су последица вискозности**:

$$\tilde{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{bmatrix}$$

Тада су **нормални напони** $\sigma_{xx} = -p + \tau_{xx},\ \sigma_{yy} = -p + \tau_{yy},\ \sigma_{zz} = -p + \tau_{zz},$ па из релације за одређивање притиска следи да **збир нормалних напона** који су последица **вискозности** мора бити **једнак нули**:

$$p = -\frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}}{3} = -\frac{-p + \tau_{xx} - p + \tau_{yy} - p + \tau_{zz}}{3} \Rightarrow \boxed{\tau_{xx} + \tau_{yy} + \tau_{zz} = 0}$$

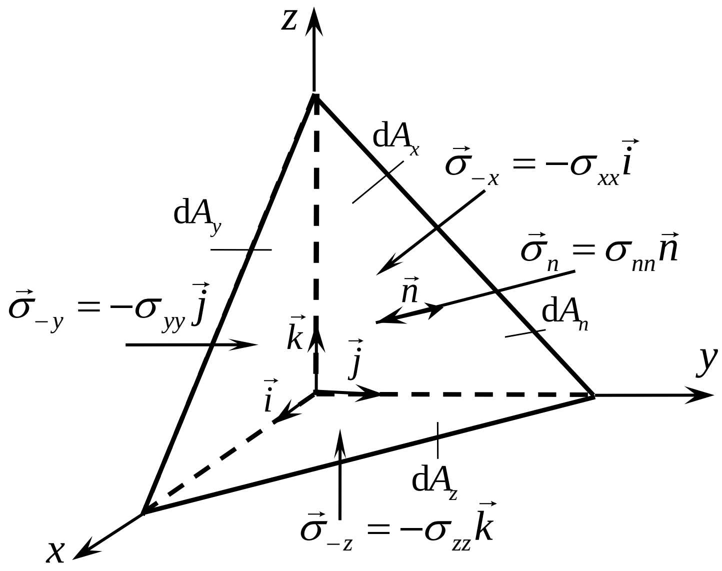
3 Мировање флуида

3.1 Стање напона у флуиду који мирује. Статички притисак.

- У **флуиду** који **мирује нема тангенцијалних напона**.

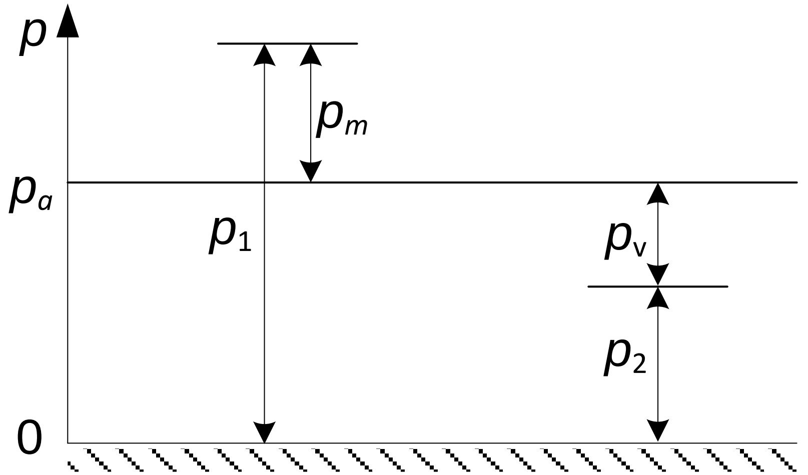
$$\sigma_{xy} = \sigma_{yx} = \sigma_{yz} = \sigma_{zy} = \sigma_{xz} = \sigma_{zx} = 0 \quad \text{или} \quad \sigma_{ij} = 0 \quad i \neq j$$

- **Постоје само нормални напони. Вредност нормалног напона у** једној **тачки је иста без обзира на оријентацију површи** у њој. Вредност **напона** је једнака **негативној вредности притиска**.



$$\tilde{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{bmatrix}$$

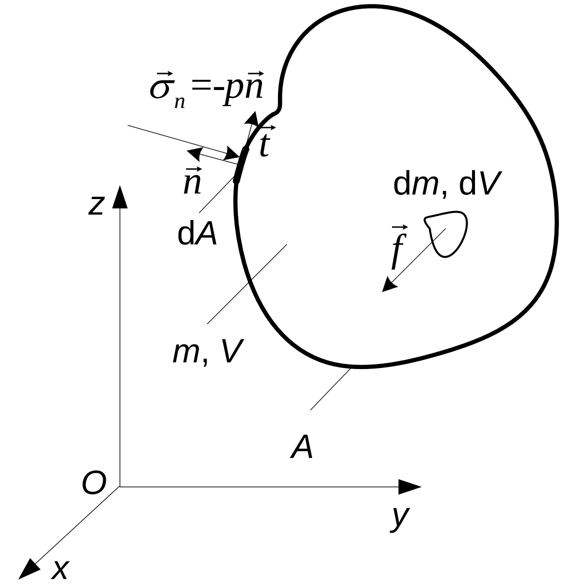
$$\sigma_{nn} = \sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = -p, \quad \vec{\sigma}_n = -p\vec{n}$$



- **Атмосферски притисак $\boldsymbol{p_a}$** је притисак околног ваздуха. Зависи од временских услова и надморске висине. За стандардну атмосферу на нивоу мора износи $p_a \approx 10^5$Pa=1bar.
- **Апсолутни притисак** је притисак мерен у односу на апсолутну нулу. Може бити већи (p_1) или мањи (p_2) од атмосферског.
- **Натпритисак $\boldsymbol{p_m}$** постоји у флуиду када је апсолутни притисак (p_1) већи од атмосферског и представља разлику између апсолутног и атмосферског притиска ($p_m = p_1 - p_a$).
- **Потпритисак $\boldsymbol{p_v}$** постоји у флуиду када је апсолутни притисак (p_2) мањи од атмосферског и представља разлику између атмосферског и апсолутног притиска ($p_v = p_a - p_2$).
- Натпритисак и потпритисак су **релативни притисци**, који представљају одступање апсолутног од атмосферског притиска и позитивне су вредности ($p_1 = p_a + p_m$, $p_2 = p_a - p_v$).

3.2 Ојлерова једначина статике флуида

Да би флуид мировао, збир свих сила које делују на њега мора да буде једнак нули.



$$\vec{F}_m + \vec{F}_n = 0$$

$$\iiint_V \vec{f}\rho \,\mathrm{d}V + \oiint_A \vec{\sigma}_n \mathrm{d}A = 0$$

$$\iiint_V \vec{f}\rho \,\mathrm{d}V + \oiint_A -p\vec{n}\,\mathrm{d}A = 0$$

Помоћу теореме Гаус-Остроградског за претварање површинског у запремински интеграл $\oiint_A n_x (\ )\mathrm{d}A = \iiint_V \frac{\partial}{\partial x}(\ )\mathrm{d}V$ следи:

$$\oiint_A p\vec{n}\,\mathrm{d}A = \oiint_A p\left(n_x\vec{i} + n_y\vec{j} + n_z\vec{k}\right)\mathrm{d}A = \iiint_V \overbrace{\left(\frac{\partial p}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial p}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial p}{\partial z}\vec{k}\right)}^{\nabla p}\mathrm{d}V = \iiint_V \mathrm{grad}p\,\mathrm{d}V$$

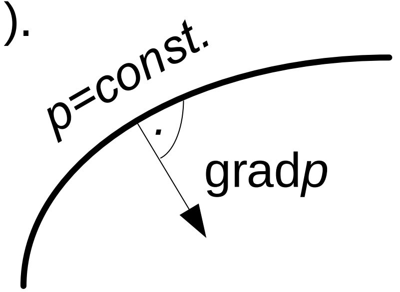
На тај начин се добија **интегрални облик Ојлерове једначине**:

$$\boxed{\iiint_V \left(\rho\,\vec{f} - \mathrm{grad}p\right)\mathrm{d}V = 0}$$

Да би **неодређени запремински интеграл** увек био **једнак нули**, **подинтегрална функција** мора да буде **једнака нули**. Тако се добија **диференцијални** облик **Ојлерове једначине** (**векторска** форма):

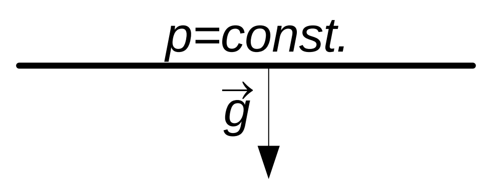
$$\boxed{\rho\vec{f} = \mathrm{grad}\,p \quad \text{или} \quad \rho\vec{f} = \nabla p}$$

- ∇ је векторски и диференцијални оператор: $\nabla = \left(\dfrac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \dfrac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \dfrac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right)$
- Вектор **grad*p*** је **управан на изобарске површи** (*p=const.*).
- Вектор **grad*p* *усмерен*** је **у смеру пораста *p***
- Из Ојлерове једначине следи да је **јединична масена сила истог правца и смера** као **grad*p*,** што значи да је **управна на изобарске површи.**



$\Rightarrow$

- Ако је **поље масених сила хомогено** (јединична масена сила иста је за све флуидне делиће) **изобарске површи** су **равни.**
- У **флуиду који мирује** у пољу силе Земљине теже, **масена сила усмерена је вертикално наниже**:
  - **изобарске површи су хоризонталне равни;**
  - **притисак расте са дубином.**



Скаларним множењем векторског облика Ојлерове једначине елементом вектора положаја $\mathrm{d}\vec{r} = \mathrm{d}x\,\vec{i} + \mathrm{d}y\,\vec{j} + \mathrm{d}z\,\vec{k}$

$$\rho\left(f_x\vec{i} + f_y\vec{j} + f_z\vec{k}\right) = \left(\frac{\partial p}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial p}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial p}{\partial z}\vec{k}\right) \Big/ \cdot \left(\mathrm{d}x\vec{i} + \mathrm{d}y\vec{j} + \mathrm{d}z\vec{k}\right)$$

$$\rho\left(f_x \mathrm{d}x + f_y \mathrm{d}y + f_z \mathrm{d}z\right) = \frac{\partial p}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial p}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial p}{\partial z}\mathrm{d}z$$

добија се **скаларни облик Ојлерове једначине**:

$$\boxed{\rho\left(f_x \mathrm{d}x + f_y \mathrm{d}y + f_z \mathrm{d}z\right) = \mathrm{d}p}$$

Ако је **позната густина флуида** и **поље масених сила**, тј. пројекције масених сила на карактеристичне правце (x, y, z), из претходне једначине се **одређује поље притиска у флуиду који мирује**.

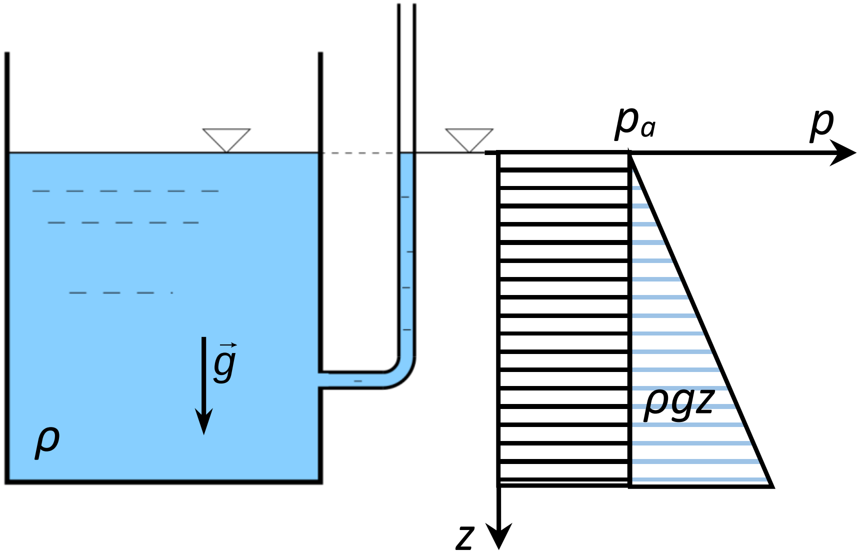
3.3 Мировање нестишљивог флуида

3.3.1 Нестишљив флуид у пољу силе Земљине теже

- <u>**Пример 1**</u>**:** Одредити **поље притиска у отвореном суду** испуњеном нестишљивим Флуидом у пољу силе Земљине теже.

Поље притиска одређује се из **Ојлерове једначине**:

$$\mathrm{d}p = \rho\left(f_x \mathrm{d}x + f_y \mathrm{d}y + f_z \mathrm{d}z\right)$$



На флуид делује само сила З. теже, па су пројекције запреминске силе на осе x,y и z: f_x=0, f_y=0 и f_z=g

Ојлерова једначина се своди на:

$$\boxed{\mathrm{d}p = \rho g \mathrm{d}z}$$

Интеграл ове једначине је $p = \rho g z + C$

Из услова $z = 0, p = p_a$, следи да је константа интеграције $C = p_a$, па је **коначно решење за расподелу притиска у флуиду**:

$$p = p_a + \rho g z \quad \text{или} \quad \underbrace{p - p_a}_{\text{релативни притисак}} = \rho g z$$

- **Расподела притиска** у нестишљивом флуиду је **линеарна**.
- **Притисак** у течности **расте са порастом дубине**, тј. координате *z* ако је она усмерена наниже.
- **Слободна површ** је **изобарска** површ на којој је **притисак једнак атмосферском**.
- Позиција **слободне површи** обележава се симболом ∇.
- Једначина слободне површи следи из услова да је на њој $p=p_a$.
  У разматраном примеру **слободна површ је раван** одређена једначином:

$$z_{\nabla}=0$$

- Једначина **било које изобарске површи на којој је притисак p_1** одређује се из једначине расподеле притиска из услова да је $p=p_1$:

$$z_{p_1}=\frac{p_1-p_a}{\rho g}$$

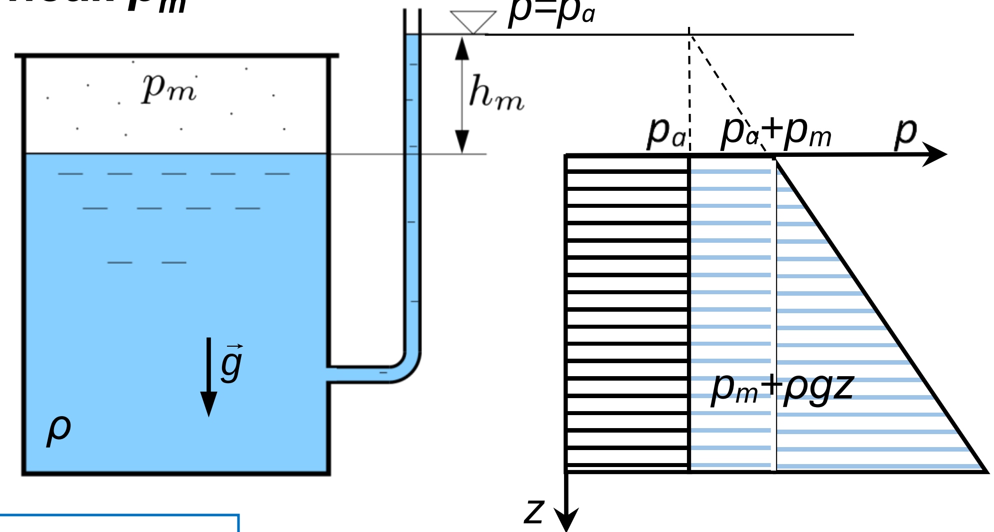
- **Изобарске** површи су **хоризонталне равни**
- У свим тачкама нестишљивог флуида у пољу силе Земљине теже **на истој дубини је исти притисак**.

- **<u>Пример 2</u>:** Одредити **поље притиска у затвореном суду** када је **изнад течности гас у ком влада натпритисак p_m**

На флуид делује само сила Земљине теже, па је:

$$p = \rho g z + C$$

Из услова z=0, $p=p_a+p_m$, добија се константа интеграције $C=p_a+p_m$



Расподела притиска у флуиду је:

$$p = p_a + p_m + \rho g z \quad \text{или} \quad \underbrace{p - p_a}_{\text{релативни притисак}} = p_m + \rho g z$$

$$p_a + p_m = p_a + \rho g h_m$$

$$h_m = \frac{p_m}{\rho g}$$

Једначина слободне површи следи из услова да је на њој ***p=p***$\boldsymbol{p=p_a}$

Из једначине за расподелу притиска следи **једначина слободне површи**:

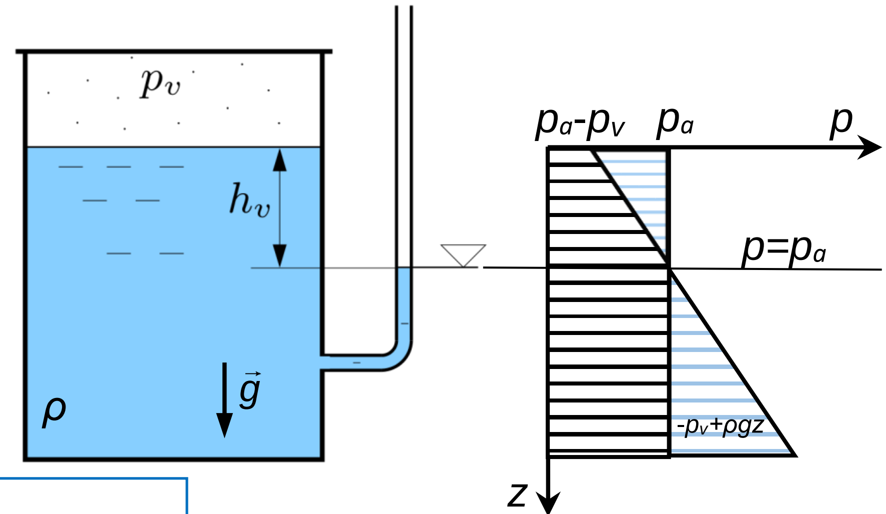
$$z_\nabla = -\frac{p_m}{\rho g}$$

- **Пример 3**: Одредити **поље притиска у затвореном суду** када је **изнад течности гас у ком влада потпритисак p_v**

На флуид делује само сила Земљине теже, па је:

$$p = \rho g z + C$$

Из услова z=0, p=p_a- p_v, добија се константа интеграције C=p_a- p_v



Расподела притиска у флуиду је:

$$\boxed{p = p_a - p_v + \rho g z \quad \text{или} \quad \underbrace{p - p_a}_{\text{релативни притисак}} = -p_v + \rho g z}$$

$$p_a - p_v + \rho g h_v = p_a$$

$$h_v = \frac{p_v}{\rho g}$$

Једначина слободне површи следи из услова да је на њој ***p=p_a***

Из једначине за расподелу притиска следи **једначина слободне површи**:

$$\boxed{z_\nabla = \frac{p_v}{\rho g}}$$

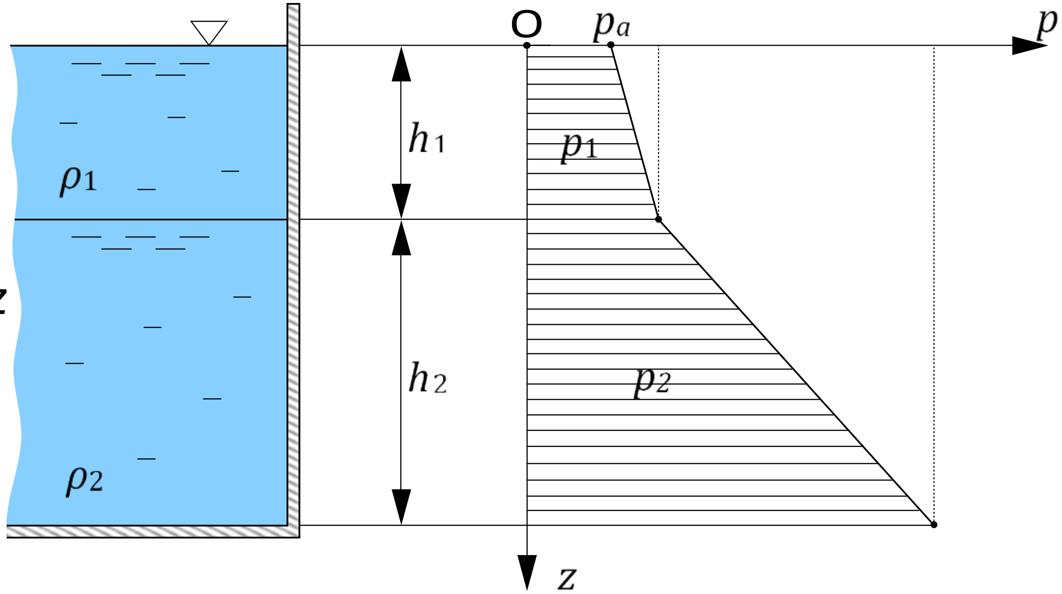
- **<u>Пример 4</u>:** Одредити **поље притиска у суду са две течности које се не мешају** ($\rho_1 < \rho_2$).

Расподела притиска у течности густине ρ_1:

$$p_1 = \rho_1 g z + C_1$$

$$z = 0, \;\; p_1 = p_a \Rightarrow C_1 = p_a$$

$$p_1 = p_a + \rho_1 g z \quad \text{или} \quad \underbrace{p_1 - p_a}_{\text{релативни притисак}} = \rho_1 g z$$



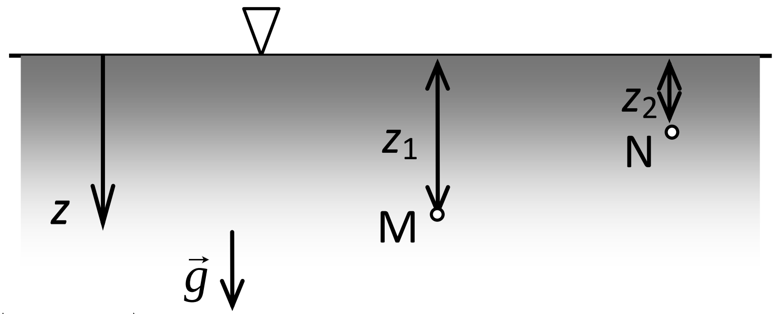
Расподела притиска у течности густине ρ_2:

$$p_2 = \rho_2 g z + C_2$$

$$z = h_1, \;\; p_2 = p_1 = p_a + \rho_1 g h_1 \;\; \Rightarrow \;\; C_2 = p_a + g h_1 \left(\rho_1 - \rho_2\right)$$

$$p_2 = p_a + g h_1 \left(\rho_1 - \rho_2\right) + \rho_2 g z \quad \text{или} \quad \underbrace{p_2 - p_a}_{\text{релативни притисак}} = g h_1 \left(\rho_1 - \rho_2\right) + \rho_2 g z$$

Паскалов закон: **Промена притиска** изазвана у једној тачки нестишљивог флуида у стању мировања, **преноси се равномерно** и **у све остале тачке** простора испуњеног тим флуидом. Доказ:



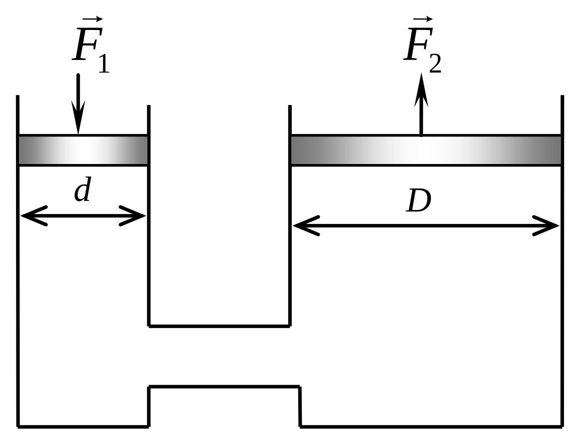
$$p_M = p_a + \rho g z_1$$

$$p_N = p_a + \rho g z_2$$

$$p_M = p_N + \rho g (z_1 - z_2)$$

$$p_M + \Delta p_M = p_N + \Delta p_N + \rho g (z_1 - z_2) \quad \Rightarrow \quad \Delta p_M = \Delta p_N$$

Ова особина се примењује код **хидрауличке пресе**. Деловањем силе F_1 на мањи клип, притисак у флуиду на том месту се повећа за $\Delta p = 4F_1/(\pi d^2)$. На основу Паскаловог закона притисак ће се за толико повећати и у свим другим тачкама течности.



$$\Delta p = \frac{4F_1}{d^2\pi} = \frac{4F_2}{D^2\pi} \Rightarrow F_2 = F_1 \frac{D^2}{d^2} \text{ тј. } F_2 > F_1$$