6.10 Теорија сличности

- **Теорија сличности омогућава испитивања на моделима (не на реалном објекту од интереса) и примену тих резултата испитивања на реални објекат**.
- За примену теорије сличности **неопходно је обезбедити:**

1. **ГЕОМЕТРИЈСКУ СЛИЧНОСТ**

- **Димензије објекта и модела**, као и **димензије струјног простора пропорционалне су у сва три правца** ($L/L_m=x/x_m=y/y_m=z/z_m=k_L$); **свака тачка објекта има одговарајућу тачку на моделу (хомологе тачке)**;

2. **КИНЕМАТИЧКУ СЛИЧНОСТ**

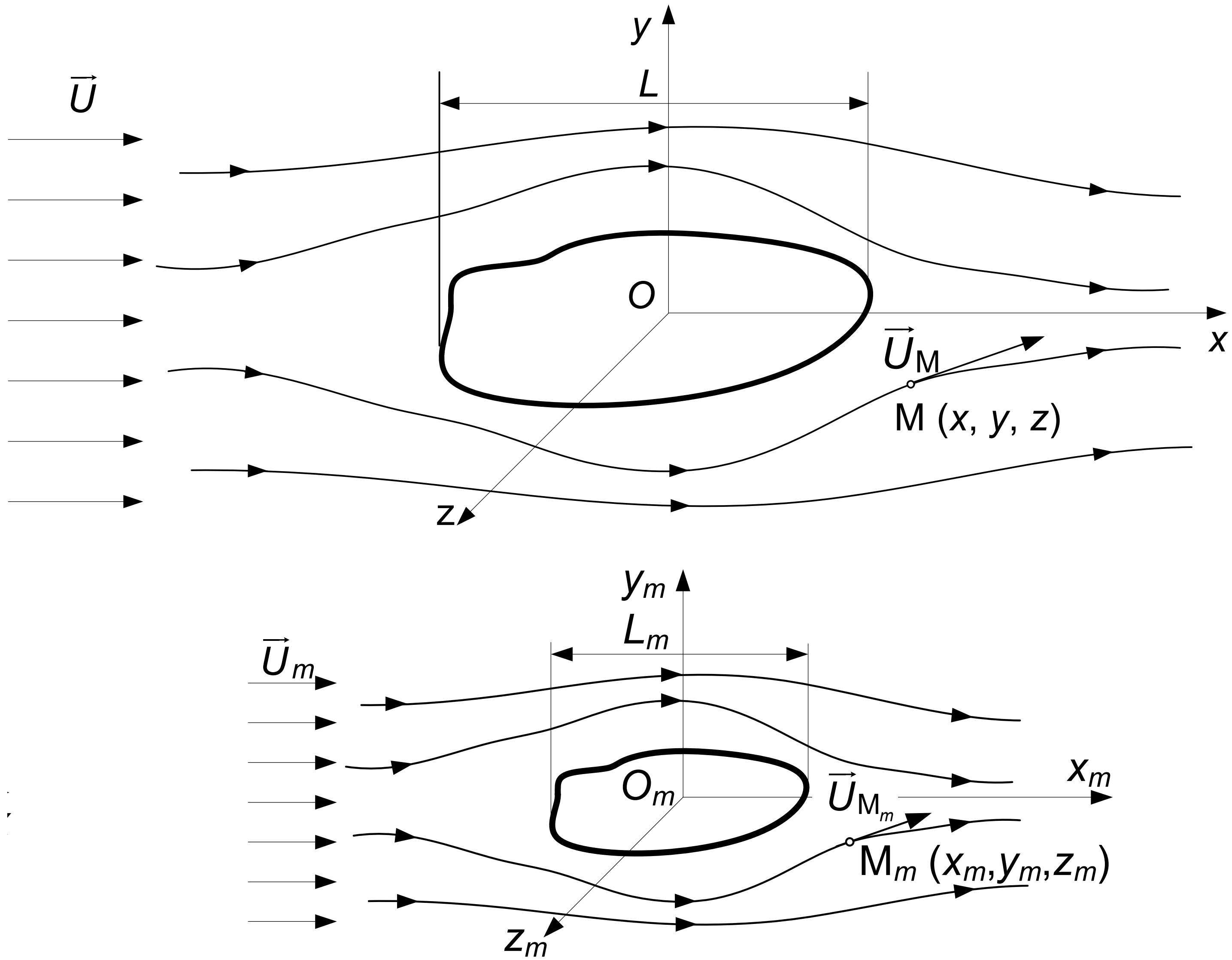
- **Хомологи флуидни делићи налазе се у хомологим тачкама у хомологим тренуцима времена** ($t/t_m=k_t$, где су t и t_m карактеристични временски интервали на моделу и објекту $U/U_m=u/u_m=v/v_m=w/w_m=k_U$)

3. **ДИНАМИЧКУ СЛИЧНОСТ**

- **Односи између сила на моделу и објекту су исти**. **Струјање на моделу и објекту** описано је **истим бездимензијским једначинама.** У овим једначинама се јављају **карактеристични бездимензијски бројеви** чија **једнакост обезбеђује динамичку сличност**.

МОДЕЛА И ОБЈЕКТА

Геометријска, кинематичка и динамичка сличност



- **Навије-Стоксова једначина** у **векторском** облику

$$\frac{\mathrm{D}\vec{U}}{\mathrm{D}t} = \vec{f} - \frac{1}{\rho}\mathrm{grad}p + \nu\Delta\vec{U} + \frac{1}{3}\nu\,\mathrm{grad}(\mathrm{div}\vec{U})$$

може се написати у **индексној нотацији**:

$$\underbrace{\rho\frac{\partial u_i}{\partial t}}_{\substack{\text{I}\\ \text{инерцијална сила}\\ \text{(локални део)}}} + \underbrace{\rho u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}}_{\substack{\text{II}\\ \text{инерцијална сила}\\ \text{(конвективни део)}}} = \underbrace{\rho f_i}_{\substack{\text{III}\\ \text{масена сила}}} - \underbrace{\frac{\partial p}{\partial x_i}}_{\substack{\text{IV}\\ \text{сила притиска}}} + \underbrace{\eta\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + \frac{1}{3}\eta\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial u_j}{\partial x_j}}_{\substack{\text{V}\\ \text{вискозна сила}}}$$

- Једначина се своди се на **бездимензијски облик** увођењем **референтних вредности (размера)** за све величине: **брзину U_r, време T_r, дужину L_r, притисак p_r, масену силу f_r** и **густину ρ_r**.
- Све **величине** се своде на **бездимензијски облик дељењем** са **референтним вредностима**:

$$\tilde{u}_i = \frac{u_i}{U_r},\quad \tilde{t} = \frac{t}{T_r},\quad \tilde{x}_i = \frac{x_i}{L_r},\quad \tilde{p} = \frac{p}{p_r},\quad \tilde{F} = \frac{F}{F_r},\quad \tilde{\rho} = \frac{\rho}{\rho_r}.$$

- **Навије-Стоксова једначина у бездимензијском облику** гласи:

$$\frac{\rho_r U_r}{t_r}\underbrace{\tilde{\rho}\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial \tilde{t}}}_{\substack{\text{I}\\ \text{инерцијална сила}\\ \text{(локални део)}}}+\frac{\rho_r U_r^2}{L_r}\underbrace{\tilde{\rho}\tilde{u}_j\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial \tilde{x}_j}}_{\substack{\text{II}\\ \text{инерцијална сила}\\ \text{(конвективни део)}}}=\rho_r f_r\underbrace{\tilde{\rho}\tilde{f}_i}_{\substack{\text{III}\\ \text{масена сила}}}-\frac{p_r}{L_r}\underbrace{\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}_i}}_{\substack{\text{IV}\\ \text{сила притиска}}}+\frac{\eta_r U_r}{L_r^2}\underbrace{\left(\tilde{\eta}\frac{\partial^2 \tilde{u}_i}{\partial \tilde{x}_j^2}+\frac{1}{3}\tilde{\eta}\frac{\partial}{\partial \tilde{x}_i}\frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial \tilde{x}_j}\right)}_{\substack{\text{V}\\ \text{вискозна сила}}}$$

- Када се претходна једначина подели коефицијентом који се налази уз бездимензијски конвективни део инерцијалне силе $\rho_r U_r^2/L_r$ уз сваку силу јави се **карактеристичан бездимензијски број**:

$$\underbrace{\frac{L_r}{t_r U_r}}_{\text{St}}\underbrace{\tilde{\rho}\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial \tilde{t}}}_{\substack{\text{I}\\ \text{инерцијална сила}\\ \text{(локални део)}}}+\underbrace{\tilde{\rho}\tilde{u}_j\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial \tilde{x}_j}}_{\substack{\text{II}\\ \text{инерцијална сила}\\ \text{(конвективни део)}}}=\underbrace{\frac{f_r L_r}{U_r^2}}_{\frac{1}{\text{Fr}}}\underbrace{\tilde{\rho}\tilde{f}_i}_{\substack{\text{III}\\ \text{масена сила}}}-\underbrace{\frac{p_r}{\rho_r U_r^2}}_{\text{Eu}}\underbrace{\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}_i}}_{\substack{\text{IV}\\ \text{сила притиска}}}+\underbrace{\frac{\eta_r}{L_r U_r \rho_r}}_{\frac{1}{\text{Re}}}\underbrace{\left(\tilde{\eta}\frac{\partial^2 \tilde{u}_i}{\partial \tilde{x}_j^2}+\frac{1}{3}\tilde{\eta}\frac{\partial}{\partial \tilde{x}_i}\frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial \tilde{x}_j}\right)}_{\substack{\text{V}\\ \text{вискозна сила}}}$$

1. **Струхалов број St**

St=$L_r/(t_r U_r)$=**локални део инерцијалне силе / конвективни део инерцијалне силе**;

Струхалов број је значајан код **нестационарних струјања** (St<<1 код стационарног струјања)

2. **Фрудов број Fr**
   Fr= $U_r^2/(gL_r)$= конвективни део инерцијалне силе / масена сила (Земљине теже);
   Ако је мала вредност Фрудовог броја масене силе се морају узети у обзир. Пример су струјања са слободном површи, у рекама, језерима, каналима, морима, при анализи кретања таласа на води, пловних облеката...
3. **Ојлеров број Eu**
   Eu = $p_r/(\rho_r U_r^2)$= сила притиска / конвективни део инерцијалне силе;
   Ојлеров број је значајан када се при струјању притисне силе не могу занемарити. Када се ради о стишљивом струјању уместо Ојлеровог јавља се **Махов број**:
   Eu= $\kappa p/(\kappa\rho U^2)$=1/$\kappa$Ma^2
4. **Рејнолдсов број Re**
   Re=$U_r L_r \rho_r/\eta_r$= конвективни део инерцијалне силе / вискозне силе.
   Када је Рејнолдсов број мали утицај вискозних сила је доминантан у односу на инерцијалне и обрнуто.

- У општем случају **није могуће задовољити једнакост свих бездимензијских бројева на објекту и моделу**, већ је **довољно обезбедити једнакост оних који су од значаја** у одговарајућем случају.

2. Пример Одредити у каквом односу треба да буду брзина и кинематска вискозност флуида који се користе у експерименту како би се обезбедила **једнакост Фрудових и Рејнолдсових бројева** на објекту (брод) и моделу. **Однос карактеристичне дужине брода и испитиваног модела** је $L\,/\,L_m$=10.

Из **једнакости Фрудових бројева** објекта и модела добија се:

$$\frac{U^2}{gL}=\frac{U_m^2}{gL_m}\Rightarrow\frac{U^2}{U_m^2}=\frac{L}{L_m}=10\Rightarrow\frac{U}{U_m}=\sqrt{\frac{L}{L_m}}=\sqrt{10}$$

Из **једнакости Рејнолдсових бројева** објекта и модела добија се:

$$\frac{LU}{\nu}=\frac{L_mU_m}{\nu_m}\Rightarrow\frac{\nu}{\nu_m}=\frac{LU}{L_mU_m}=10\sqrt{10}$$

- Закључак Скоро је немогуће обезбедити флуид вискозности $10\sqrt{10}$ пута мање од воде по којој плови брод (објекат). Следи да је некада компликовано обезбедити и једнакост само два бездимензијска фактора.
- **У сваком случају треба водити рачуна при изабору бездимензијских бројева чија једнакост омогућава успешно извођење и анализу резултата експеримента.**

6.11 Димензијска анализа

- **Димензијска анализа** је веома значајна при **планирању**, **припреми** и **анализи резултата експеримента**, јер **скраћује време** потребно да се добију резултати, чиме се **смањују трошкови експеримента**.
- **Циљ димензијске анализе је да:**

1. **групише физичке величине** које утичу **на разматрани физички феномен (проблем, процес)** у **мањи број бездимензијских величина** које га потпуно дефинишу;
2. **укаже** на **потенцијални закон** анализираног **физичког феномена**;
3. **омогући** да се аналитички или експериментално добијени **резултати систематизују** и представе **концизно**.

- Осим у **механици флуида** и **физици** уопште, примењује се у **биологији**, **друштвеним**, **економским наукама**...

Ваши-Бакингемова или π теорема

- **Физички феномен** који зависи од n физичких величина

$$F\,(x_1, x_2, \ldots, x_n)=0$$

могуће је помоћу димензијске анализе дефинисати помоћу m бездимензијских величина

$$\Phi\,(\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_m)=0, \quad n\text{-}m=p$$

где је ***p* број прамера** тј. **број основних димензија којима се описују све величине које утичу на посматрани феномен**.

- Како се **у механици флуида све величине описују преко 4 основне димензије** (L -за дужину, T–за време, M-за масу, θ-за температуру), **број прамера** је у општем случају ***p*=4**. Ако је **струјање изотермско**, димензија за температуру θ није потребна, па је ***p*=3**.

Основне величине	Јединица у СИ	Димензија
Дужина (l)	m	L
Време (t)	s	T
Маса (m)	kg	M
Температура (T)	K	θ

изотермски проблеми *p*=3

кинематика *p*=2

- Процедура

1. **Одабрати величине** $x_1, x_2, ..., x_n$ које одређују разматрану физичку појаву.
2. Изабрати ***p* независних величина** $x_1, x_2, ..., x_p$ преко којих ће се изразити преостале величине из скупа свих величина $x_1, x_2, ..., x_n$ које одређују разматрану физичку појаву.
   - Величине $x_1, x_2, ..., x_p$ су **међусобно независне** ако се **димензија било које величине** из тог скупа **не може изразити преко димензија преосталих величина** у том скупу (нпр. маса, убрзање и сила не могу формирати ових *p* величина јер су димензије за силу ML/T^2, масу M и убрзање L/T^2, па се свака величина од ове три може изразити помоћу преостале две величине).
   - Скуп независних величина $x_1, x_2, ..., x_p$ је димензијски независан ако је производ $x_1^{a1} \cdot x_2^{a2} \cdot ... \cdot x_p^{ap}$ бездимензијски само за $a_1=a_2=... a_p=0$.
3. Изразити све преостале величине из скупа $x_1, x_2, ..., x_n$ величина које одређују разматрану физичку појаву преко изабраних *p* независних величина. Тако се добија $m=n-p$ бездимензијских величина $\pi_1, \pi_2, ..., \pi_m$ које описују ту физичку појаву.

- Пример Димензијском анализом одредити тангенцијални напон на зиду цеви при стационарном струјању вискозне течности. Претпоставити да напон τ_w зависи од пречника цеви D, густине ρ и динамичке вискозности флуида η, брзине флуида U и висине неравнина на зиду цеви δ.

1. Како се претпоставља да је $\tau_w = \varphi\,(D, \rho, \eta, U, \delta)$, једначину је могуће написати у имплицитном облику:
   $F\,(\tau_w, D, \rho, \eta, U, \delta)=0$, ($n$=6)
   Димензије одабраних величина су:
   $$[\tau_w]=\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{T}^2\mathrm{L}},\quad [D]=\mathrm{L},\quad [\rho]=\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{L}^3},$$
   $$[\eta]=\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{LT}},\quad [U]=\frac{\mathrm{L}}{\mathrm{T}},\quad [\delta]=\mathrm{L}.$$
2. Број прамера преко којих ће се изразити све остале величине је p=3. Има више могућности за избор три независне величине преко којих ће се изразити све остале величине. Овде ће се узети пречник цеви, густина ρ и брзина флуида U. Преко ове три биће изражене преостале величине. Тако ће разматрана појава бити изражена преко m=3 уместо n=6 величина.

3. Физичка појава биће описана се три величине уместо првобитних 6:

a) $\pi_{\tau_w} = D^x \rho^y U^z \tau_w$

$$\mathrm{M^0L^0T^0} = \mathrm{L}^x \left(\mathrm{ML^{-3}}\right)^y \left(\mathrm{LT^{-1}}\right)^z \mathrm{ML^{-1}T^{-2}}$$

$$\left.\begin{array}{c} 0 = y+1 \\ 0 = x-3y+z-1 \\ 0 = -z-2 \end{array}\right\} \Rightarrow y=-1, z=-2, x=0 \Rightarrow \boxed{\pi_{\tau_w} = \frac{1}{\rho U^2}\tau_w}$$

b) $\pi_\eta = D^x \rho^y U^z \eta$

$$\mathrm{M^0L^0T^0} = \mathrm{L}^x \left(\mathrm{ML^{-3}}\right)^y \left(\mathrm{LT^{-1}}\right)^z \mathrm{ML^{-1}T^{-1}}$$

$$\left.\begin{array}{c} 0 = y+1 \\ 0 = x-3y+z-1 \\ 0 = -z-1 \end{array}\right\} \Rightarrow y=-1, z=-1, x=-1 \Rightarrow \boxed{\pi_\eta = \frac{\eta}{\rho U D} = \frac{1}{\mathrm{Re}}}$$

c) $\pi_\delta = D^x \rho^y U^z \delta$

$$\mathrm{M^0L^0T^0} = \mathrm{L}^x \left(\mathrm{ML^{-3}}\right)^y \left(\mathrm{LT^{-1}}\right)^z \mathrm{L}$$

$$\left.\begin{array}{c} 0 = y \\ 0 = x-3y+z+1 \\ 0 = -z \end{array}\right\} \Rightarrow y=0, z=0, x=-1 \Rightarrow \boxed{\pi_\delta = \frac{\delta}{D}}$$

3. Нова функција која описује разматрану физичку појаву биће:

$$\Phi\left(\pi_{\tau_w},\pi_{\eta},\pi_{\delta}\right)=0 \quad \Rightarrow \Phi\left(\frac{1}{\rho U^2}\tau_w,\frac{1}{\mathrm{Re}},k\right)=0$$

Тако се димензијском анализом добија израз за тангенцијални напон:

$$\boxed{\tau_{\mathrm{w}} = \underbrace{f\left(\mathrm{Re},k\right)}_{f\text{ - фактор трења}} \frac{\rho U^2}{2}}$$

на основу ког се одређује губитак услед трења на праволинијским деоницама $\left(Y_{\lambda} = \underbrace{\lambda}_{4f} \frac{l}{D}\frac{U^2}{2}\right)$.

- Пример Како **просечна брзина флуида у близини зида при турбулентном струјању** зависи од тангенцијалног напона, кинематске вискозности, густине и удаљења од зида $\overline{u} = f\left(\tau_w,\nu,\rho,y\right)$ применом **димензијске анализе** показати се да се ова физичка појава може описати **преко мањег броја бездимензијских величине**. **Одредити те бездимензијске величине**.