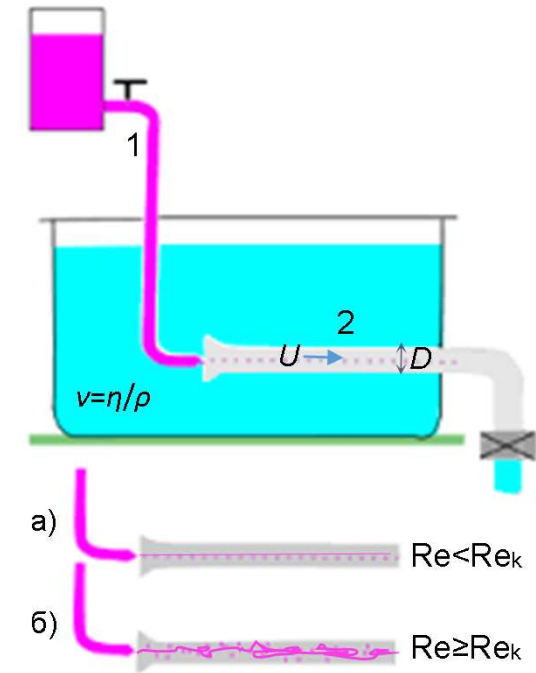


6.8 Турбулентно струјање флуида

- Турбулентна струјања су нерегуларна, нестационарна, хаотична, тродимензијска и дисипативна.
- Већина струјања у техничкој пракси и природи су турбулентна.

6.8.1 Рејнолдсов експеримент

- Рејнолдс је на инсталацији приказаној на слици испитавао услове при којима долази до преображаја ламинарног у турбулентни режим струјања.
- Кроз танку цев 1 (капилару) уводио је обојену течност у радну течност која кроз стаклену цев 2 истиче из резервоара. Визуализација струјања му је омогућила да прати облик струјних влакана у провидној цеви.
- Вршећи експерименте са различитим флуидима (различитих густина ρ и коефицијената динамичке вискозности η), при различитим условима струјања (мењајући средњу брзину струјања флуида U и пречник цеви D), дошао је до закључка да при одређеној вредности бездимензијске величине $\rho U D / \eta$ струјање у цеви постаје турбулентно.



- Та **бездимензијска величина** је по њему названа **Рејнолдсов број**:

$$\text{Re} = \frac{UD}{\nu}, \quad \nu = \frac{\eta}{\rho}$$

- Турбулентно струјање настаје при вредности Re броја која је већа од критичне вредности Re_k . За различите услове струјања Re_k има различите вредности. За струјање флуида кроз цев $\text{Re}_k=2320$.
- Струјање флуида у цеви је:
 - а) **ламинарно** ако је $\text{Re} < 2320$, при чему се **размена количине кретања (импулса) између слојева** (која доводи до унутрашњег трења) **одвија на молекуларном, тј. микроскопском нивоу**;
 - б) **турбулентно** ако је $\text{Re} \geq 2320$, при чему је **размена импулса између слојева флуида видљива, тј. одвија се и на макроскопском нивоу, што повећава унутрашње трење у флуиду; попречне флукуације флуидних делића доводе до интензивне турбулентне размене, па је профил брзине равномернији у односу на ламинарни.**

6.8.2 Рејнолдсове једначине

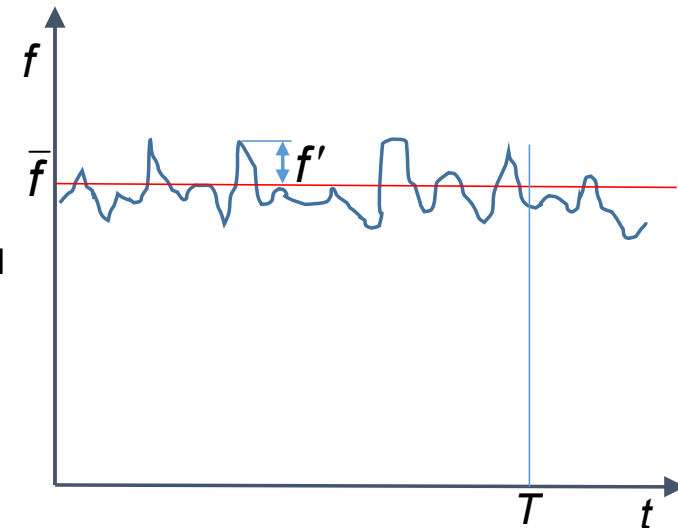
- У **турбулентном струјању**, све физичке величине у свакој тачки струјног простора се **непрестано мењају, тј. уочава са непрекидна флукуација свих физичких величина током времена.**

- Рејнолдс је анализирао турбулентно струјање применом статистичке теорије (Рејнолдсова статистика).
- То подразумева **дефинисање просечне вредности физичке величине у једној тачки струјног простора, тј. вредности физичке величине осредњене у времену у једној тачки струјног простора:**

$$\bar{f}(x, y, z) = \frac{1}{T} \int_0^T f(x, y, z, t) dt$$

- Период осредњавања T бира се тако да његово даље повећање не доводи до промене просечне величине.
- **Вредност сваке физичке величине у некој тачки, у неком тренутку времена, може се приказати као збир њене просечне вредности и флукуације те величине f' (одступање од просечне вредности) у посматраном тренутку:**

$$f(x, y, z, t) = \bar{f}(x, y, z) + f'(x, y, z, t)$$



- Из дефиниције просечне вредности неке величине следи да је просечна вредност флукуација неке величине једнака нули:

$$\bar{f}'(x, y, z) = \frac{1}{T} \int_0^T f'(x, y, z, t) dt = 0$$

- Према Рејнолдсовој статистици, **вредност вектора брзине** у некој тачки је **векторски збир просечне брзине и флукуационе брзине**:

$$\vec{U}(x, y, z, t) = \vec{U}(x, y, z) + \vec{U}'(x, y, z, t)$$

$$\vec{U} = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k} = (\bar{u} + u')\vec{i} + (\bar{v} + v')\vec{j} + (\bar{w} + w')\vec{k}$$

- Просечна вредност брзине \vec{U} и пројекција брзине u, v, w је:

$$\bar{\vec{U}}(x, y, z) = \frac{1}{T} \int_0^T \vec{U}(x, y, z, t) dt$$

$$\bar{u}(x, y, z)\vec{i} + \bar{v}(x, y, z)\vec{j} + \bar{w}(x, y, z)\vec{k} = \frac{1}{T} \int_0^T [u(x, y, z, t)\vec{i} + v(x, y, z, t)\vec{j} + w(x, y, z, t)\vec{k}] dt$$

- Правила Рејнолдсове статистике су:

$$\begin{aligned} \overline{f_1 + f_2} &= \bar{f}_1 + \bar{f}_2, & \overline{f} &= \bar{f}, & \overline{Cf} &= C\bar{f} \quad C = const., \\ \frac{\partial \overline{f}}{\partial x_i} &= \frac{\partial \bar{f}}{\partial x_i}, & \frac{\partial \overline{f}}{\partial t} &= \frac{\partial \bar{f}}{\partial t}, & \frac{\partial^\square \overline{f}}{\partial \bigcirc^\square} &= \frac{\partial^\square \bar{f}}{\partial \bigcirc^\square} *, \\ \overline{f_1 f_2} &= \overline{(\bar{f}_1 + f_1')(\bar{f}_2 + f_2')} = \overline{f_1 f_2 + f_1 f_2' + f_2 f_1' + f_1' f_2'} = \bar{f}_1 \bar{f}_2 + \overline{f_1' f_2'} \end{aligned}$$

*симбол \bigcirc представља временску или просторну координату, а \square ред извода

Примена Рејнолдсове статистике на временско осредњавање Навије–Стоксове једначине

- Једначина количине кретања за турбулентно струјање нестишљивог флуида ($\rho = \text{const.}$), добија се временским осредњавањем Навије-Стоксове једначине применом Рејнолдсове статистике:

$$\rho \frac{D\vec{U}}{Dt} = \rho \vec{f} - \text{grad} p + \eta \Delta \vec{U}$$

$$\frac{1}{T} \int_0^T \rho \frac{D\vec{U}}{Dt} dt = \frac{1}{T} \int_0^T (\rho \vec{f} - \text{grad} p + \eta \Delta \vec{U}) dt$$

- Временски осредњена Навије-Стоксова једначина за x правац је:

$$\frac{1}{T} \int_0^T \left[\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] dt = \frac{1}{T} \int_0^T \left[\rho f_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \eta \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \right] dt$$

- Чланови конвективног дела убрзања, тј. инерцијалне силе могу се написати као:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u^2}{\partial x} &= u \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial u}{\partial x} & \Rightarrow & \quad u \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u^2}{\partial x} - u \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial (uv)}{\partial y} &= u \frac{\partial v}{\partial y} + v \frac{\partial u}{\partial y} & \Rightarrow & \quad v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial (uv)}{\partial y} - u \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial (uw)}{\partial z} &= u \frac{\partial w}{\partial z} + w \frac{\partial u}{\partial z} & \Rightarrow & \quad w \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial (uw)}{\partial z} - u \frac{\partial w}{\partial z} \end{aligned}$$

- Применом ове трансформације следи:

$$\frac{1}{T} \int_0^T \rho \left[\underbrace{\frac{\partial u}{\partial t}}_{\text{I}} + \underbrace{\frac{\partial u^2}{\partial x} - u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial(uv)}{\partial y} - u \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial(uw)}{\partial z} - u \frac{\partial w}{\partial z}}_{\text{II}} \right] dt = \frac{1}{T} \int_0^T \left[\underbrace{\rho f_x}_{\text{III}} - \underbrace{\frac{\partial p}{\partial x}}_{\text{IV}} + \eta \underbrace{\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)}_{\text{V}} \right] dt$$

- Границе интеграла су константне $(0, T)$, па операције интеграљења по времену t и диференцирања по времену t могу да замене места. Осим тога, просторне координате x, y, z и временска координата t су међусобно независне, па математичка операција интеграљења по времену t и диференцирања по просторним координатама x, y, z такође могу да замене места.
- Узимајући у обзир могућност **замене редоследа операција интеграљења и диференцирања, применом Рејнолдсове статистике на поједине чланове Навије-Стоксове једначине, следи:**

I - локални део инерцијалне силе :

$$\frac{1}{T} \int_0^T \left(\rho \frac{\partial u}{\partial t} \right) dt = \rho \frac{\partial}{\partial t} \underbrace{\frac{1}{T} \int_0^T u dt}_{\bar{u}} = \rho \frac{\partial \bar{u}}{\partial t}$$

II - конвективни део инерцијалне силе:

$$\text{Из претпоставке да је } \rho = \text{const.} \Rightarrow u \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial v}{\partial y} + u \frac{\partial w}{\partial z} = u \operatorname{div} \vec{U} = 0$$

Анализом преосталих чланова у конвективном делу инерцијалне силе следи:

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_0^T \left(\rho \frac{\partial u^2}{\partial x} \right) dt &= \rho \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{T} \int_0^T u^2 dt = \rho \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{T} \int_0^T (\bar{u} + u')^2 dt = \\ &= \rho \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{T} \int_0^T \left(\underbrace{\bar{u}^2}_1 + \underbrace{2\bar{u}u'}_2 + \underbrace{u'u'}_3 \right) dt = \rho \frac{\partial}{\partial x} (\bar{u}^2 + \overline{u'u'}) \end{aligned} \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{1}: \quad \frac{1}{T} \int_0^T \bar{u}^2 dt = \bar{u}^2 \\ \mathbf{2}: \quad \frac{1}{T} \int_0^T 2\bar{u}u' dt = 2\bar{u} \frac{1}{T} \int_0^T u' dt = 0 \\ \mathbf{3}: \quad \frac{1}{T} \int_0^T u'u' dt = \overline{u'^2} \end{array} \right.$$

$$\frac{1}{T} \int_0^T \left(\rho \frac{\partial (uv)}{\partial y} \right) dt = \dots = \rho \frac{\partial}{\partial y} (\bar{u}\bar{v} + \overline{u'v'})$$

$$\frac{1}{T} \int_0^T \left(\rho \frac{\partial (uw)}{\partial z} \right) dt = \dots = \rho \frac{\partial}{\partial z} (\bar{u}\bar{w} + \overline{u'w'})$$

III - масена сила: $\frac{1}{T} \int_0^T (\rho f_x) dt = \rho \frac{1}{T} \int_0^T f_x dt = \rho \bar{f}_x$

IV - притисна сила: $\frac{1}{T} \int_0^T \frac{\partial p}{\partial x} dt = \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{T} \int_0^T p dt = \frac{\partial \bar{p}}{\partial x}$

V - вискозна сила: $\frac{1}{T} \int_0^T \eta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dt = \eta \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{1}{T} \int_0^T u dt = \eta \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2}$

- На основу добијених, временски осредњених израза за сваку силу у Навије-Стоксовој једначини (x правац), **слиди Рејнолдсова једначина за турбулентно струјање (x правац):**

$$x: \rho \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial (\bar{u}^2 + \overline{u'^2})}{\partial x} + \frac{\partial (\bar{u}\bar{v} + \overline{u'v'})}{\partial y} + \frac{\partial (\bar{u}\bar{w} + \overline{u'w'})}{\partial z} \right) = \rho \bar{f}_x - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \eta \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2} \right) \text{ или}$$

$$x: \rho \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}^2}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}\bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{u}\bar{w}}{\partial z} \right) = \rho \bar{f}_x - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \eta \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2} \right) - \rho \left(\frac{\partial \overline{u'^2}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial z} \right)$$

Допунска инерцијална сила

(дефинише додатну промену количине кретања у сва три правца изазвану постојањем флукуација)

- На исти начин изводи се **Рејнолдсова једначина за у и z правац:**

$$y: \rho \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}\bar{v}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}^2}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}\bar{w}}{\partial z} \right) = \rho \bar{f}_y - \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} + \eta \left(\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial z^2} \right) - \rho \left(\frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{v'^2}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{v'w'}}{\partial z} \right)$$

$$z: \rho \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}\bar{w}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}\bar{w}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}^2}{\partial z} \right) = \rho \bar{f}_z - \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} + \eta \left(\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial z^2} \right) - \rho \left(\frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{v'w'}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{w'^2}}{\partial z} \right)$$

- Чланови Рејнолдсове једначине који у себи **садрже просечне вредности производа флукуација u' , v' и w' (корелације)**, воде порекло од временски осредњеног конвективног дела инерцијалне силе, и представљају компоненте тензора турбулентних напона или Рејнолдсовог тензора напона.
- Ови напони су последица додатне размене количине кретања услед **флукуационих брзина** при турбулентном струјању.

$$\tilde{T}^t = \begin{bmatrix} \tau_{xx}^t & \tau_{xy}^t & \tau_{xz}^t \\ \tau_{yx}^t & \tau_{yy}^t & \tau_{yz}^t \\ \tau_{zx}^t & \tau_{zy}^t & \tau_{zz}^t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\rho \overline{u'^2} & -\rho \overline{u'v'} & -\rho \overline{u'w'} \\ -\rho \overline{v'u'} & -\rho \overline{v'^2} & -\rho \overline{v'w'} \\ -\rho \overline{w'u'} & -\rho \overline{w'v'} & -\rho \overline{w'^2} \end{bmatrix} \text{ или } \tilde{T}^t = \|\tau_{ij}^t\| = \|\rho \overline{u'_i u'_j}\|, \quad i, j = 1, 2, 3.$$

- **Тензор турбулентних напона** има:
 - **тангенцијалне компоненте** турбулентних напона (ван дијагонале) које су због симетрије коју овај тензор задовољава: $-\rho \overline{u'v'} = -\rho \overline{v'u'}$, $-\rho \overline{u'w'} = -\rho \overline{w'u'}$, $-\rho \overline{v'w'} = -\rho \overline{w'v'}$ и
 - **нормалне компоненте** $-\rho \overline{u'^2}$, $-\rho \overline{v'^2}$, $-\rho \overline{w'^2}$
- Присуство **турбулентних напона** у Рејнолдсовим једначинама доводи до **6 нових непознатих величина** (као и напони услед вискозности), па се намеће потреба да се они **моделирају преко просечне брзине**.
- Тај проблем, у општем случају, још увек није решен!

- У случају једнодимензијског ($\bar{u}(y) \neq 0, \bar{v} = \bar{w} = 0$), потпуно развијеног ($\partial(\dots)/\partial x = 0, \partial\bar{u}/\partial x = 0$) турбулентног струјања (струјање кроз канале и цеви константног попречног пресека) њутновског нестишљивог флуида, доминантно је присуство вискозног напона τ_{xy} и турбулентног напона τ_{xy}^t .
- Један од начина моделирања турбулентног напона је Прантлова хипотеза о путањи мешања, према којој се за поменуте услове напон τ_{xy}^t дефинише као:

$$\tau_{xy}^t = \rho l^2 \left| \frac{d\bar{u}}{dy} \right| \frac{d\bar{u}}{dy},$$

где је l Прантлова путања мешања која представља средњу дужину пута који један турбулентни елемент пређе без међудејства са околином тј. без промене својих својстава. Одређује се експериментално, а у близини зида је:

$$l = \kappa y, \quad \kappa = 0,4$$

- Укупан напон у флуиду је збир напона услед вискозности и турбуленције:

$$\tau_{xy}^\eta + \tau_{xy}^t = \eta \frac{d\bar{u}}{dy} + \overbrace{\rho l^2 \left| \frac{d\bar{u}}{dy} \right| \frac{d\bar{u}}{dy}}^{\eta^t}$$

- η^t - динамичка турбулентна вискозност није карактеристика флуида, већ зависи само од флукуационог и просечног брзинског поља.

6.9 Турбулентно струјање у цевима

- У проблемима **турбулентних струјања** који се јављају у техничкој пракси, често је **довољно познавати само поље просечних величина**.
- Овде ће се на тај начин размотрити турбулентно струјање флуида кроз цев полупречника R услед разлике притиска на улазу и излазу.
- За разлику од **ламинарног струјања** када је могуће **аналитички** одредити профил брзине, при **турбулентном струјању** профил брзине се одређује у **комбинацији аналитичког и емпиријског приступа**.
- У случају **стационарног** ($\partial(\overline{\dots})/\partial t = 0$) **осносиметричног** ($\overline{u}(y) \neq 0, \overline{v} = \overline{w} = 0, \partial \overline{O}/\partial \theta = 0$), **потпуно развијеног** ($\partial(\overline{\dots})/\partial x = 0, \partial \overline{u}/\partial x = 0$) **турбулентног струјања њутновског нестишљивог флуида**, кроз цев константног попречног пресека **доминантно** је присуство **вискозног напона τ_{xy}^η** и **турбулентног напона τ_{xy}^t** . **Једначина количине кретања за x правац је:**

$$\frac{dp}{dx} = \frac{d(\overbrace{\tau_{xy}^\eta + \tau_{xy}^t}^{\tau})}{dy} = -k$$

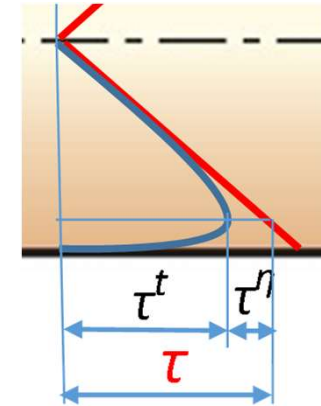
$$\tau \equiv \tau_{xy}^\eta + \tau_{xy}^t = \eta \frac{d\overline{u}}{dy} - \rho \overline{u'v'}$$

- Одавде следи да се
 - **временски осредњени притисак мења линеарно дуж канала па је**

$$\frac{dp}{dx} = - \frac{\overbrace{p_1 - p_2}^{\Delta p}}{l}$$

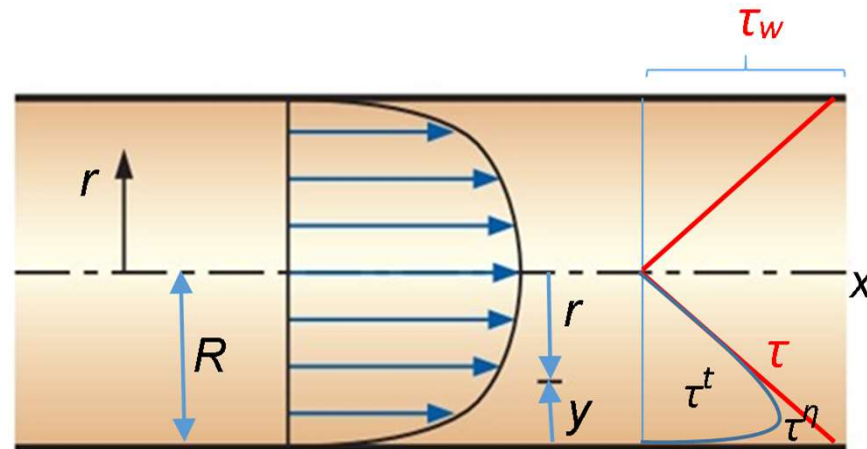
- **укупни напон по попречном пресеку мења линеарно:**

$$\left. \begin{aligned} \tau &\equiv \tau_{xy}^{\eta} + \tau_{xy}^t = -\frac{\Delta p}{l} y + C, \\ y = 0, \tau &= \tau_w \end{aligned} \right\} \tau &\equiv \tau_{xy}^{\eta} + \tau_{xy}^t = -\frac{\Delta p}{l} y + \tau_w$$



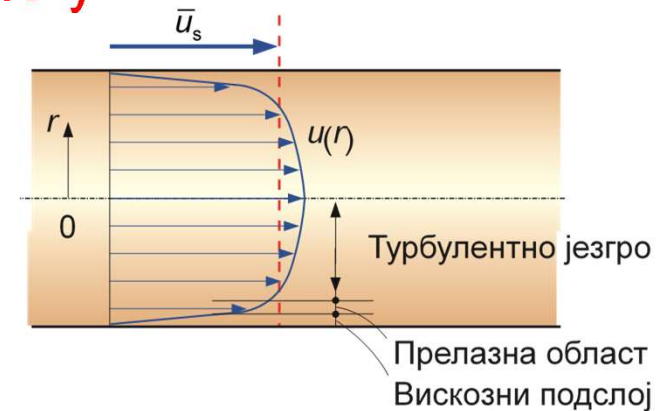
- **Напон по попречном пресеку опада линеарно од максималне вредности τ_w на зиду до 0 на оси цеви (због симетрије). Како је $y=R-r$:**

$$\tau = \tau_w \frac{r}{R} = \tau_w \frac{(R-y)}{R}$$



Универзални закон расподеле брзине у хидраулички глатким цевима

- При турбулентном струјању у близини зида разликују се три карактеристичне области:
 1. вискозни подслој
 2. прелазна област
 3. турбулентни слој (језгро).



- У близини зида уочава се да је $\bar{u} = f(\tau_w, \nu, \rho, y)$.
- Применом **димензијске анализе** показује се да се ова физичка појава може описати преко две бездимензијске величине:

$$\frac{\bar{u}}{\sqrt{\tau_w/\rho}} = F\left(\sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} \frac{y}{\nu}\right) \quad \text{тј.} \quad \boxed{\bar{u}^+ = F(y^+)} \leftarrow \text{универзални закон зида}$$

при чему су **бездимензијска брзина \bar{u}^+** и **бездимензијско растојање од зида y^+** одређени релацијама:

$$\bar{u}^+ = \frac{\bar{u}}{u^*}, \quad y^+ = \frac{u^* y}{\nu}, \quad \text{где је } u^* = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} \text{ динамичка (привидна) брзина.}$$

- Функција $F(y^+)$ се зове **универзална** зато што се бездимензијска просечна брзина \bar{u}^+ у сва три карактеристична слоја у близини зида може изразити у функцији од y^+ , при чему су те функције различитог облика.

1. Вискозни подслој ($0 < y^+ \leq 5$)

- У овој области утицај **утицај вискозности**, тј. напона услед вискозности је **доминантан**, јер су на самом зиду флукуационе компоненте брзине једнаке нули:

$$\tau^\eta \gg \tau^t$$

- Укупни напон τ приближно је једнак напону услед вискозности τ^η** , а како је то област у непосредној близини зида, **укупни напон је приближно једнак тангенцијалном напону на зиду τ_w** :

$$\tau \approx \tau^\eta \Rightarrow \tau_w \approx \eta \frac{d\bar{u}}{dy}$$

$$\bar{u} = \frac{\tau_w}{\eta} y + C,$$

$$y = 0, \bar{u} = 0 \Rightarrow C = 0$$

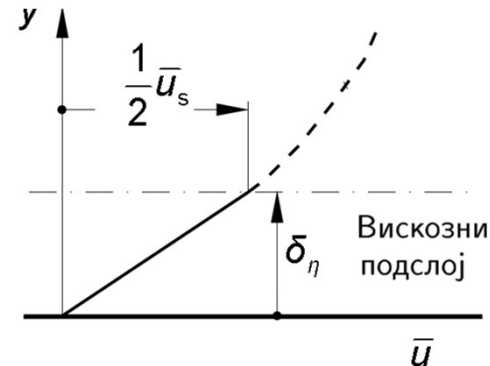
$$\bar{u} = \frac{\tau_w}{\rho \nu} y$$

- Увођењем бездимензијске брзине \bar{u}^+ и бездимензијског растојања од зида y^+ следи да се у вискозном подслоју \bar{u}^+ линеарно мења са y^+

$$\boxed{\bar{u}^+ = y^+}$$

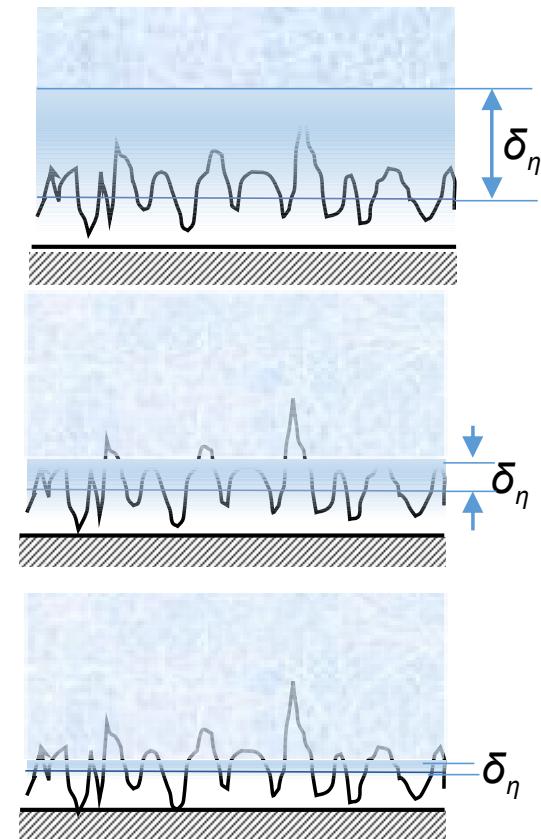
- Процена **дебљине вискозног подслоја δ_η** врши се на основу дефиниције да брзина у њему достиже половину вредности средње просечне брзине $\bar{u}_s/2$.

$$\left. \begin{aligned} \tau_w &= \lambda \frac{\rho \bar{u}_s^2}{8} \\ \tau_w &= \eta \frac{d\bar{u}}{dy} = \eta \frac{\bar{u}_s}{2\delta_\eta} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{\delta_\eta}{D} = \frac{4}{\lambda Re}$$



- **Релативна дебљина вискозног подслоја δ_η/D зависи од Re броја и коефицијента трења λ . Пораст Re броја доводи до смањења релативне дебљине вискозног подслоја.**
- Пример:
 - $Re=10^4, \lambda=0,03, D=100\text{mm} \Rightarrow \delta_\eta/D=0,013, \delta_\eta=1,3\text{mm}$
 - $Re=10^5, \lambda=0,017, D=100\text{mm} \Rightarrow \delta_\eta/D=0,002, \delta_\eta=0,2\text{mm}.$
- **Експерименти показују да је бездимензијска дебљина вискозног подслоја $\delta_\eta^+ \approx 5$.**
- **Бездимензијска висина неравнина на зиду је $\delta^+ = u^* \delta / \nu$.**

- Эксперименти показују да се **цев понаша као**:
 - **Хидраулички глатка** ако је $\delta^+ \leq \delta_\eta^+$, тј. $\delta^+ \leq 5$.
Тада **вискозни подслој прекрива неравнине** и $\lambda = f(\text{Re})$, $\lambda = 0,3164/\sqrt[4]{\text{Re}}$.
 - **Хидраулички храпава** ако је $5 < \delta^+ \leq 70$.
Тада **вискозни подслој делимично прекрива неравнине** и $\lambda = f(\text{Re}, \delta/D)$,
 $\lambda = 0,11(k + 68/\text{Re})^{0,25}$.
 - **Хидраулички потпуно храпава** ако је $70 < \delta^+$.
Тада **вискозни подслој не прекрива неравнине** и $\lambda = f(\delta/D)$, $\lambda = 0,11(k)^{0,25}$.



2. Прелазна област ($5 < y^+ \leq 30$)

- У овој области **утицај напона услед вискозности је истог реда величине као и удео турбулентних напона** $\tau^\eta \sim \tau^t$. Аналитичко решење за ову област не постоји, али на основу експерименталних резултата **Карман је дао емпиријски израз за брзину** у овој области у складу са универзалним законом зида:

$$\bar{u}^+ = 5 \ln y^+ + 3,05$$

3. Турбулентни слој ($30 < y^+ \leq 500$)

- Удаљавањем од зида утицај напона услед вискозности слаби и у турбулентном слоју они се **могу занемарити у односу на турбулентне напоне**:

$$\tau^\eta \ll \tau^t$$

- Укупни напон τ приближно је једнак турбулентном напону τ^t** , а како је то област у непосредној близини зида, укупни напон је приближно једнак тангенцијалном напону на зиду τ_w :

$$\tau \approx \tau^t, \quad \tau = \tau_w \left(1 - \frac{y^0}{R} \right) \approx \tau_w \Rightarrow \tau_w \approx \rho \underbrace{(ky)}_1^2 \left(\frac{d\bar{u}}{dy} \right)^2$$
$$\frac{d\bar{u}}{dy} = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} \frac{1}{ky} = \frac{u^*}{ky} \Rightarrow d \left(\frac{\bar{u}}{u^*} \right) = \frac{dy}{ky} \Rightarrow \frac{\bar{u}}{u^*} = \frac{1}{k} \ln y + C$$

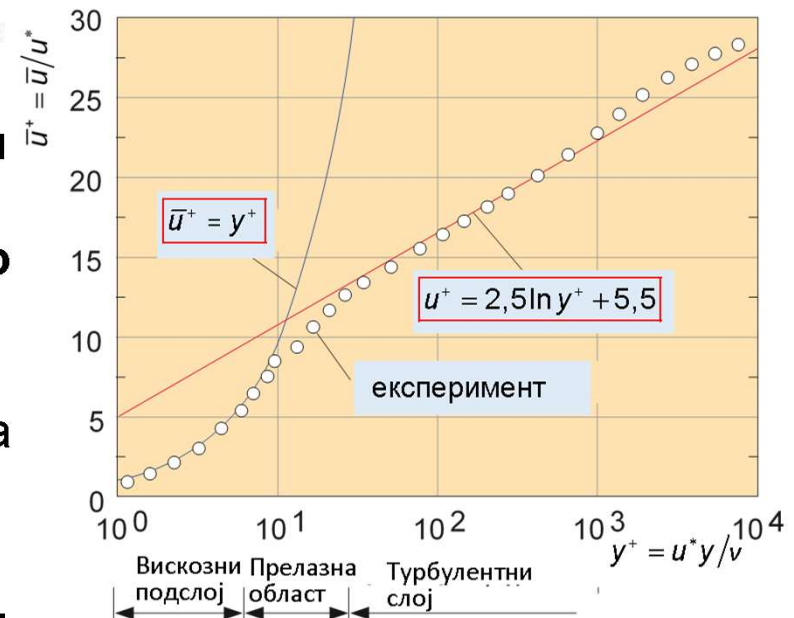
- Увођењем бездимензијске брзине $\bar{u}^+ = \bar{u}/u^*$ и бездимензијског растојања од зида $y^+ = u^*y/\nu$ (универзални закон зида) следи :

$$u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{y^+ \nu}{u^*} + C$$

$$u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln y^+ + \underbrace{\frac{1}{\kappa} \ln \frac{\nu}{u^*} + C}_B \Rightarrow \boxed{u^+ = A \ln y^+ + B}$$

где је $A=1/\kappa=2,5$ и $B=5,5$ (експериментално одређена вредност константе за хидраулички глатке цеви). Овај закон који дефинише брзину у турбулентном слоју назива се **логаритамски закон**.

- На слици су приказани резултати које даје израз за брзину добијен за вискозни подслој, резултати које даје логаритамски закон и експериментални резултати. Види се да се логаритамски закон добро слаже са експерименталним резултатима, осим у вискозном подслоју (много је мањи него што изгледа због логаритамског приказа растојања од зида) и у близини осе цеви, па се овај закон зове **универзални профил брзине**.

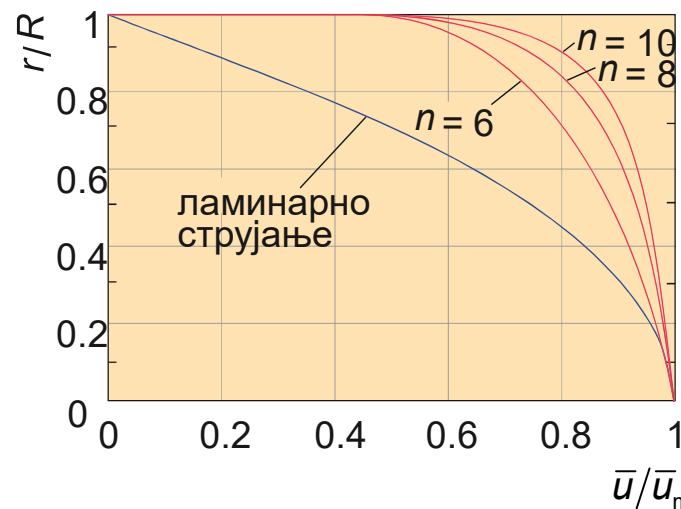


- У литератури постоји низ **емпиријских израза за профил брзине** при турбулентном струјању. Најједноставнији и најпознатији међу њима је **степенни закон**:

$$\bar{u} = \bar{u}_m \left(\frac{y}{R} \right)^{1/n}, \quad \bar{u} = \bar{u}_m \left(\frac{R-r}{R} \right)^{1/n}$$

где је \bar{u}_m максимална брзина, а експонент $1/n$ зависи од Re броја.

Re = $u_s D / \nu$	$4 \cdot 10^3$	$1.1 \cdot 10^5$	$1.1 \cdot 10^6$	$2 \cdot 10^6$	$3.2 \cdot 10^6$
n	6	7	8,8	9,8	10



$$\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)_{w(\text{турб.})} > \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)_{w(\text{лам.})}$$

$$\tau_{w(\text{турб.})} > \tau_{w(\text{лам.})}$$

- Са повећањем Re броја, параметар **n расте** и **профил брзине постаје заравњенији**, а на зиду промена брзине интензивнија што доводи до **већег тангенцијалног напона на зиду** и **већих губитака енергије флуида**.