



УНИВЕРЗИТЕТ  
У БЕОГРАДУ  
МАШИНСКИ  
ФАКУЛТЕТ

UNIVERZITET  
U BEOGRADU  
MAŠINSKI  
FAKULTET

UNIVERSITY OF  
BELGRADE  
FACULTY OF  
MECHANICAL ENGINEERING

<http://www.mas.bg.ac.rs>

Катедра за механику флуида, <http://www.fluidi.mas.bg.ac.rs>

# Механика флуида Б

Слајдови за предавања

др Невена Стевановић  
редовни професор  
[nstevanovic@mas.bg.ac.rs](mailto:nstevanovic@mas.bg.ac.rs)

др Снежана Милићев  
ванредни професор  
[smilicev@mas.bg.ac.rs](mailto:smilicev@mas.bg.ac.rs)

# 1 Основни појмови и физичка својства флуида

## 1.1 Предмет, значај и развој механике флуида

- **Флуид** је заједнички назив за течности и гасове (вода, нафта, уља, ваздух, водена пара, природни гас).
- **Механика флуида** је област физике која проучава проблеме мировања и кретања (*струјања*) флуида. (називи области м. ф: наука о струјању, хидромеханика, аеродинамика, динамика гасова, динамика флуида, хидраулика и пнеуматика).
- Подела струјања флуида (према примени):
  - **Спољашња** струјања, 1) *опструјавања* возила, зграда, пловних објеката, летелица, 2) спорт (игре са лоптом, скијање, пливање, падобранство); циљеви: побољшати учинак контролишући отпор, узгон, домет;
  - **Унутрашња** струјања, у цевима, водовима, каналима, машинама, постројењима...

- Могућа подела струјања флуида и на:
  - **природна** струјања,
    - ваздух у атмосфери Земље и
    - вода у природним токовима, рекама, морима и језерима;
  - **принудна** струјања,
    - у отвореним токовима: каналима за наводњавање, заштиту од ерозије, транспорт отпадних вода, при формирању акумулационих језера;
    - у затвореним каналима и цевима (нафтоводи, гасоводи, водоводи),
      - транспорт флуида (нафте, гаса, воде...)
      - пренос енергије (грејање, хлађење)
      - пренос информације (управљање машинама)
      - транспорт флуидима (песка, шљунка, пепела, пшенице...);
    - при којима долази до трансформације енергије (пумпе, турбине);
    - изазвана кретањем неког тела кроз флуид (возила, летелица...);
    - којима се бави биомеханика, струјања течности у живим организмима, њихово кретање кроз ваздух (лет) и воду (пливање), од микроорганизама до сисара.
- Методе истраживања у механици флуида:  
**аналитичке, експерименталне и нумеричке.**

# Квантитативни опис струјног поља

- **Зависне променљиве**  $f(x, y, z, t)$

- брзина  $\vec{U}(u, v, w)$  (кинем. вел.)
  - притисак  $p$
  - густина  $\rho$
  - температура  $T$
- } (термодин. вел.)

- **Независне променљиве**

- три просторне координате
- $\vec{r}(x, y, z)$
- време  $t$

За добијање једнозначног решења (одређивање 6 зависно променљивих) користи се систем једначина и граничних услова:

## I. Закони одржања

- 1. закон одржања масе
- 2. закон одржања импулса (3 једначине)
- 3. закон одржања енергије

## II. једначина стања (зависност између $\rho$ , $p$ и $T$ )

## III. гранични услови и

## IV. почетни услови (за $t=0$ )

- Овај систем **нема** решење у општем случају (диф. једн. су **нелинеарне**)!
- Постоје два приступа за решавање: *Лагранжов* и *Ојлеров*.

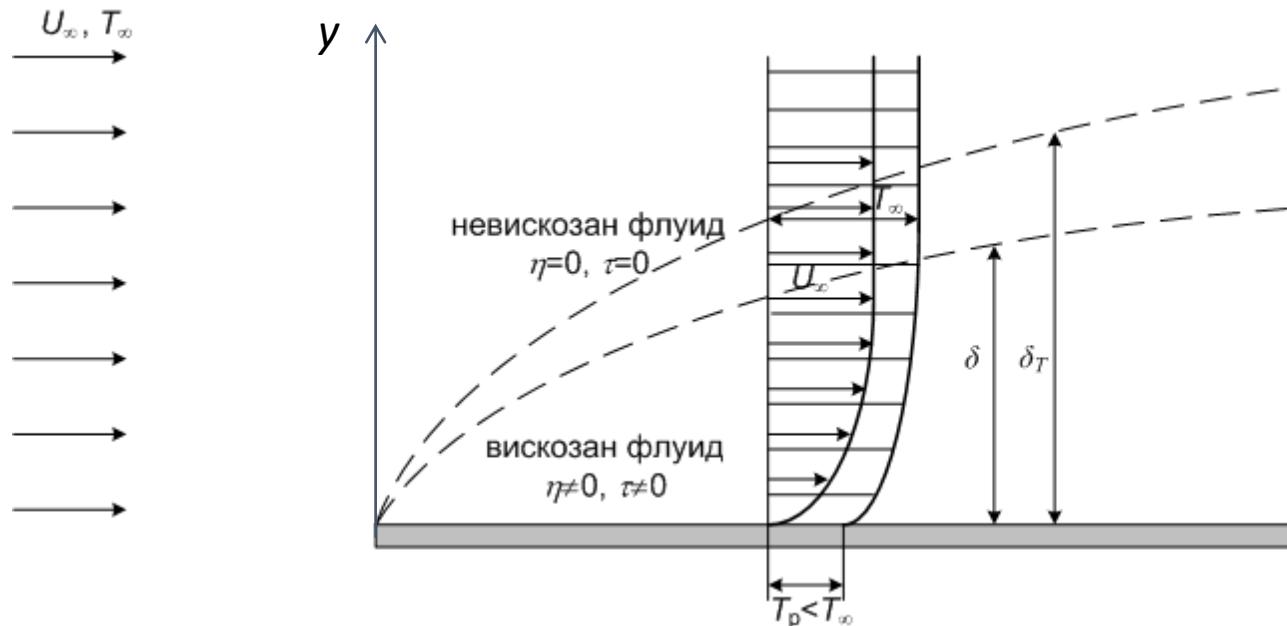
} 6 једначина

## Историјски развој

- Кина, 5000 п.н.е, најстарији до сада откривени канали, вешт. језера, (хидротехнички објекти). Срећу се и у каснијим културама, Индија, Египат, Месопотамија...
- Од Њутна (1642-1727) механика флуида развија се у два основна правца:
  - 1. *Статика и невискозно струјање* - теоријски приступ - XVII и XVIII (Њутн, Ојлер, Бернули, Даламбер, Кирхоф, Хелмхолц...)
  - 2. *Вискозно струјање* – теоријски и експериментално - XIX и XX (Хаген, Пуазеј, Навије, Стокс, Рејнолдс...)
- **Вискозно и невискозно струјање** обједињује Прантл 1904. год. теоријом граничног слоја.

# Аналогија

- **Брзински гранични слој** настаје при опструјавању тела флуидом (кретању тела кроз флуид) услед пријањања флуида на површ тела које опструјава.
- **Температурски гранични слој** (ако постоји разлика  $T_\infty \neq T_p$ ).
- *Аналогија брзинског и температурског поља је последица аналогних појава преношења импулса и преношења топлоте.*



- *Преношење топлоте, Фуријеов закон,  $q = -k (\partial T / \partial y)$*
- *Преношење импулса, Њутнов закон,  $\tau = \eta (\partial u / \partial y)$*
- *Преношење масе, Фиков закон дифузије,  $J = D (\partial c / \partial y)$*

Флуксеви топлоте, импулса и масе (дифузије) пропорционални су градијентима  $T$ ,  $u$  и  $c$ , респективно. Коефицијенти пропорционалности су транспортне величине  $k$ ,  $\eta$  и  $D$ .

## 1.2 Модел флуида као непрекидне, лако деформабилне средине

- Сви флуиди садрже релативно велики број молекула у веома малим запреминама.
- На *нормалним условима* ( $p=1\text{ bar}$ ,  $T=273\text{ K}$ )
- **ваздух**, у  $1\text{ mm}^3$  око  $2,7 \times 10^{16}$  молекула
  - $5,5 \cdot 10^9$  судара у секунди
  - слободни пут молекула  $10^{-7}\text{ m}$
  - пречник молекула  $10^{-10}\text{ m}$
  - средња брзина молекула око  $500\text{ m/s}$
- **вода**, у  $1\text{ mm}^3$  око  $3,4 \times 10^{19}$  молекула

# 1. Хипотеза о непрекидности материје (континууму)

- Простор је *непрекидно* испуњен материјом (флуидом).
- **Кнудсенов број**  $Kn = \bar{l}/L$ ,
  - $\bar{l}$  средњи слободни пут молекула
  - $L$  карактеристична димензија струјног простора
- $Kn \leq 0,01$  важи хипотеза о флуиду као **непрекидној (континуалној) средини**;
- $Kn > 0,01$  (кинетичка теорија гасова).
- **Пример:** на висини од 160km, у  $1\text{mm}^3$  само 1 молекул,
- $\bar{l}=(10 - 100)\text{m}$ , за  $L=10\text{m}$ ,  $Kn = \bar{l}/L=(1 - 10)$ , **разређен гас.**
- **Последица** хипотезе - све величине стања (скалари, вектори, тензори) су *непрекидне функције просторних координата и времена*. Могућа примена теорије поља и диференцијалног и интегралног рачуна.



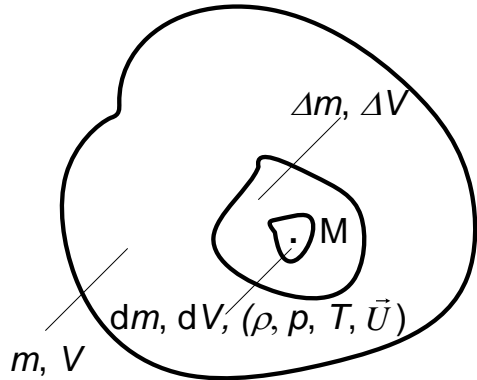
## 2. Хипотеза о великој покретљивости (лакој и великој деформабилности) флуида

- Веома мале силе изазивају релативно велике деформације унутар течности и гасова.
- **Последица** хипотезе
  - 1. *Тангенцијални напони не постоје у флуиду који мирује (при мировању ф. важи хипотеза о одсуству статичког трења). Под дејством минималне тангенцијалне силе деформација флуида непрекидно траје. Осим одсуства трења при мировању постоје и струјања флуида при којима се трење може занемарити, што одговара моделу невискозног (савршеног) флуида.*
  - 2. Без тангенцијалних напона дејство површи на флуид остварује се само у правцу управном на површ. Тада постоје само нормални напони који се свде на притисак. Напони истезања не постоје у флуиду!
- Флуид је **непрекидна, лакопокретљива и деформабилна средина.**
  - *Течност* заузима облик суда у ком се налази.
  - *Гас* испуњава комплетан простор који му је на располагању.

# 1.3 Појам флуидног делића. Дефиниције макроскопских величина. Једначина стања

- Флуидни делић** је елементарна материјална запремина струјног поља која садржи тако велики број молекула да се може сматрати да је средња дужина слободног пута молекула  $\bar{l}$  много мања од његових димензија (флуид унутар флуидног делића се третира као непрекидна средина). Истовремено, димензија флуидног делића је много мања од карактеристичне димензије струјног поља  $L$  (промене свих величина стања  $\rho, \rho, T...$  унутар флуидног делића могу да се занемаре).

$$\bar{l} \ll \text{димензија флуидног делића} \ll L$$



- Густина** [kg/m<sup>3</sup>]

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow dV} \frac{\Delta m}{\Delta V} = \frac{dm}{dV}$$

- Брзина** [m/s]

$$\vec{U} = \lim_{\Delta V \rightarrow dV} \frac{\sum m_i \vec{c}_i}{\sum m_i}$$

- Температура** [K] флуида у тачки М је макроскопска величина која представља кинетичку енергију којом располажу молекули у свом трансляторном кретању у околини тачке М.
- Притисак** [Pa] је количник интензитета силе притиска (промена количине кретања молекула у јединици времена) и елементарне површине на коју делује.

# Једначина стања

- **Једначина стања** је конститутивна алгебарска једначина која повезује скаларна поља притиска, густине и температуре

$$p = p(\rho, T) \text{ или } f(p, \rho, T) = 0$$

- **Идеалан гас** - може се занемарити запремина коју чине молекули у односу на запремину коју заузима гас, као и утицај међумолекуларних сила
- **Једначина стања идеалног гаса**

$$\frac{p}{\rho} = RT$$

$R$  [J/(kgK)] гасна константа, за ваздух износи  $R_v = 287 \text{ J/(kgK)}$

- **Бароклин флуид**  $\rho = \rho(p, T)$
- **Баротропан флуид**  $\rho = \rho(p)$ 
  - **Једначина политропе**

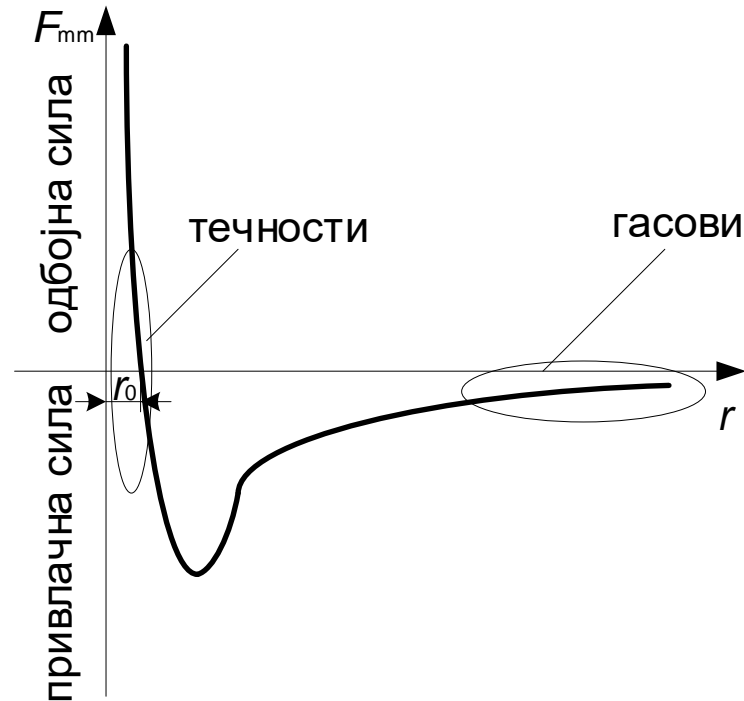
$$\frac{p}{\rho^n} = \text{const.}$$

- $n=1$ , изотермско ( $T=\text{const.}$ )
- $n=\kappa$  ( $\kappa=c_p/c_v$ ), адијабатско

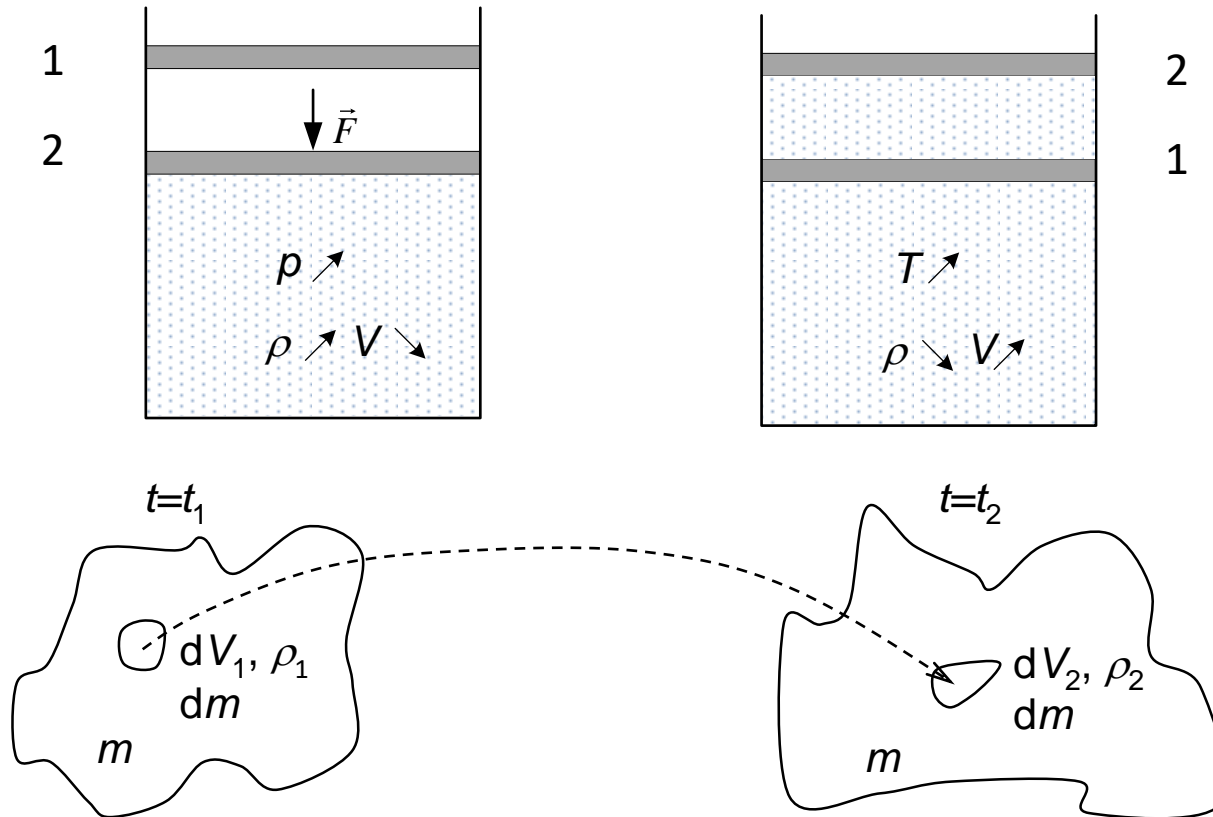
# 1.4 Особине флуида

## 1.4.1 Промена густине са притиском и температуром

- **Течности** формирају групе попут кристалних решетки које се лако распадају:
  - мала међумолекуларна растојања  $r \approx r_0$  и мале међумолекуларне силе
  - мале промене међумолекуларног растојања постижу се великим силама (нестишљив флуид)
- **Гасови:**
  - велика међумолекуларна растојања  $r \approx 10r_0$  и мале међумолекуларне силе
  - промене међумолекуларног растојања постижу се малим силама (стишљив флуид)



- Запремина, односно густина флуида мењају са променом температуре и притиска,  $\rho = \rho(p, T)$ ,  $V = V(p, T)$ .



$$dm = \rho dV = \text{const.}$$

$$\left. \begin{array}{l} V_1 = V_2 \\ dV_1 = dV_2 \\ \rho_1 dV_1 = \rho_2 dV_2 \end{array} \right\} \rightarrow \rho_1 = \rho_2, \rho = \text{const.}$$

$$\left. \begin{array}{l} V_1 \neq V_2 \\ dV_1 \neq dV_2 \\ \rho_1 dV_1 = \rho_2 dV_2 \end{array} \right\} \rightarrow \rho_1 \neq \rho_2, \rho \neq \text{const.}$$

## СТИШЉИВОСТ

- **СТИШЉИВОСТ** је особина флуида да под дејством сила (притиска) мења запремину односно густину, при  $T=const$ .
  - Течности се претежно понашају као нестишљиве (вода,  $\Delta p=200\text{bar}$  доводи до промене густине 1%) изузев при изразито великој промени притиска (хидраулички удар, подводне експлозије, велике дубине у океанима, уљна хидраулика, где притисак расте до 700bar, а у лабораторији и до 15000bar).
  - Гасови се претежно понашају као стишљиви (ваздух третиран као идеалан гас,  $\Delta p=0,01\text{bar}$  доводи до промене густине 1%) изузев при изразито спорим струјањима (климатизација, вентилација)
- Правилно је рећи **СТИШЉИВО** или **НЕСТИШЉИВО СТРУЈАЊЕ**.

## Стишљивост – утицај притиска на промену густине

Промена густине бароклиног флуида  $\rho = \rho(p, T)$  у општем случају је:

$$d\rho = \frac{\partial \rho}{\partial p} dp + \frac{\partial \rho}{\partial T} dT$$

Када је  $T = \text{const.}$  промена густине је:

$$d\rho = \frac{\partial \rho}{\partial p} dp \Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial p} = \frac{d\rho}{dp}$$

Слично важи и за запремину. Када је  $T = \text{const.}$ :

$$dV = \frac{\partial V}{\partial p} dp \Rightarrow \frac{\partial V}{\partial p} = \frac{dV}{dp}$$

Промена притиска пропорционална је релативној промени запремине:

$$dp = -\varepsilon \frac{dV}{V}$$

- Коefицијент пропорционалности је *модул стишљивости*  $\varepsilon$  [Pa], а знак – јер пораст притиска доводи до смањења запремине и обратно (аналогија са Хуковим законом).

$$\varepsilon = -\frac{dp}{dV/V}$$

- Коefицијент стишљивости је  $\beta_p = 1/\varepsilon$  [Pa<sup>-1</sup>].

$$\int_{p_0}^p dp = -\varepsilon \int_{V_0}^V \frac{dV}{V} \Rightarrow V = V_0 e^{-\frac{p-p_0}{\varepsilon}} \stackrel{\text{околина } \frac{\Delta p}{\varepsilon} = 0}{\approx} V_0 \left(1 - \frac{\Delta p}{\varepsilon}\right) = V_0 (1 - \beta_p \Delta p)$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \dots$$

$$\frac{dV}{V} = -\frac{d\rho}{\rho} \Rightarrow \varepsilon = \frac{1}{\beta_p} = \frac{dp}{d\rho/\rho} \quad \int_{p_0}^p dp = \varepsilon \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{d\rho}{\rho} \Rightarrow$$

$$\rho = \rho_0 e^{\frac{p-p_0}{\varepsilon}} \stackrel{\text{околина } \frac{\Delta p}{\varepsilon} = 0}{\approx} \rho_0 \left(1 + \frac{\Delta p}{\varepsilon}\right) = \rho_0 (1 + \beta_p \Delta p)$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \dots$$



Већа вредност модула стишљивости одговара мање стишљивом флуиду.

**вода**

$$\varepsilon = 2 \cdot 10^9 \text{ Pa}$$

$$\beta_p = 5 \cdot 10^{-10} \text{ Pa}^{-1}$$

**ваздух**

$$\varepsilon = 10^5 \text{ Pa}$$

$$\beta_p = 10^{-5} \text{ Pa}^{-1}$$

Идеалан гас при  $T = \text{const.}$ :  $\varepsilon = \rho \frac{dp}{d\rho} = \rho RT = p$

## Утицај температуре на промену густине

- Промена температуре пропорционална је релативној промени запремине са коефицијентом пропорционалности  $1/\beta_T$ .
- $\beta_T$  је коефицијент термичког ширења и рачуна се као:

$$\beta_T = \frac{dV/V}{dT} = -\frac{d\rho/\rho}{dT}$$

$$\int_{T_0}^T dT = \frac{1}{\beta_T} \int_{V_0}^V \frac{dV}{V} \Rightarrow$$

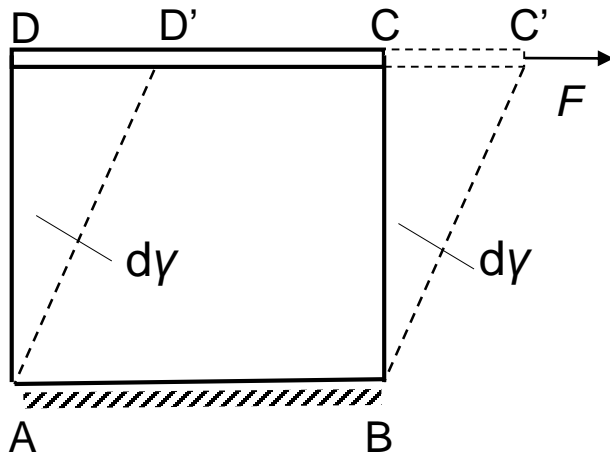
$$V = V_0 e^{\beta_T (T - T_0)} \underset{\substack{\text{околина } \beta_T \Delta T = 0 \\ e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \dots}}{\approx} V_0 (1 + \beta_T \Delta T)$$

Геј-Лисаков закон

## 1.4.2 Вискозност

- **Вискозност** је особина флуида која се манифестује као *отпор* флуида при кретању.
- **Вискозност** је појава *трења* у флуиду који струји.
- **Вискозност** је макроскопски ефекат микроскопске *размене импулса* флуидних делића.
- У чему је разлика између чврстог тела и флуида који су изложени напону смицања?

**1. Чврсто тело** (причвршћено за подлогу) под дејством силе  $F$



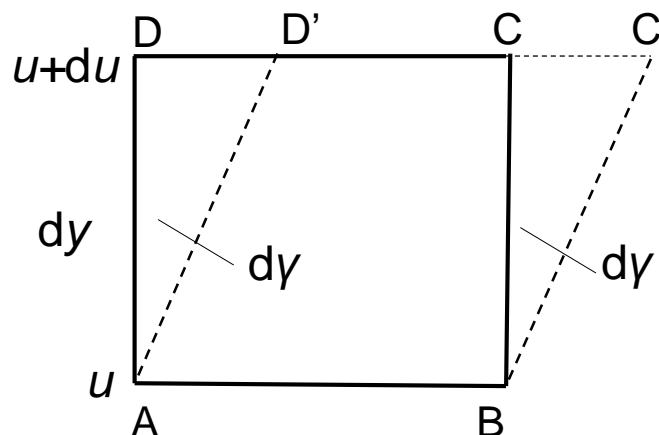
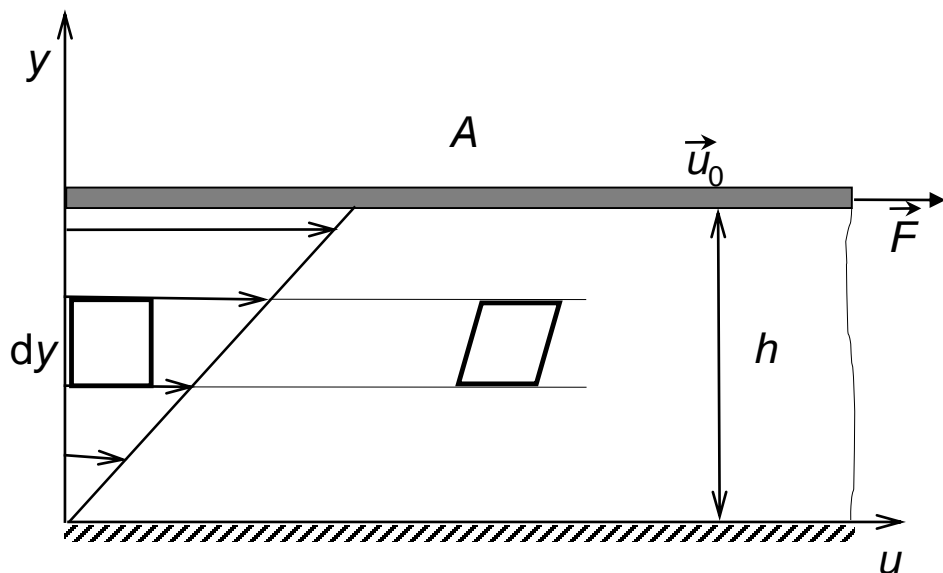
Хуков закон: **напон  $\tau$  пропорционалан је деформацији  $d\gamma$** . Коefицијент пропорционалности је модул клизања  $G$ :

$$\tau = Gd\gamma \Rightarrow \tau \sim d\gamma$$

## 2. Флуид

**Пример:** Струјање флуида између две плоче проузроковано је кретањем горње плоче брзином  $u_0 = \text{const.}$  (Куетово струјање).

- брзина флуида је  $u = u(y)$



$$\text{tg}(d\gamma) \approx d\gamma = \frac{\overline{DD'}}{\overline{AD}} = \frac{du}{dy} \Rightarrow \frac{du}{dy} = \frac{d\gamma}{dt} = \dot{\gamma} \left\{ \begin{array}{l} \bullet \text{ брзина деформисања} \\ \bullet \text{ брзина деформације} \\ \bullet \text{ брзина промене облика} \end{array} \right.$$

- *Разлика између чврстог тела и флуида под дејством силе  $F$ : Флуид се непрекидно деформише, тј. постоји брзина деформисања.*

## 1687. Њутнов експеримент

- Вучна сила  $F$  (у случају Куетовог струјања једнака је сили отпора кретању горње плоче) пропорционална је површини плоче и брзини плоче, а обрнуто пропорционална дебљини слоја флуида.
- За исти флуид између плоча исти је коефицијент пропорционалности између  $F/A$  (тангенцијалног напона) и  $u_0/h$  (при истим вредностима  $T$  и  $p$ ):

$$\frac{F}{A} \sim \frac{u_0}{h}$$

- Тај коефицијент је динамичка вискозност  $\eta$  [Pa s].

$$\tau = \eta \frac{du}{dy} = \eta \dot{\gamma} \quad \Rightarrow \tau \sim \dot{\gamma}$$

- Кинематска вискозност се дефинише као:

$$\nu = \frac{\eta}{\rho} \quad \Rightarrow \nu \left[ \frac{\text{m}^2}{\text{s}} \right]$$

вода:

$$\eta = 10^{-3} \text{ Pa s}$$

$$\nu = 1 \frac{\text{mm}^2}{\text{s}}$$

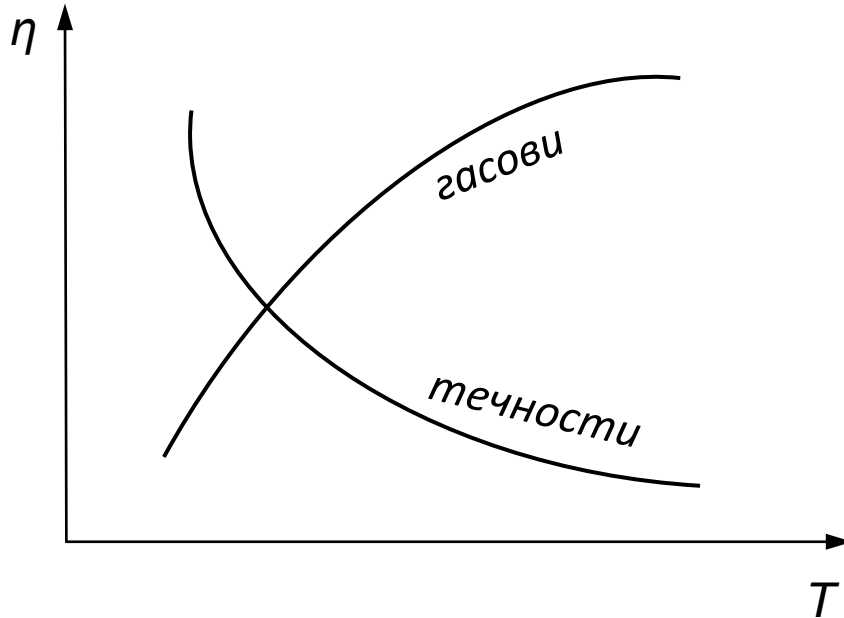
ваздух:

$$\eta = \frac{\eta_{\text{воде}}}{60} = 18 \cdot 10^{-6} \text{ Pa s}$$

$$\nu = 15 \frac{\text{mm}^2}{\text{s}}$$

$$\text{уље: } \eta_{\text{уља}} = 10 \eta_{\text{воде}}$$

- У општем случају  $\eta = \eta(\rho, T)$ , али је израженији утицај температуре.

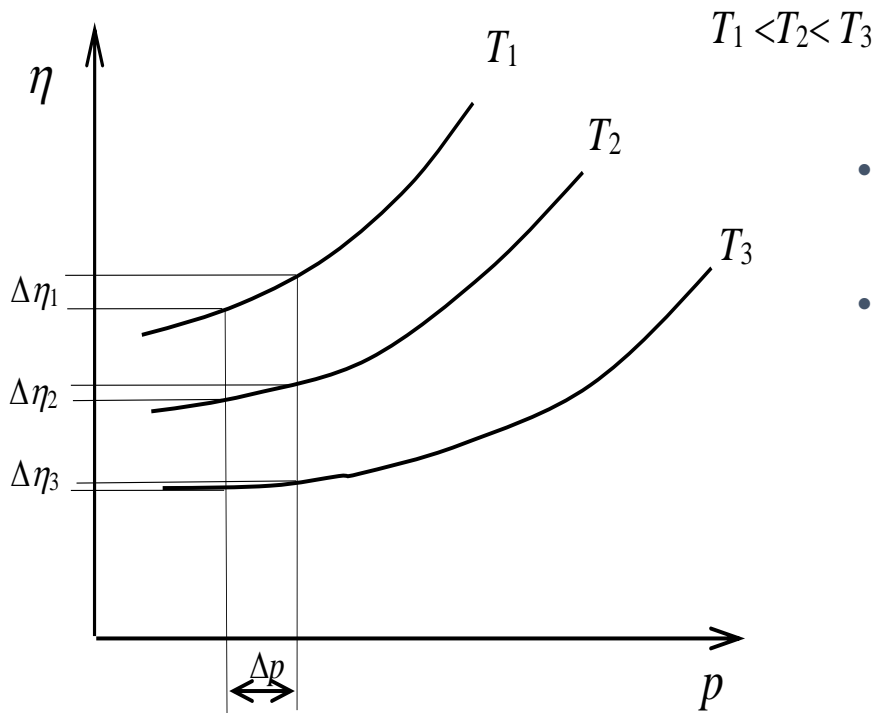


**Гасови:**  $\eta \sim \bar{c} \sim \sqrt{T}$   
 (емпиријске формуле: степена, Сатерлендова...)

**Течности:**  $\nearrow T \searrow \eta$   
 (слабе међумолекуларне везе)

- Утицај притиска на динамичку вискозност код гасова је занемарљив.
- Утицај притиска на кинематску вискозност код гасова је значајан јер је  $\rho = \rho(p)$ .

- Са порастом  $T$  опада утицај притиска на динамичку вискозност  $\eta$



- Са порастом притиска расте динамичка вискозност
- Промена динамичке вискозности течности значајна је само при великим променама притиска.
  - Машинско уље:
    - (1-300)bar  $\eta$  се удвостручи,
    - (1-1200) bar  $\eta$  порасте 24 пута.

- **Вискозиметри** су уређаји за мерење вискозности (Стоксов, обртни, капиларни...)

## 1.5 Њутновски и нењутновски флуиди

- **Реологија** је наука која изучава зависност *напонског и деформационог стања непрекидних средина*.
- Степенном функцијом приказује се заједничка реолошка зависност **ЊУТНОВСКИХ** и **НЕЊУТНОВСКИХ** флуида:

$$\begin{array}{lll} \nearrow n < 1, \eta = K\dot{\gamma}^{n-1}, \eta = f(\dot{\gamma}) & \text{псеудопластични ф.} \\ \tau = K\dot{\gamma}^n \quad \rightarrow n > 1, \eta = K\dot{\gamma}^{n-1}, \eta = f(\dot{\gamma}) & \text{дилатантни ф.} \\ \searrow n = 1, \eta = K & \text{ЊУТНОВСКИ ф.} \end{array}$$

$K$  и  $n$  се одређују експериментално.

- **Бингамов флуид** - понаша се као *еластични материјал* ( $\tau_0 \neq 0$ ).
- Криве на дијаграму зову се **криве течења**.

- *Њутновски флуиди*: ваздух, вода, нафта, машинска уља...
- *Псеудопластични флуиди*: крв, млеко, желатин, цемент у течном стању, уљана боја;
- *Дилатантни флуиди*: лепак од штирка, живи песак (већа брзина – мања вискозност), суспензије чврстих делића при високим концентрацијама ;
- *Бингамов флуид*: паста за зубе.

