

Универзитет у Београду  
Машински факултет

---

С. Чантрак, М. Лечић, А. Тоћић

# МЕХАНИКА ФЛУИДА Б

---

Београд, 2009.

---

# Садржај

---

<b>1</b>	<b>Основни појмови и физичка својства флуида</b>	<b>1</b>
1.1	Предмет, значај и развој механике флуида . . . . .	1
1.1.1	Предмет и подела механике флуида . . . . .	1
1.1.2	Значај и примена механике флуида . . . . .	2
1.1.3	Квантитативни опис струјања . . . . .	2
1.1.4	Историјски развој механике флуида . . . . .	3
1.2	Модел флуида као непрекидне лако деформабилне средине . . . . .	4
1.3	Појам флуидног делића. Густина флуида. Нестишљиви и стишљиви флуиди	5
1.3.1	Густина флуида . . . . .	5
1.3.2	Квалитативни опис стишљивости . . . . .	6
1.4	Једначина стања . . . . .	8
1.5	Вискозност и реолошки модели. Напон, деформација и брзина деформисања	9
1.5.1	Микроскопски модел вискозности . . . . .	9
1.5.2	Макроскопски модел вискозности . . . . .	9
1.5.3	Зависност динамичке вискозности од притиска и температуре за гасове и течности . . . . .	10
1.5.4	Отпор промени облика - вискозност. Напон, деформација, брзина деформисања - реолошки модел. Физичко тумачење извода брзине у изразима (1.5) и (1.6). . . . .	11
1.5.5	Њутновски и нењутновски флуиди . . . . .	12
<b>2</b>	<b>Анализа општег стања напона у флуиду</b>	<b>14</b>
2.1	Масене силе . . . . .	14
2.2	Површинске силе. Вектор и тензор напона . . . . .	15
2.2.1	Основна својства напона . . . . .	18
2.2.2	Притисак и напони услед вискозности . . . . .	19
2.2.3	Напонски модели у статистици и динамици невискозног и вискозног флуида	20
2.2.4	Резултујући вектор површинских сила . . . . .	21
<b>3</b>	<b>Мировање флуида</b>	<b>22</b>
3.1	Стање напона. Статички притисак . . . . .	22
3.1.1	Појам апсолутног притиска, потпритиска и натпритиска . . . . .	23
3.2	Ојлерова једначина . . . . .	24
3.3	Одређивање поља притиска у нестишљивом и стишљивом флуиду . . . . .	25

3.3.1	Поље притиска и једначине изобарских површи у случају мировања нестишљивог хомогеног флуида. . . . .	26
3.3.2	Мировање стишљивог флуида у пољу силе Земљине теже . . . . .	30
3.4	Дејство силе притиска на равне и криве површи . . . . .	31
3.4.1	Одређивање силе притиска на равну површ . . . . .	32
3.4.2	Одређивање силе притиска на криву површ . . . . .	37
3.4.3	Метода потиска при одређивању силе притиска на криву површ . . . . .	42
3.4.4	Метода равнотеже течности . . . . .	44
3.4.5	Прорачун судова под притиском . . . . .	47
<b>4</b>	<b>Динамика невискозног флуида</b>	<b>48</b>
4.1	Дидактички концепт (аспект) динамике невискозног флуида (ДНФ) . . . . .	48
4.2	Алгоритам дидактичког концепта (аспекта) ДНФ ( $\vec{U} \neq 0, \eta = 0$ ) . . . . .	49
4.3	Стање напона . . . . .	51
4.4	Методе описа струјног поља . . . . .	51
4.4.1	Материјалне и контролне запремине и површи . . . . .	53
4.4.2	Запремински и масени проток флуида . . . . .	55
4.5	Кретање и декомпозиција брзине флуидног делића . . . . .	56
4.5.1	Кретање, деформисање и декомпозиција извода брзине флуидног делића	56
4.5.2	Анализа тензора брзине деформисања. Физички смисао дивергенције брзине . . . . .	57
4.5.3	Анализа асиметричне матрице $\omega_{ij}$ (чиста ротација) . . . . .	59
4.5.4	Вртложна и потенцијална струјања. Појам вртлога и циркулације. . . . .	61
4.6	Убрзање флуидног делића . . . . .	64
4.6.1	Декомпозиција убрзања и појам материјалног извода. Локални и конвективни део инерцијалне силе. . . . .	64
4.6.2	Физичко значење материјалног извода. Прелаз од Лагранжеве ка Ојлеровој методи . . . . .	65
4.6.3	Физичка анализа и увођење инерцијалне силе $\vec{R}_a$ . Математички изрази за силе инерције . . . . .	66
4.6.4	Убрзање, тј. инерцијална сила у природним координатама . . . . .	68
4.7	Методологија извођења основних једначина механике флуида . . . . .	70
4.8	Закон одржања масе - једначина континуитета . . . . .	71
4.8.1	Коначна материјална запремина - материјални извод - Лагранжев метод	72
4.8.2	Коначан домен (област) простора - контролна запремина - Ојлеров метод	73
4.8.3	Анализа једначине континуитета . . . . .	74
4.8.4	Увођење струјне функције . . . . .	75
4.8.5	Интерпретација промене у времену интеграла физичке величине $f(\vec{r}, t)$ по материјалној запремини помоћу интеграла те физичке величине по фиксној контролној запремини (метод Лагранжа и Ојлера) . . . . .	76
4.9	Закон одржања (конзервације) импулса. Једначина количине кретања - Ојлерова једначина . . . . .	80

4.10	Закон момента количине кретања . . . . .	83
4.11	Закон одржања енергије. Једначина енергије . . . . .	84
4.12	Затворен систем једначина. Једначина стања. Почетни и гранични услови . . . . .	85
4.12.1	Почетни и гранични услови . . . . .	86
4.13	ЗАКЉУЧАК. Основне једначине динамике невискозног стишљивог флуида . . . . .	89
4.14	Бернулијева једначина . . . . .	90
4.14.1	Бернулијев интеграл Ојлерове једначине . . . . .	91
4.14.2	Анализа Бернулијеве теореме у случајевима једноставнијих баротропних процеса . . . . .	92
4.15	Примене Бернулијеве једначине . . . . .	94
4.15.1	Извођење Бернулијеве једначине помоћу израза (4.41) за убрзање у природним координатама $(s, n)$ . . . . .	94
4.15.2	Бернулијева једначина за нестационарно струјање. Промена притиска у правцу управном на струјнице . . . . .	95
4.15.3	Динамички и тотални притисак. Мерење притиска. Питове и Пито-Прантлове сонде . . . . .	96
4.15.4	Кретање флуидног делића по концентричним кружним трајекторијама (вртлог). Расподеле брзине и притиска у вртлогу . . . . .	98
4.15.5	Бернулијева једначина у ротирајућем систему. Примена закона момента количине кретања. Ојлерова једначина турбомашина . . . . .	100
4.16	Примена основних једначина механике флуида при решавању квази-једнодимензијских струјања флуида . . . . .	102
4.16.1	Модели једнодимензијских и квази-једнодимензијских струјања . . . . .	102
4.16.2	Основне једначине квази-једнодимензијског струјања у алгебарском облику . . . . .	106
4.16.3	Основне једначине квази-једнодимензијског струјања у диференцијалном облику . . . . .	111
4.17	ЗАКЉУЧАК. Основне једначине невискозног флуида за квази-једнодимензијски модел . . . . .	114
4.18	Једнодимензијска стационарна струјања гасова . . . . .	115
4.18.1	Брзина звука и Махов број . . . . .	115
4.18.2	Тоталне и критичне величине стања . . . . .	116
4.18.3	Основне једначине у случају једнодимензијског стационарног струјања гаса . . . . .	117
4.18.4	Прав ударни талас . . . . .	120
4.19	Изентропска струјања гасова кроз конвергентно-дивергентне млазнице . . . . .	122
4.19.1	Основне једначине. Примена конвергентно-дивергентних млазника . . . . .	122
4.20	Струјање невискозног гаса са довођењем топлоте . . . . .	128
<b>5</b>	<b>Динамика вискозног флуида</b> . . . . .	<b>133</b>
5.1	Стање напона и вискозне силе . . . . .	133
5.2	Начелно о утицају трења - вискозна сила . . . . .	134

5.2.1	Квалитативна анализа утицаја трења и смицајни напон $\tau$ . . . . .	134
5.2.2	Вискозне силе. Анализа сила у динамици вискозног флуида . . . . .	135
5.3	Карактеристични бездимензијски бројеви - међусобни односи сила у струјном пољу - закони сличности . . . . .	136
5.3.1	Закони сличности . . . . .	136
5.3.2	Формирање карактеристичних бездимензијских бројева и њихов физички смисао . . . . .	137
5.4	Модел вискозног флуида. Општи изрази за површинске силе . . . . .	139
5.4.1	Анализа површинских сила у вискозном флуиду . . . . .	139
5.4.2	Извођење диференцијалног израза (5.17), тј. (5.19) помоћу елементарне контролне запремине $dV = dx dy dz$ . . . . .	140
5.4.3	Вискозна сила за нестишљив њутновски флуид . . . . .	140
5.5	Интегрални и диференцијални облици једначине количине кретања . . . . .	141
5.5.1	Једначина количине кретања. Навије-Стоксове једначине . . . . .	141
5.5.2	Закон количине кретања у интегралном облику - примена у техничкој пракси . . . . .	143
5.6	Режими струјања - ламинарна и турбулентна струјања . . . . .	144
5.6.1	Ламинарна струјања . . . . .	144
5.6.2	Хидродинамичка стабилност . . . . .	144
5.6.3	Турбулентна струјања . . . . .	145
5.7	Физичко-математичке основе турбулентних струјања . . . . .	146
5.7.1	Својства турбулентних струјања . . . . .	146
5.7.2	Рејнолдсов експеримент . . . . .	146
5.7.3	Рејнолдсова статистика . . . . .	147
5.7.4	Анализа осредњавања сила у времену и нови физички ефекти . . . . .	149
5.7.5	Физичка значења корелација $\overline{\rho u'^2}$ и $\overline{\rho u'v'}$ . Рејнолдсов, турбулентни смицајни напон . . . . .	153
5.7.6	Просечне вредности производа флукуационих брзина и Рејнолдсови (турбулентни) напони . . . . .	156
5.7.7	Једначина количине кретања временски осредњеног струјања - Рејнолдсове једначине турбулентног струјања нестишљивог флуида . . . . .	157
5.7.8	Једначина континуитета за турбулентно струјање нестишљивог флуида . . . . .	159
5.7.9	Рејнолдсове једначине за њутновски нестишљив флуид изражене посредством Рејнолдсових напона . . . . .	159
5.7.10	Опште стање напона при турбулентном струјању . . . . .	161
5.8	Ламинарно струјање кроз праве кружне цеви . . . . .	163
5.8.1	Профил брзине и пад притиска . . . . .	163
5.8.2	Средња брзина $u_s$ . . . . .	165
5.8.3	Израз за пад притиска. Губитак енергије услед трења. Коefицијент трења . . . . .	166
5.8.4	Флукс количине кретања. Пресек са неравномерним профилем брзине. Корекциони коefицијент - Бусинесков коefицијент . . . . .	167

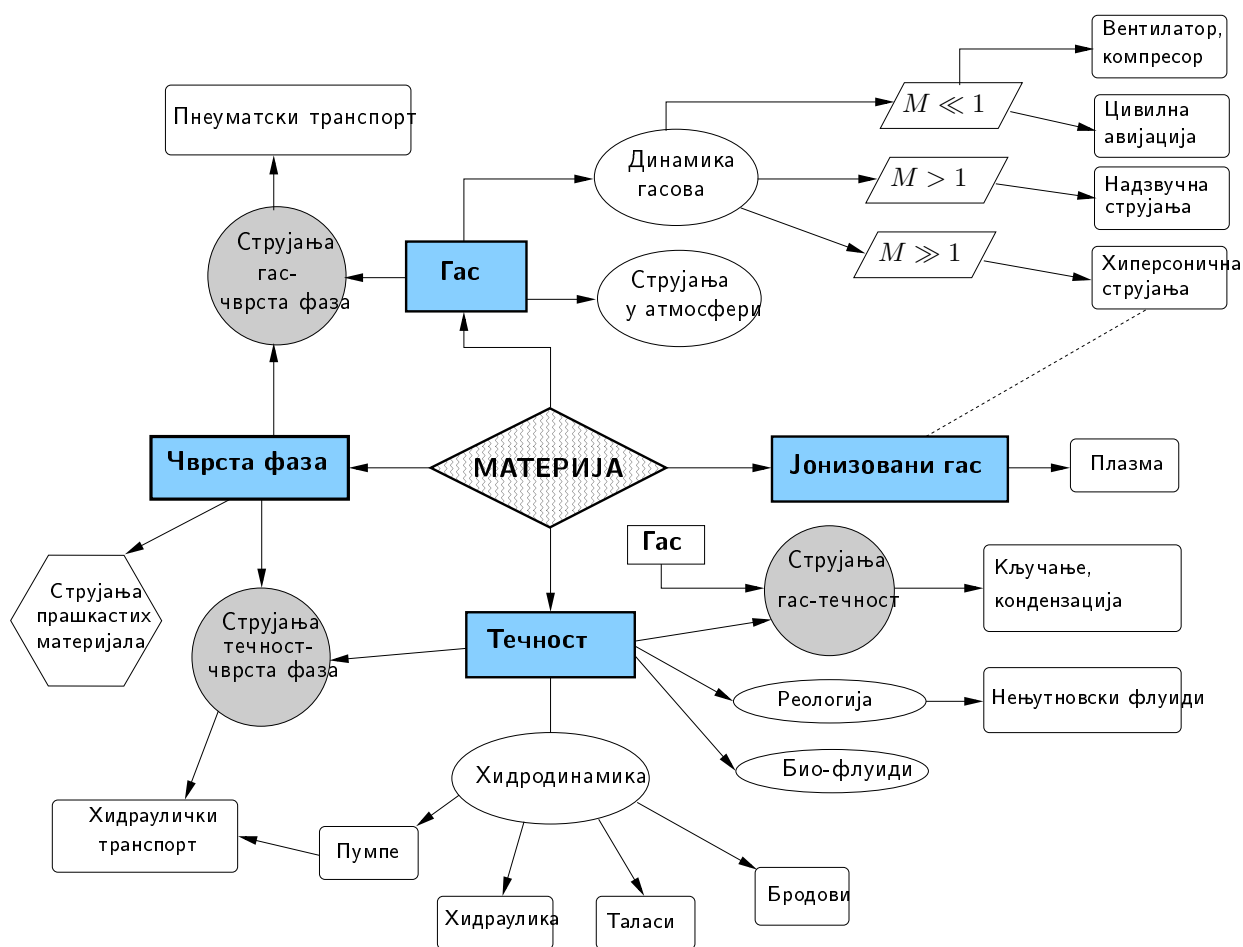
5.9	Турбулентно струјање у цеви . . . . .	169
5.9.1	Примена закона количине кретања . . . . .	169
5.9.2	Примена димензијске анализе - тангенцијални напон на зиду цеви - Дарсијева формула. Средња брзина . . . . .	171
5.9.3	Средња брзина $\bar{u}_s$ . . . . .	172
5.9.4	Смицајни напон на зиду. Дарсијева формула . . . . .	172
5.9.5	Закони трења за турбулентно струјање у хидраулички глатким цевима	173
5.9.6	Степени закон расподеле брзине . . . . .	174
5.9.7	Турбулентно струјање кроз хидраулички хрпаве и потпуно хрпаве цеви . . . . .	175
5.9.8	Ламинарно и турбулентно струјање у улазном (почетном) делу цеви. Пад притиска у почетној деоници цеви . . . . .	180
5.10	Хидраулички прорачун простог цевовода . . . . .	183
5.10.1	Увод - основне претпоставке . . . . .	183
5.10.2	Једначина континуитета . . . . .	184
5.10.3	Бернулијева једначина . . . . .	185
5.11	Хидраулички прорачун сложеног цевовода . . . . .	190
5.11.1	Једначина континуитета . . . . .	190
5.11.2	Бернулијева једначина . . . . .	191

# 1 Основни појмови и физичка својства флуида

## 1.1 Предмет, значај и развој механике флуида

### 1.1.1 Предмет и подела механике флуида

Флуид је заједнички назив за течности и гасове. Механика флуида се бави проблемима мировања и кретања (струјања) флуида. Уместо назива механика флуида често се користе и појмови: наука о струјању, хидромеханика, аеродинамика, динамика флуида, хидраулика и пнеуматика, динамика гасова и друго (слика 1.1).



Слика 1.1. Области механике флуида

### 1.1.2 Значај и примена механике флуида

Механика флуида игра велику улогу у науци и техници. Примене се, грубо говорећи, могу поделити у две различите групе.

- (а) *Опструјавање* тела, на пример, моторних возила, авиона, зграда, пловних објеката. Овде је од интереса *спољашње струјање*, тј. брзина, притисак, густина и температура у близини тела и далеко од њега. То омогућује израчунавање, на пример, дејства силе на опструјавано тело.
- Струјање кроз канале, водове, машине и читава постројења. У овом случају су од интереса *унутрашња струјања*, тј. струјања у цевима, дифузорима, млазницима. Овде су важни утицаји трења који се манифестују кроз падове (губитке) притиска.

При решавању актуелних техничких проблема најчешће се појављују обе групе проблема. Многобројне примене су у областима струјних машина, процесне технике, ваздухопловства, енергетског и саобраћајног машинства, аеродинамике зграда, метеорологије, геофизике и друго.

### 1.1.3 Квантитативни опис струјања

Квантитативни опис струјања подразумева познавање, тј. одређивање брзине  $\vec{U}(u, v, w)$ , притиска  $p$ , густине  $\rho$  и температуре  $T$  у свакој тачки  $\vec{r}(x, y, z)$  посматраног поља у било ком тренутку  $t$ . Другим речима, претпоставља се егзистенција ових физичких величина као функција просторно-временске тачке, тј  $f = f(\vec{r}, t) = f(x, y, z, t)$ , где је  $f = \vec{U}, \rho, p, T$ . Ово припада области *механике континуума*. Укупно је *шест* зависно и *четири* независно променљиве. За одређивање 6 непознатих величина потребно је 6 једначина, тј. физичких, основних закона науке о струјању који се обично формулишу у облику закона одржања (табела 1.1).

	Физички исказ (значење)	Број једначина	Врста једначине
Закони одржања	Континуитет (одржање масе)	1	скаларна
	Количина кретања (закон импулса)	3	векторска
	Енергија (први принцип термодинамике)	1	скаларна
Флуид	Једначина стања (термодинамичка зависност између $p, \rho$ и $T$ )	1	скаларна

Табела 1.1. Закони одржања у науци о струјању

Овим једначинама у алгебарском, диференцијалном или интегралном облику додају се почетни и гранични услови да би се из скупа свих могућих решења пронашло једнозначно одређено решење постављеног проблема. При тражењу општег решења основних једначина механике флуида наишло се на до сада непремостиве тешкоће, јер су одговарајуће диференцијалне једначине нелинеарне.

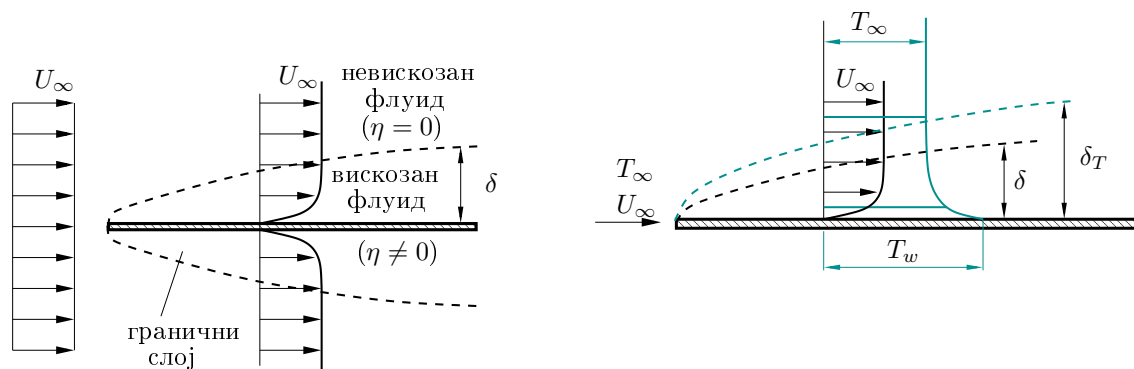


### 1.1.4 Историјски развој механике флуида

Приближно до 1900. године механика флуида се развијала у два различита правца:

- (а) *Теоријска, претежно математичка механика флуида* повезана је са именима Њутна (Newton, 1642-1727), Ојлера (Euler, 1707-1783), Бернулија (Bernoulli, 1700-1782) Даламбера (D’Alambert, 1717-1783), Кирхофа (Kirchhoff, 1824-1887), Хелмхолца (Helmholtz, 1821-1894), Рејли (Reyleigh, 1842-1919). При томе се претежно радило о теоријском проучавању струјања невискозног флуида, тзв. потенцијалном струјању, тако да, на пример, није било могуће квантитативно одредити губитке у унутрашњим и спољашњим струјањима.
- (б) *Техничка хидромеханика или хидраулика* највише дугује Хагену (Hagen, 1797-1884), Пуазеју (Poiseuille, 1799-1869), Рејнолдсу (Reynolds, 1842-1912). Највећи допринос је у области мерења и решавању проблема струјања вискозног флуида, на пример, у одређивању закона трења при струјању у цевима.

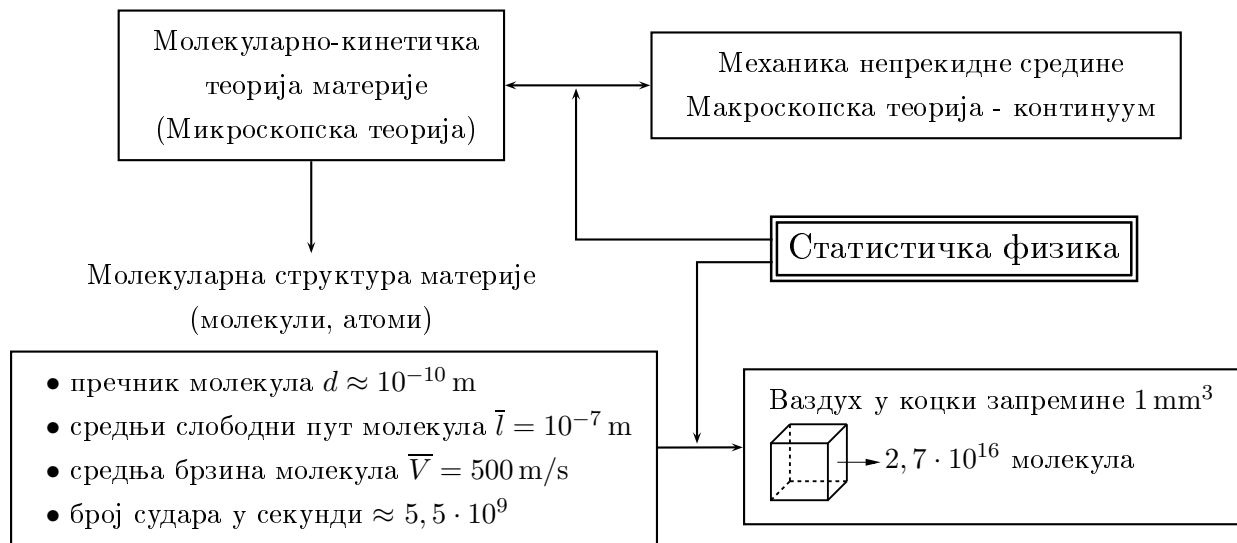
Оба правца је Прантл (Prandtl, 1875-1953) 1904. године својом *теоријом граничног слоја*, здружио. Сагласно овој теорији узрок за *отпор трења* тела потребно је тражити у тзв. граничном слоју. То је слој флуида у коме настаје знатна промена брзине од нуле на зиду (чврстој површи) до вредности брзине спољашњег струјања. При томе је битан *услов пријањања* (лепљења) флуида на површи тела. Ако се тело креће, тада флуид на површи тела струји истом брзином, тј. креће се на исти начин. **Он пријања!** На слици 1.2 дат је пример граничног слоја на равној плочи. Прантлов концепт граничног слоја омогућава битна поједностављења у нелинеарним диференцијалним једначинама.



**Слика 1.2.** Брзински и температурски гранични слој на подужно опструјаваној плочи;  $U_\infty$  - брзина спољашњег непоремећеног струјања;  $\delta$  - дељина граничног слоја;  $\eta$  - динамичка вискозност флуида;  $T_\infty$  - температура спољашњег струјања;  $T_w$  - температура на плочи;  $\delta_T$  - дељина температурског граничног слоја.

У случају да је поред утицаја трења важно и преношење топлоте, онда се осим *брзинског граничног слоја* појављује и температурски гранични слој. Узрок је у потпуно аналогним појавама: трењу и преношењу топлоте.

## 1.2 Модел флуида као непрекидне лако деформабилне средине



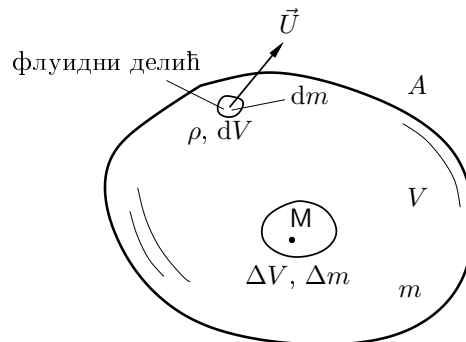
**Хипотеза о непрекидности материје.** Простор је непрекидно испуњен материјом. Флуид се понаша као континуум. Кнудсенов број  $Kn = \frac{\bar{l}}{L} \leq 0,01$  ( $L$  - карактеристична димензија тела). *Последице хипотезе:* пошто је материја носилац појединих физичких карактеристика флуида, онда је и било која величина стања (скаларна, векторска, тензорска)  $f$  непрекидна функција просторних координата и времена, тј.  $f = f(x, y, z, t)$ . Овиме је омогућена примена теорије поља и диференцијалног и интегралног рачуна. *Напомена:* треба водити рачуна да ова претпоставка не важи баш увек - на растојању од 160 km од површине Земље у коцки стране 1 mm налази се само 1 молекул! Област механике флуида која проучава такве случајеве се назива *Динамика разређених гасова*.

**Хипотеза о великој покретљивости.** Ова хипотеза се још назива и хипотеза о лакој и великој деформабилности. Последица молекуларне (микро) структуре течности и гасова је лака покретљивост (течљивост), тако да и врло мале силе изазивају велике деформације флуида. Директне последице хипотезе су:

- Смицајни (тангенцијални) напони, тј. трење не јављају се у флуиду који мирује. Дакле, статичко трење у флуиду није могуће. Међутим, без обзира што струјање флуида неминовно доводи до стварања сила трења, познато је да су у многим проблемима струјања оне врло мале и да се у односу на инерцијалне силе могу занемарити, што одговара моделу *невискозног* (савршеног) флуида.
- Из својства (а) следи да се међудејство флуида са различитих страна извесне површи остварује искључиво у *правцу нормале на површ*, дакле посредством *нормалних напона*. Међутим, напони истезања се не могу појавити у флуиду, тако да се нормални напони свде на *притисак*.

### 1.3 Појам флуидног делића. Густина флуида. Нестишљиви и стишљиви флуиди

Флуидни делић је део материје врло мале запремине у којој се промене свих величина ( $p$ ,  $T$ ,  $\rho$ , ...) могу занемарити, па има смисла говорити о температури делића, густини делића и слично. С друге стране, међутим, флуидни делић је толико "велике" запремине која још увек садржи врло много молекула, тако да је хипотеза континуума, тј. непрекидности средине задовољена.



**Слика 1.3.** Флуид масе  $m$  у коначној запремини  $V$  ограниченој са површи  $A$ . Величине  $\vec{U}$ ,  $\rho$ ,  $dV$  и  $dm$  су: брзина, густина, запремина и маса флуидног делића.

#### 1.3.1 Густина флуида

Густина флуида је величина стања флуида и представља скаларно поље,  $\rho = \rho(x, y, z, t)$ .

- Средња густина флуида је  $\bar{\rho} = m/V$ .
- Густина флуида:

$$\rho = \lim_{\substack{\Delta V \rightarrow 0 \\ (\Delta V \rightarrow M)}} \frac{\Delta m}{\Delta V} = \rho(M).$$

Флуидни делић је у феноменолошком смислу механике континуума дефинисан елементарном масом  $dm = \rho dV$  која је константна, не мења се. Међутим, иако делићи имају увек исту масу,  $dm = const$ , њихова густина  $\rho(x, y, z, t) = dm/dV$ , а тиме и запремина и облик се могу, али не морају, мењати током времена. То води ка питању *стишљивости* и *деформисања* непрекидне средине.

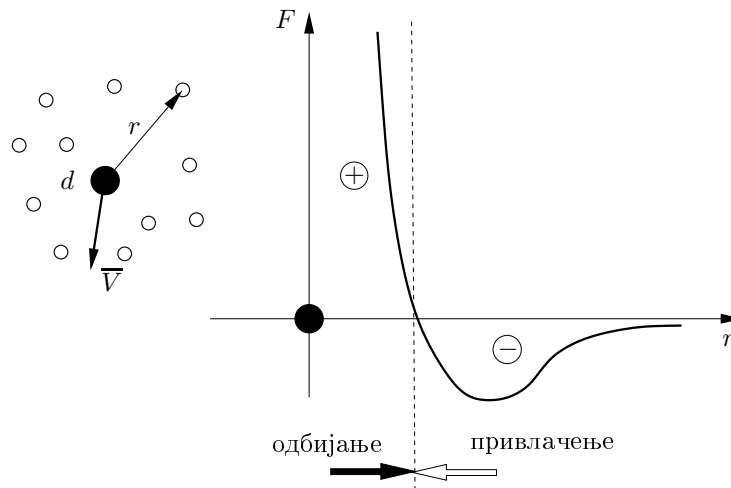
**Напомена:** Са математичке тачке гледишта је важно да се делић може замислити и као елементарна коцка, ваљак, тетраедар, лопта или било које друго правилно или неправилно геометријско тело. То је последица врло малих димензија делића (које су пак неизмерно веће од димензија молекула), па његов облик не игра улогу при посматрању и физичко-математичком моделирању.

### 1.3.2 Квалитативни опис стишљивости

#### Молекуларна структура материја - међумолекуларне силе

- (а) Брауново молекуларно кретање код гаса. Средња статистичка брзина молекула је пропорционална квадратном корену из температуре  $\bar{V} \sim \sqrt{T}$  (карактеристична зависност од температуре)!
- (б) Молекули релативно близу један другом, делују међумолекуларне, тзв. Вандервалсове (Van-der-Waals) силе достижући растојање преко  $10d \sim 10^{-9}$  m. Ове силе су по природи гравитационе и могу да фиксирају молекуле, на пример у једну регуларну кристалну решетку.

Различити узајамни односи чињеница (а) и (б) доводе до формирања три агрегатна стања материје (гас, течност, чврсто тело).



**Слика 1.4.** Међумолекуларна сила  $F$  којом делић у координатном почетку делује на други на међумолекуларном растојању  $r$ .

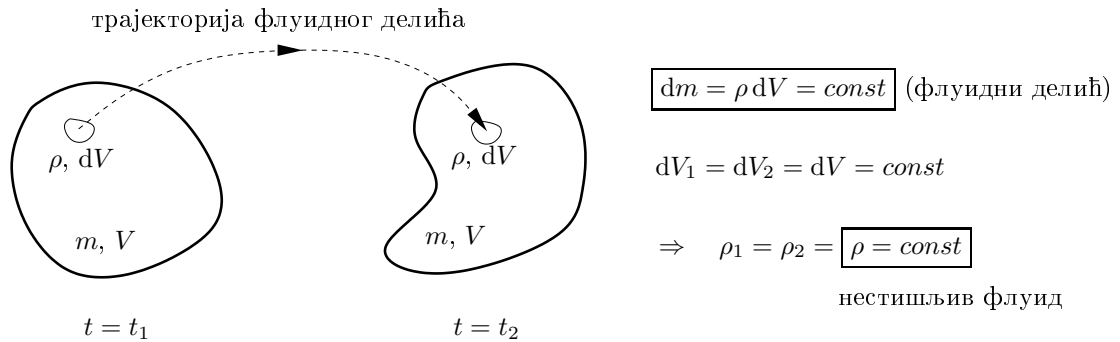
#### Нестишљиви флуиди (углавном течности)

Међумолекуларна растојања  $r$  су врло мала, међумолекуларне силе  $F$  су велике и одбојне (слика 1.4), па силе притиска не доводе до битнијих промена  $r$ , а са тим и запремине  $V$  и густине  $\rho$ .

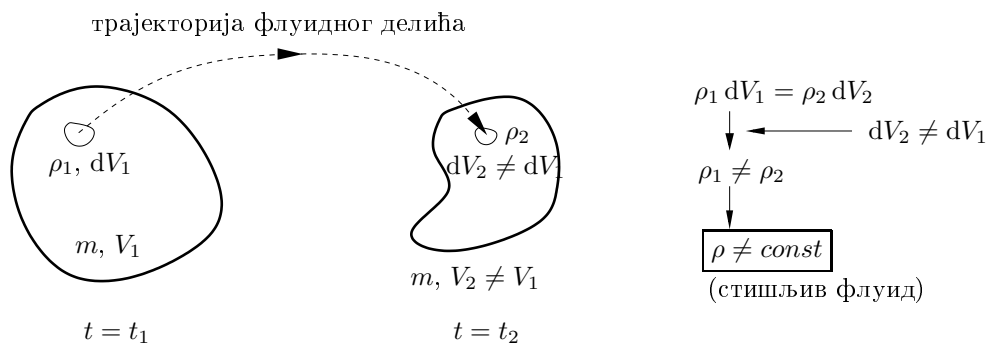
Значи, мења се само облик запремине (хипотеза о лакој покретљивости и деформабилности), док њена вредност остаје иста.

#### Стишљиви флуиди (углавном гасови)

Растојања  $r$  између молекула су велика, силе међудејства  $F$  су мале и привлачне (слика 1.4), па дејство притиска може да промени запремину  $V_1$ , а тиме и густину  $\rho_1$ , сагласно закону одржања масе,  $m = \rho V = const$ , тј.  $dm = \rho dV = const$ . Дакле, гас се сабија (компресија) или шири (експанзија) и  $\rho \neq const$  (стишљив флуид).



Слика 1.5. Нестишљив флуид,  $\rho = const$ , масе  $m = const$  у два тренутка  $t_1$  и  $t_2$ .



Слика 1.6. Стишљив флуид,  $\rho \neq const$ , масе  $m = const$  у два тренутка  $t_1$  и  $t_2$ .

- Напомене:** (а) При великим променама притиска (хидраулички удар, подводне експлозије) нестишљив флуид (углавном течност) понаша се као стишљив.
- (б) При спором, лаганом струјању гаса, када су промене притиска мале, гас се понаша прилично као нестишљив флуид (проблеми термотехнике, климатизације, вентилације и друго).

**Квантитативни опис стишљивости.**

Густина је величина стања,  $\rho = \rho(x, y, z, t)$  и зависи од друге две величине стања - од притиска  $p$  и температуре  $T$ .

Коефицијент стишљивости  $s$  је релативна промена запремине делића по јединичној промени притиска:

$$s = -\frac{\partial(dV)}{\partial p} \frac{1}{dV} \Leftrightarrow \begin{cases} dp > 0 \rightarrow d(dV) < 0, \\ dp < 0 \rightarrow d(dV) > 0. \end{cases}$$

Дејство притиска - стишљивост

$$\begin{matrix} dV = f(p, T) \\ d\rho = \mathcal{F}(p, T) \end{matrix} \quad \begin{matrix} \boxed{\rho dV = const} \\ \uparrow \\ \text{утицај притиска} \end{matrix} \rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial p} dV + \rho \frac{\partial(dV)}{\partial p} = 0 \Rightarrow \boxed{s = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial p}}$$

- Модул стишљивости  $\varepsilon = \varepsilon(p, T)$

$$\varepsilon = \frac{1}{s} \rightarrow \begin{aligned} \varepsilon_{\text{voda}} &\approx 20 \cdot 10^3 \text{ bar} = 20 \cdot 10^5 \text{ kPa}, \\ \varepsilon_{\text{vazduh}} &\approx 1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa} \end{aligned}$$

## 1.4 Једначина стања

Једначина стања представља једну од конститутивних једначина механике флуида. Она је обично алгебарска једначина и повезује три скаларна поља, тј. поља притиска густине и температуре у имплицитном или експлицитном облику како следи

$$f(\rho, p, T) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \rho = \rho(p, T). \quad (1.1)$$

Познато је да се многи гасови у областима притисака и температура које се јављају у техничкој пракси понашају као идеални гас, тако да се у тим случајевима уместо једначине (1.1) користи *једначина стања идеалног гаса*

$$p = \rho RT, \quad (1.2)$$

која је детаљно разматрана у термодинамици. Величина  $R$  је константа која зависи од врсте гаса (за ваздух она износи  $R = 287 \text{ J/kgK}$ ). Ако су  $p_1$ ,  $\rho_1$  и  $T_1$  неке референтне вредности притиска, густине и температуре, онда важи зависност

$$\frac{\rho}{\rho_1} = \frac{p}{p_1} \frac{T_1}{T}.$$

Дакле, густина се код идеалног флуида мења пропорционално притиску и обрнуто пропорционално температури! Релацијом (1.1) дефинисани су *бароклини флуиди*. Међутим, у многим процесима густина  $\rho$  искључиво, тачније речено много више зависи од притиска него од температуре, која накнадно, ако је потребно, може да се израчуна. Таква класа флуида су *баротропни флуиди*

$$\rho = \rho(p), \quad (1.3)$$

који ће се у овом курсу углавном и проучавати. Очигледно је да у ову групу спадају флуиди чија је једначина стања поковава једначину стања за идеални гас, као и конститутивна једначина облика

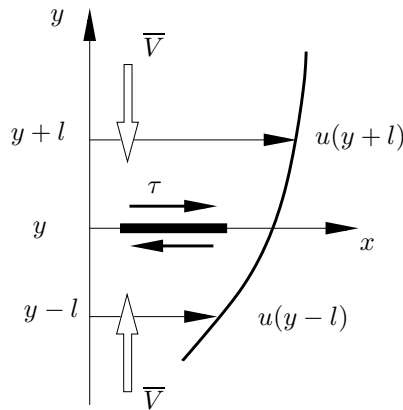
$$\left(\frac{\rho}{\rho_1}\right)^n = \frac{p}{p_1} \Leftrightarrow \frac{p}{\rho^n} = \text{const}, \quad (1.4)$$

којом се описују изотермске ( $n = 1$ ), адијабатске ( $n = \varkappa$ ) и политропске (експонент  $n$  узима остале могуће вредности) промене стања флуида. Нестишљив флуид је такође баротропан флуид.

## 1.5 Вискозност и реолошки модели. Напон, деформација и брзина деформисања

### 1.5.1 Микроскопски модел вискозности

Кинетичка теорија гасова - процеси молекуларног преноса масе, импулса и енергије - дифузија, вискозност, топлотна проводљивост.



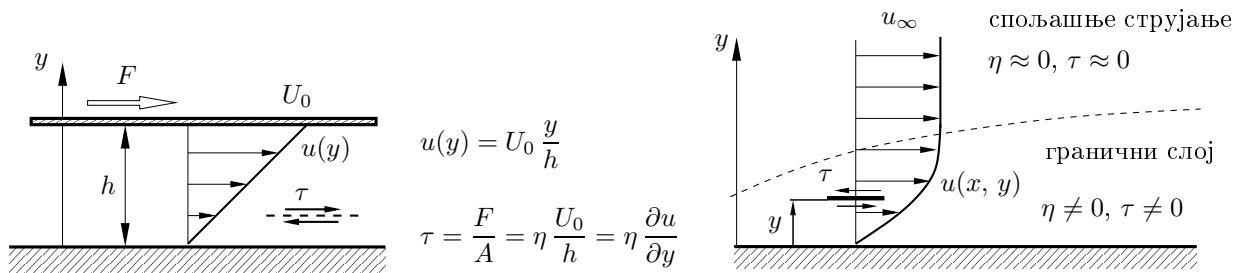
Слика 1.7. Шематски приказ молекуларног преноса импулса.

Методe статистичке физике → укупан пренос импулса у јединици времена по јединици хоризонталне површи на растојању  $y$  → сила по јединици површи → тангенцијални, тј. смицајни напон  $\tau$  у слоју на нивоу  $y$ :

$$\tau = \frac{\rho \bar{V} l}{3} \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (1.5)$$

### 1.5.2 Макроскопски модел вискозности

Макроскопски модел - унутрашње трење, viscosité - лепљивост.



Слика 1.8. Куетово (Couette) струјање (смицајно струјање у равном процепу) и спољашње струјање - гранични слој. Смицајни напон  $\tau$  - унутрашње трење, динамичка вискозност;  $\eta$  - пријањање (лепљење) флуида на чврстим површима.

Промена брзине, тј. профил брзине  $u(x, y)$  је последица деловања адхезионих и кохезионих мејумолекуларних сила. Та мејудејства се испољавају у правцу тангенте као тангенцијални, тј. смицајни напон  $\tau$  дефинисан изразом

$$\tau = \eta \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (\text{Њутн, 1687}) \quad (1.6)$$

Вискозност је *макроскопски* ефекат молекуларне, тј. *микроскопске* размене импулса појединих флуидних делића, који се испољава као *унутрашње трење флуида* у виду *смицајних напона* и *сила трења*. Величина  $\eta$  је коефицијент динамичке вискозности, тј. *динамичка вискозност* и представља физичко својство флуида. *Кинематичка вискозност* се дефинише као  $\nu = \eta/\rho$ .

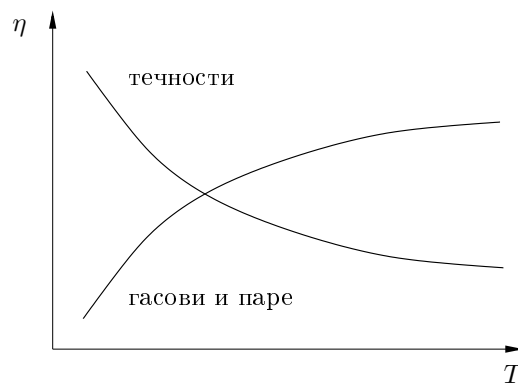
	$\eta \cdot 10^6$ [Pa · s]	$\nu \cdot 10^6$ [m <sup>2</sup> /s]
ваздух	18,2	15,11
вода	1002	1,004
силиконско уље	130950	135

Табела 1.2. Карактеристичне вредности вискозности.

Напомена:  $\nu_{\text{vode}} = 1 \text{ mm}^2/\text{s}$ ,  $\nu_{\text{vazduha}} = 15 \text{ mm}^2/\text{s}$  (!)

### 1.5.3 Зависност динамичке вискозности од притиска и температуре за гасове и течности

Динамичка вискозност  $\eta$  зависи температуре и притиска, али је зависност од температуре знатно израженија, па се може сматрати да је  $\eta(T, p) \approx \eta(T)$ . При томе  $\eta$  расте са порастом температуре код гасова, а опада код течности (слика 1.9), што је последица микроструктуре течности и гасова.



Слика 1.9. Промена динамичке вискозности  $\eta$  са температуром  $T$ .

Код **гасова** се са повећањем температуре повећава и брзина молекула ( $T \nearrow \rightarrow \bar{V} \nearrow$  јер је  $\bar{V} \sim \sqrt{T}$ ), а самим тим и преношење импулса при судару молекула, што сагласно изразима (1.5) и (1.6), тј. релацији  $\eta = \frac{1}{3}\rho\bar{V}l$ , доводи до пораста вискозности  $\eta$ .

Код **течности**, међутим, међумолекуларне силе имају одлучујућу улогу, тако да са порастом температуре, слаби међусобна веза молекула, делићи се лакше покрећу, вискозност опада (слика 1.9).

У литератури се дају многобројне емпиријске формуле, табеле и дијаграми за одређивање  $\eta$  у функцији од  $T$  и  $p$  за различите флуиде. У овом курс наводе се две карактеристичне



формуле за гасове и течности. За **гасове** важи следећа релација:

$$\frac{\eta}{\eta_0} = \frac{T_0 + T_s}{T + T_s} \left( \frac{T}{T_0} \right)^{3/2} \approx \left( \frac{T}{T_0} \right)^n \quad (1.7)$$

$\uparrow$  Сатерленд (Sutherland) кинетичка теорија гасова       $\uparrow$  Емпиријска формула

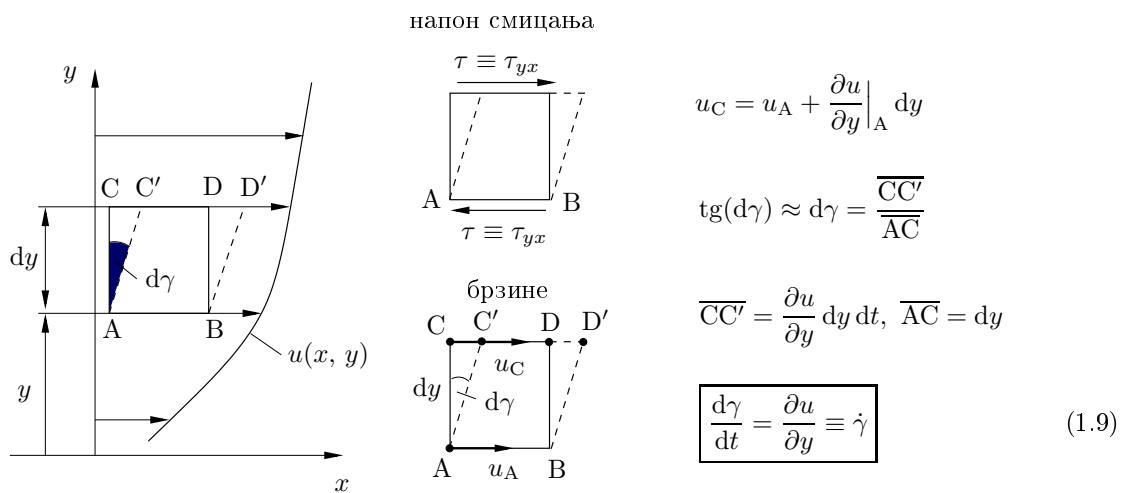
Референтне вредности за ваздух при  $p_0 = 1 \text{ bar}$  су  $T_0 = 273,16 \text{ K}$ ,  $\eta_0 = 17,1 \mu\text{Pa} \cdot \text{s}$  и  $T_s = 122 \text{ K}$  је Сатерлендова (Sutherland) константа. Експонент  $n$  зависи од врсте гаса и температурског интервала. За ваздух је  $n = 1$ , али за велике температуре је  $n \approx 0,76$ . Вредности  $n$  су у интервалу  $0.5 \leq n \leq 1,56$ .

За течности у температурском интервалу  $0 < T_c < 100^\circ \text{ C}$  примењује се израз

$$\frac{\eta}{\eta_0} = \exp \left( \frac{T_A}{T + T_B} - \frac{T_A}{T_B + T_0} \right) \quad (1.8)$$

За воду су вредности константи  $T_A = 506 \text{ K}$ ,  $T_B = -150 \text{ K}$  и при притиску  $p_0 = 1 \text{ bar}$  су референтне вредности  $T_0 = 273,16 \text{ K}$  и  $\eta_0 = 1,793 \text{ mPa} \cdot \text{s}$

**1.5.4 Отпор промени облика - вискозност. Напон, деформација, брзина деформисања - реолошки модел. Физичко тумачење извода брзине у изразима (1.5) и (1.6).**



Слика 1.10. Физичко-геометријски смисао извода брзине  $\partial u / \partial y$ .

Величина  $\dot{\gamma}$  представља *брзину деформације*, промену облика флуидног делића у јединици времена, тј. *брзину деформисања* флуидног делића, која је у овом случају изражена брзином промене угла смицања  $\dot{\gamma}$ , тј. брзином промене облика делића. Друга врста деформисања, тј. брзина промене запремине флуидног делића размотриће се у оквиру једначине континуитета.



Суштинска разлика између флуида и чврстог тела (еластичне материје) је у *реолошкој законитости*, тј. у међузависности напона и деформација:

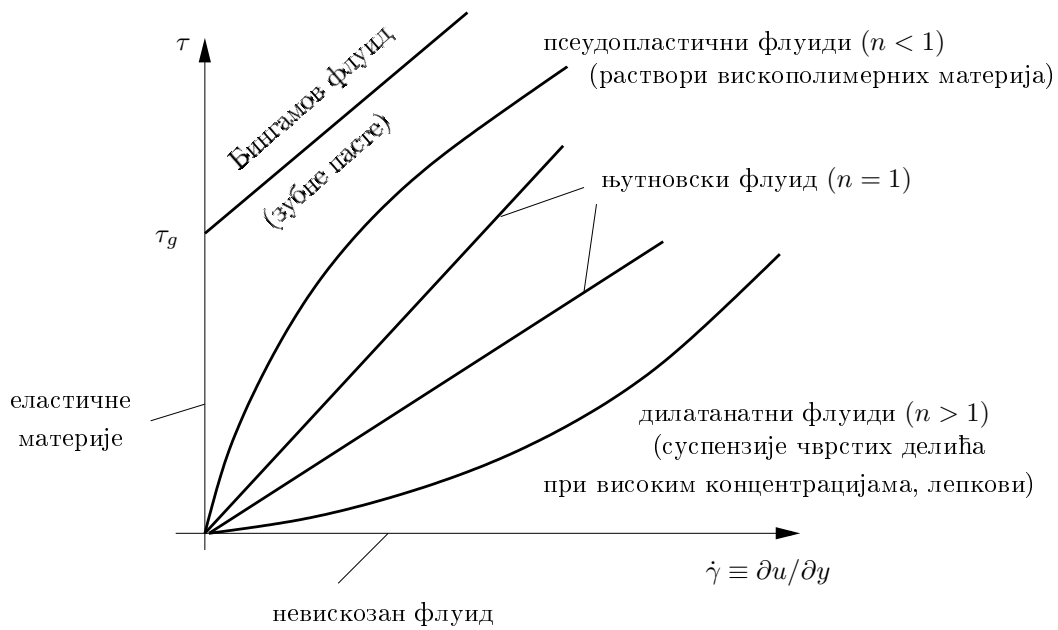
Напони су функције деформација код еластичног тела, док су код флуида напони функције од брзине деформисања.

### 1.5.5 Њутновски и нењутновски флуиди

Реологија је наука која изучава међузависности напонског и деформационог стања непрекидне средине, тј. континуума. У пракси се често појављује општа *реолошка зависност*  $\tau = f(\dot{\gamma})$ . Ако је  $f$  **линеарна** функција онда се ради о **њутновским флуидима** (вода, ваздух, техничка уља). Нелинеарним функцијама  $f(\dot{\gamma})$  описани су нењутновским флуидима (суспензије, полимери, уљане боје и друго). Заједничка реолошка законитост приказује се степеном функцијом

$$\tau = k \dot{\gamma}^n \quad \begin{cases} n < 1 - \text{псевдопластични флуиди} \\ n = 1 - \text{њутновски флуиди} \\ n > 1 - \text{дилатантни флуиди.} \end{cases}$$

Бингамов флуид за  $\tau < \tau_g$  (слика 1.11) понаша се као чврсто еластично тело, а за  $\tau > \tau_g$  као њутновски флуид. Пример за Бингамов тип флуида је зубна паста.



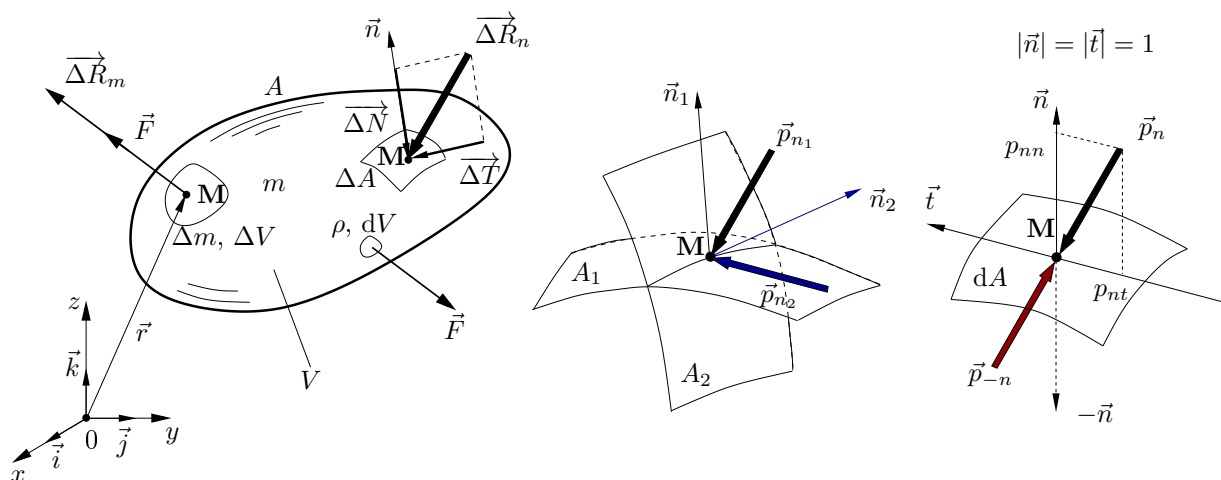
Слика 1.11. Реолошки дијаграм - функција напона од брзине деформисања - криве течења.

Овде је важно истаћи следеће:

1. Код њутновских флуида  $\eta$  је независно од  $\dot{\gamma}$ .
2. Најопштија реолошка законитост је дата изразом  $P = \mathcal{F}(\dot{S})$ , у коме је  $P$  тензор напона, а  $\dot{S}$  тензор брзине деформисања.
3. Реолошке законитости представљају основ за изучавање динамике како њутновских, тако и нењутновских флуида.

## 2 Анализа општег стања напона у флуиду

У механици флуида све силе се деле на масене, тј. запреминске и површинске. Масене силе делују на масе флуидних делића, тј. на масу издвојеног дела флуида запремине  $V$ , а површинске силе своје дејство остварују преко граничне површи  $A$  између издвојеног флуида и његове околине, тј. окружења (сл. 2.1).



**Слика 2.1.** Масене и површинске силе. Вектори напона  $\vec{p}_1 \equiv \vec{p}_{n_1}(\vec{r}; t; \vec{n}_1)$  и  $\vec{p}_2 \equiv \vec{p}_{n_2}(\vec{r}; t; \vec{n}_2)$  у тачки  $M$  зависе од оријентације површи  $A_1$  и  $A_2$ , тј. од њихових јединичних вектора  $\vec{n}_1$  и  $\vec{n}_2$  нормала у тачки  $M$ . Компонентне вектора напона  $\vec{p}_n$  у тачки  $M$  у правцу нормале ( $p_{nn}$ ) и тангенте ( $p_{nt}$ ) на површиницу  $dA$  у тачки  $M$ .

### 2.1 Масене силе

Масене силе су: гравитационе силе (сила Земљине теже), инерцијалне силе (центрифугална, Кориолисова), електромагнетне силе (Лоренцова - када електропрводни флуид струји у магнетном и електричном пољу), силе које се јављају при различитим хемијским реакцијама и друге. Векторско поље јединичне масене силе  $\vec{F}(\vec{r}, t)$ , које може да буде хомогено или нехомогено, стационарно или нестационарно, одређено је релацијом

$$\vec{F} = \lim_{\Delta m \rightarrow M} \frac{\vec{\Delta R}_m}{\Delta m} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\vec{\Delta R}_m}{\rho \Delta V} = \frac{1}{\rho} \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\vec{\Delta R}_m}{\Delta V} = \frac{1}{\rho} \frac{d\vec{R}_m}{dV}. \quad (2.1)$$

Масена сила која делује на један флуидни делић је  $d\vec{R}_m$ , а укупна, тј. резултујућа масена сила која делује на издвојену количину флуида масе  $m$  и запремине  $V$  је  $\vec{R}_m$  и оне су

дефинисане изразима

$$\boxed{\overrightarrow{dR}_m = \rho \vec{F} dV} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\vec{R}_m = \iiint_V \rho \vec{F} dV}. \quad (2.2)$$

## 2.2 Површинске силе. Вектор и тензор напона

Утицај околине (течности, гаса, чврстих површи и другог) преко површи  $A$  на издвојену количину материје, тј. непрекидне средине масе  $m$  у посматраној запремини  $V$  се приказује непрекидним векторским пољем површинских сила, чијим се свођењем на јединицу површи добија *вектор напона*  $\vec{p}_n$  у произвољној тачки струјног простора.

$$\boxed{\vec{p}_n} = \lim_{\substack{\Delta A \rightarrow 0 \\ M \in \Delta A}} \frac{\overrightarrow{\Delta R}_n}{\Delta A} = \frac{\overrightarrow{dR}_n}{dA} = \boxed{\vec{p}_n(\vec{r}, t; \vec{n})}. \quad (2.3)$$

У изразу (2.3) величина  $\overrightarrow{dR}_n$  је елементарна површинска сила која делује на површину  $dA$  чији је јединични вектор спољашње нормале  $\vec{n}$ . Посредством вектора напона (2.3), дефинише се укупна, резултујућа површинска сила  $\vec{R}_n$  како следи

$$\boxed{\overrightarrow{dR}_n = \vec{p}_n dA} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\vec{R}_n = \iint_A \vec{p}_n dA}. \quad (2.4)$$

Вектор напона  $\vec{p}_n$ , сагласно ознакама на слици 2.1, може да се прикаже преко својих компоненти у облику

$$\vec{p}_n = p_{nx}\vec{i} + p_{ny}\vec{j} + p_{nz}\vec{k} = p_{nn}\vec{n} + p_{nt}\vec{t}, \quad (2.5)$$

при чему величине

$$p_{nn}\vec{n} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\overrightarrow{\Delta N}}{\Delta A} = \frac{\overrightarrow{dN}}{dA} \quad \text{и} \quad p_{nt}\vec{t} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\overrightarrow{\Delta T}}{\Delta A} = \frac{\overrightarrow{dT}}{dA}$$

представљају вектор *нормалног* напона и вектор *смицајног*, тј. тангенцијалног напона. Применом *трећег Њутновог закона* и у складу са ознакама на слици 2.1, добија се релација

$$\vec{p}_n dA = -\vec{p}_{-n} dA \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\vec{p}_{-n} = -\vec{p}_n}. \quad (2.6)$$

Са слике 2.1 се уочава да кроз тачку  $M$ , у којој је потребно одредити стање напона, пролази бесконачно много површи са различитим оријентацијама, тј. различитим јединичним векторима нормале  $\vec{n}$ , тако да је сагласно изразу (2.3), поље вектора напона  $\vec{p}_n$  *неједнозначно* векторско поље. Наиме,  $\vec{p}_n$  у тачки  $M$  не зависи само од вектора положаја  $\vec{r}$  и времена  $t$ , већ и од **оријентације површи**  $\vec{n}$  која кроз ту тачку пролази. На то указује (сл. 2.2), тј. то и јесте смисао ознаке "n" у обележавању вектора напона  $\vec{p}_n$ .

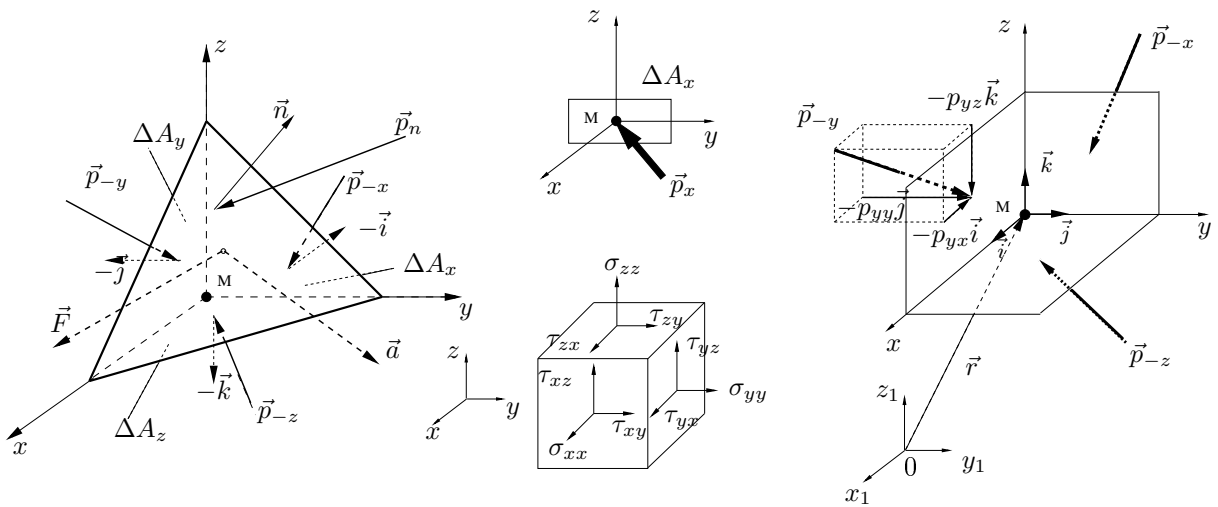
Принцип напона Кошија (Cauchy, 1789-1857) и Кошијеве једначине (1822) су разрешиле овај проблем у механици континуума. У том циљу се из флуида запремине  $V$  (сл. 2.1) издваја елементарна количина флуида запремине  $\Delta V$  у облику **тетраедра**, сл. 2.2, и на ту

елементарну масу  $\Delta m = \rho \Delta V$  примењује други Њутнов закон кретања

$$\underbrace{\vec{a}\rho \Delta V}_{\text{инерцијална сила}} = \underbrace{\rho \vec{F} \Delta V}_{\text{масена сила}} + \underbrace{\vec{p}_n \Delta A_n + \vec{p}_{-x} \Delta A_{-x} + \vec{p}_{-y} \Delta A_{-y} + \vec{p}_{-z} \Delta A_{-z}}_{\text{површинска сила (векторски збир површинских сила на страницама тетраедра)}}. \quad (2.7)$$

У једначини (2.7)  $\vec{a}$  означава убрзање, а  $\vec{p}_{-x}$ ,  $\vec{p}_{-y}$  и  $\vec{p}_{-z}$  су вектори напона за површнице чије су спољашње нормале паралелне и супротно усмерене од оса  $x$ ,  $y$  и  $z$ , тј. од њихових јединичних вектора  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$  и  $\vec{k}$ . Сагласно изразу (2.6), добија се

$$\vec{p}_{-x} = -\vec{p}_x, \quad \vec{p}_{-y} = -\vec{p}_y, \quad \vec{p}_{-z} = -\vec{p}_z, \quad (2.8)$$



Слика 2.2. Анализа вектора напона  $\vec{p}_n$  и  $\vec{p}_{-\xi}$  где је  $\xi = x, y, z$ .

За анализу једначине (2.7) користе се следеће релације:

$$\begin{aligned} \vec{n} &= n_x \vec{i} + n_y \vec{j} + n_z \vec{k} = \cos(n, x) \vec{i} + \cos(n, y) \vec{j} + \cos(n, z) \vec{k} \\ \frac{\Delta A_x}{\Delta A_n} &= n_x, \quad \frac{\Delta A_y}{\Delta A_n} = n_y, \quad \frac{\Delta A_z}{\Delta A_n} = n_z \Leftrightarrow \frac{\Delta A_\xi}{\Delta A_n} = n_\xi, \quad \xi = x, y, z \\ \lim_{l \rightarrow 0} \frac{\Delta V}{\Delta A_n} &= 0 \Leftrightarrow \frac{\Delta V}{\Delta A_n} \xrightarrow{l \rightarrow 0} 0, \quad \text{јер је } \Delta V \propto l^3 \text{ и } \Delta A_n \propto l^2. \end{aligned} \quad (2.9)$$

После дељења једначине (2.7) са површиницом  $A_n$  и коришћења релација (2.9) добија се Кошијева једначина

$$\boxed{\vec{p}_n = \vec{p}_x n_x + \vec{p}_y n_y + \vec{p}_z n_z} \quad (2.10)$$

која представља основну, фундаменталну једначину за анализу стања напона у механици непрекидне средине. Она важи за било који вектор  $\vec{n}$ . Дакле, стање напона у произвољној тачки М флуида потпуно је одређено векторима напона  $\vec{p}_x$ ,  $\vec{p}_y$  и  $\vec{p}_z$ , тј. ако се зна стање напона у три равни које одређују произвољну тачку, онда се оно зна и са било коју четврту раван, одређену са  $\vec{n}$  која пролази кроз ту тачку.

Познато је да се векторска једначина (2.10) може написати у различитим скаларним и матричним облицима. На пример, ако се израз за  $\vec{p}_x$  (сл. 2.2),

$$\underbrace{\vec{p}_x}_{\substack{\text{вектор напона} \\ \text{за површ чија је} \\ \text{нормала паралелна} \\ \text{оси } x}} = \underbrace{p_{xx}\vec{i}}_{\text{нормални напон}} + \underbrace{p_{xy}\vec{j} + p_{xz}\vec{k}}_{\substack{\text{смицајни (тангенцијални)} \\ \text{напони}}} \quad (2.11)$$

и аналогни изрази за  $\vec{p}_y$  и  $\vec{p}_z$  уврсте у једначину (2.10) добија се систем скаларних једначина

$$\begin{aligned} p_{nx} &= p_{xx}n_x + p_{yx}n_y + p_{zx}n_z \\ p_{ny} &= p_{xy}n_x + p_{yy}n_y + p_{zy}n_z \\ p_{nz} &= p_{xz}n_x + p_{yz}n_y + p_{zz}n_z \end{aligned} \quad (2.12)$$

који може да се напише у уобичајеном компактном облику

$$p_{nm} = \sum_k p_{km}n_k = p_{km}n_k, \quad m, k = x, y, z. \quad (2.13)$$

↑  
Сумира се по  $k$ !

**НАПОМЕНА 1:** Увођењем индексне нотације и правила о сумирању по поновљеним индексу, једначина (2.10) добија облик

$$\vec{p}_n = \vec{p}_1n_1 + \vec{p}_2n_2 + \vec{p}_3n_3 = \vec{p}_in_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (2.14)$$

Према томе,  $\vec{p}_n$  представља линеарну функцију компонената вектора  $\vec{n}$  па важи:

$$\boxed{p_{nj} = p_{ij}n_i}, \quad \text{где је } p_{ij} = p_{ij}(\vec{r}, t). \quad (2.15)$$

**Матрица** коефицијената  $p_{ij}$  формира, очигледно **тензор**, који се назива **тензором напона** и у овом курсу ће се означити са  $P$ . Тада је индексном запису (2.15), као и систему једначина (2.12) у матричном облику

$$\vec{p}_n = P \cdot \vec{n}, \quad (2.16)$$

у коме је

$$P = \|\|p_{ij}\|\| \implies P = \begin{pmatrix} p_{xx} & p_{yx} & p_{zx} \\ p_{xy} & p_{yy} & p_{zy} \\ p_{xz} & p_{yz} & p_{zz} \end{pmatrix}. \quad (2.17)$$

Свака компонента  $p_{ij}$  има јасну физичку интерпретацију, јер представља компоненту напона која делује на површ чија је спољашња нормала паралелна оси  $i$  и усмерена је у  $j$  правцу. Појединачне компоненте напона  $p_{ij}$  матрице (2.17) сагласно изразима (2.10)-(2.16), зависе од избора координатног система, међутим тензор  $P$  је **физичка величина** која једнозначно одређује стање напона у тачки флуида  $P = P(\vec{r}, t)$  и **не зависи** од избора координатног система, тј. **инваријантан** је у односу на њега.

**НАПОМЕНА 2:** У литератури је често поред ових ознака  $p_{ij}$  користе и ознаке  $\sigma_{kk}$  за *нормалне* напоне и  $\tau_{ij}$  ( $i \neq j$ ) за *смицајне* напоне. Сходно овоме уведе се следећа еквивалентна

означавања:

Нормални напони	Смицајни напони	
$p_{xx} = \sigma_{xx} = \sigma_{11}$	$p_{xy} = \tau_{xy} = \tau_{12}$	(2.18)
$p_{yy} = \sigma_{yy} = \sigma_{22}$	$p_{xz} = \tau_{xz} = \tau_{13}$	
$p_{zz} = \sigma_{zz} = \sigma_{33}$	$p_{yz} = \tau_{yz} = \tau_{23}$	

Матрични запис једначине систем сада има облик

$$\begin{pmatrix} p_{nx} \\ p_{ny} \\ p_{nz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix}. \quad (2.19)$$

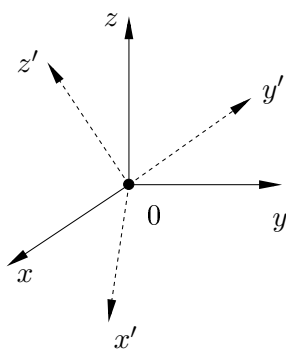
## 2.2.1 Основна својства напона

### I Симетричност

$$\tau_{ij} = \tau_{ji} \Leftrightarrow \tau_{xy} = \tau_{yx}, \tau_{xz} = \tau_{zx}, \tau_{yz} = \tau_{zy} \quad (2.20)$$

Тензор напона је **симетричан**. Доказ се изводи применом једначине о моменту количине кретања.

### II Прва инваријанта тензора, матрице напона



$$\sigma_{x'x'} + \sigma_{y'y'} + \sigma_{z'z'} = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}. \quad (2.21)$$

У најопштијем случају површинских сила нормални напони у произвољној тачки М флуида мењају се са променом оријентације површи (ротација координатног система  $0xyz \rightarrow 0x'y'z'$ ) у тој тачки (на пример,  $\sigma_{xx} \neq \sigma_{x'x'}$ ). Међутим, збир **нормалних напона** на три међусобно ортогоналне равни у једној тачки представља **инваријанту**. Дакле, збир елемената на главној дијагонали тензора напона  $P$  је скаларна величина инваријантна у односу на оријентацију координата.

Израз (2.21), сагласно релацијама (2.18), гласи:

$$\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = \sigma_{1'1'} + \sigma_{2'2'} + \sigma_{3'3'} \quad (2.22)$$

### III Својство нормалних напона за случај када не делују смичући, тј. тангенцијални напони



Непостојање смицајних напона је, сагласно изразима (2.5), (2.15) и (2.18), дефинисано релацијом

$$\boxed{p_{nt} = 0 \Leftrightarrow \tau_{ij} = 0, i \neq j} \Leftrightarrow \boxed{\tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0}. \quad (2.23)$$

Стање напона одређено је нормалним напонима

$$\vec{p}_n = p_{nn}\vec{n} \equiv \sigma_{nn}\vec{n}, \quad \vec{p}_x = \sigma_{xx}\vec{i}, \quad \dots, \quad \vec{p}_z = \sigma_{zz}\vec{k}. \quad (2.24)$$

Уврштавањем релација (2.24) у Кошијеву једначину (2.10) добија се

$$\sigma_{nn}(n_x\vec{i} + n_y\vec{j} + n_z\vec{k}) = \sigma_{xx}n_x\vec{i} + \sigma_{yy}n_y\vec{j} + \sigma_{zz}n_z\vec{k}$$

одакле, изједначавањем величина уз исте јединичне векторе са леве и десне стране једначине следи **Паскалов закон**

$$\boxed{\sigma_{nn} = \sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz}} \Leftrightarrow \boxed{\sigma_{1'1'} = \sigma_{11}, \dots}. \quad (2.25)$$

Дакле, ако су смицајни напони једнаки нули, онда *нормални напони* у датој тачки *не зависе од оријентације површи*, тј. нормални напон је и једној тачки **исти** за све правце.

## 2.2.2 Притисак и напони услед вискозности

Сходно хипотези о лакој покретљивости и великој деформабилности флуида нормални напони у (2.25) не могу бити напони истезања, јер флуид трпи само притисак. Дакле, **притисак**  $p$  при  $\tau_{ij} = 0$ , када важи релација (2.25), је нормални напон узет са супротним знаком:

$$\boxed{\tau_{ij} = 0 \Rightarrow p = -\sigma_{nn} = -\sigma_{xx} = -\sigma_{yy} = -\sigma_{zz}}. \quad (2.26)$$

Дакле, **притисак је скаларна величина**. Он не зависи од оријентације површи, тј. исти је у свим правцима који пролазе кроз неку тачку (Паскалов закон). Нормални напони, тј. вектори напона у овом случају, сагласно изразима, (2.25) и (2.26), израчунавају се помоћу притиска:

$$\boxed{\tau_{ij} = 0 \Rightarrow \vec{p}_n = -p\vec{n}, \vec{p}_x = -p\vec{i}, \vec{p}_y = -p\vec{j}, \vec{p}_z = -p\vec{k}} \quad (2.27)$$

Знак "–" показује да је вектор нормалног напона увек усмерен супротно спољашњој нормали површи и да се јавља као напон притиска.

Како се дефинише притисак када је  $\tau_{ij} \neq 0$ ? Настајање и дејство смицајних напона  $\tau_{ij}$  изазвано је истовременим утицајем кретања, тј. струјања флуида ( $\vec{U} \neq 0$ ) и његовом вискозношћу ( $\eta \neq 0$ ). *Вискозност* доводи до појаве не само тангенцијалних, тј. смицајних напона  $\tau_{ij}$  већ и до *промене нормалних напона* у односу на случај невискозног флуида ( $\eta = 0$ ). Сходно томе уводи се **хипотеза за нормалне напоне**:

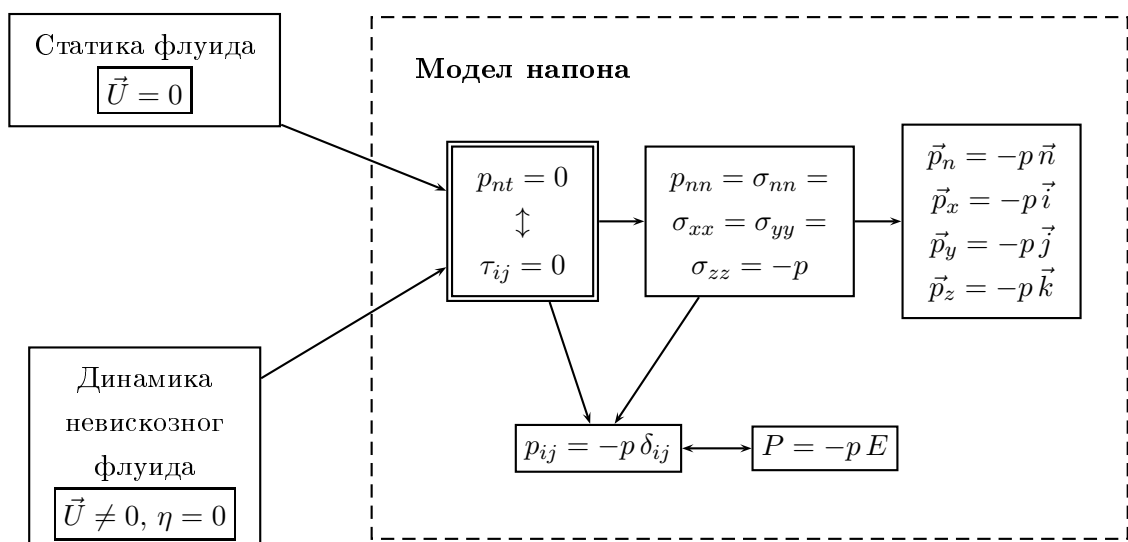
$$\sigma_{xx} = -p + \sigma_{xx}^\eta, \quad \sigma_{yy} = -p + \sigma_{yy}^\eta, \quad \sigma_{zz} = -p + \sigma_{zz}^\eta, \quad (2.28)$$

при чему горњи индекс  $\eta$  означава да се ради о **нормалним напонима услед вискозности**, тј. нормалних вискозним напонима. Величине  $\tau_{ij}$ ,  $i, j = 1, 2, 3$ , су смицајни напони који су директна последица вискозности флуида. У оваквом пољу напона, сагласно израз у (2.21), збир нормалних напона је инваријантан и има својство притиска. Уопштавањем овог појма притиска изражава се следећом **хипотезом**: притисак је негативна средња аритметичка вредност нормалних напона. Дакле, притисак у вискозном флуиду се дефинише првом инваријантом тензора напона у облику

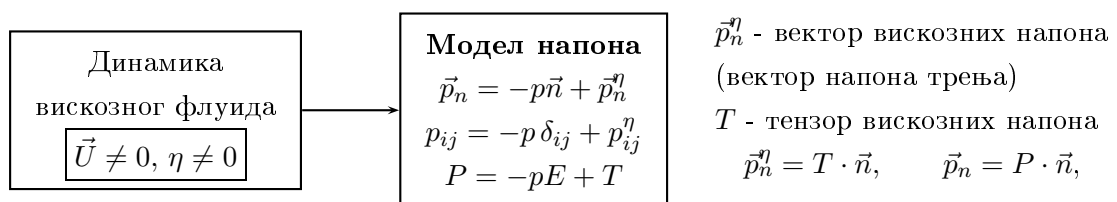
$$p = -\frac{1}{3}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}). \quad (2.29)$$

Скаларно поље притиска у вискозном флуиду, тј. хидродинамички притисак у некој тачки флуида одређује се помоћу укупних нормалних напона.

### 2.2.3 Напонски модели у статисти и динамици невискозног и вискозног флуида



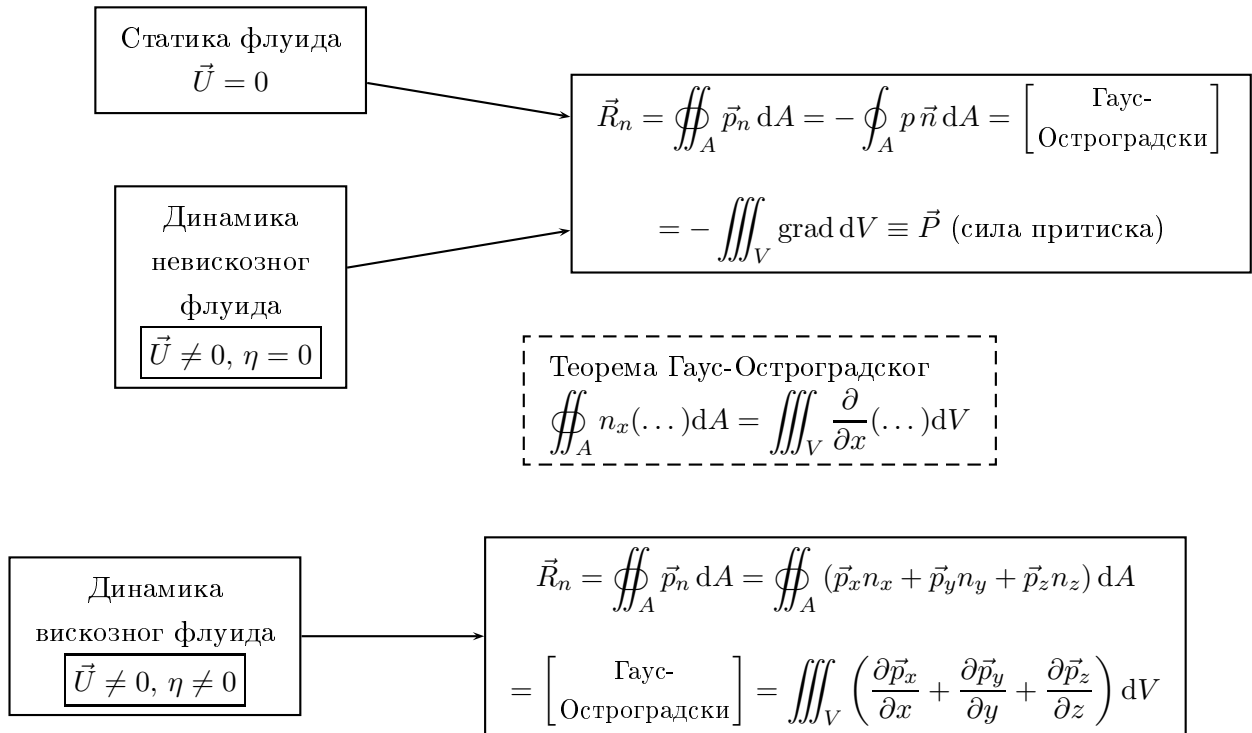
$$P = \|\|p_{ij}\|\| = \begin{pmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$



$$p = -\frac{1}{3}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz})$$

$$T = \begin{pmatrix} \sigma_{xx}^\eta & \tau_{yx}^\eta & \tau_{zx}^\eta \\ \tau_{xy}^\eta & \sigma_{yy}^\eta & \tau_{zy}^\eta \\ \tau_{xz}^\eta & \tau_{yz}^\eta & \sigma_{zz}^\eta \end{pmatrix}$$

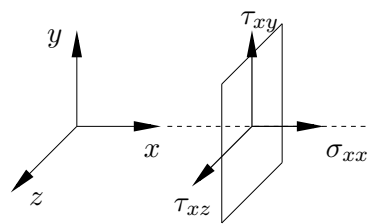
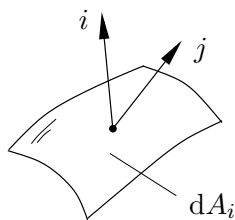
2.2.4 Резултујући вектор површинских сила



**НАПОМЕНА 3:** Напони и површинске силе у произвољним правцима

Стање напона може да се опише помоћу компонената како следи

$$p_{ij} = \frac{dR_j}{dA_i} \quad i,j=\overrightarrow{x,y,z} \quad p_{xz} \equiv \tau_{xz} = \frac{dR_z}{dA_x}$$



$p_{ij}$  - компонента напона која делује на  $i$ -површ ( $dA_i$ ) у  $j$ -правцу

Резултујућа површинска сила у  $j$ -правцу дата је изразом

$$R_j = \iint_A p_{ij} n_i dA \quad \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Гаус-Остроградски}}}{=} \quad \iiint_V \frac{\partial p_{ij}}{\partial x_i} dV$$

Дакле, за израчунавање дејства површинске силе на масу флуида у запремини  $V$  ограниченој површи  $A$  довољно је познавати поље напона само на граничној површи  $A$ , а не и унутар запремине  $V$ .

## 3 Мировање флуида

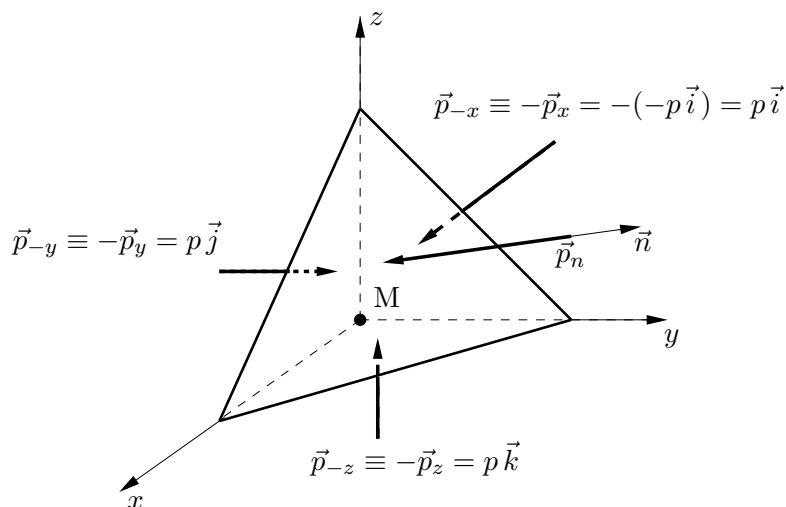
### 3.1 Стање напона. Статички притисак

Из поглавља 1.2 и 2.2.3 следи

$$\vec{p}_n = -p\vec{n}, \quad p_\xi = -p\vec{i}_\xi, \quad \xi = x, y, z. \quad (3.1)$$

- У флуиду који мирује не постоји трење.
- Притисак  $p$  при мировању флуида означава се као **статички притисак**.
- Поље, тј. стање напона дефинисано је скаларним пољем притиска  $p = p(\vec{r})$ . **Притисак је скалар!**

Тако се стање напона у статисти сагласно слици 2.7 може приказати сликом 3.1.



**Слика 3.1.** Површинске силе које делују на флуидни делић облика тетраедра у случају статике флуида.

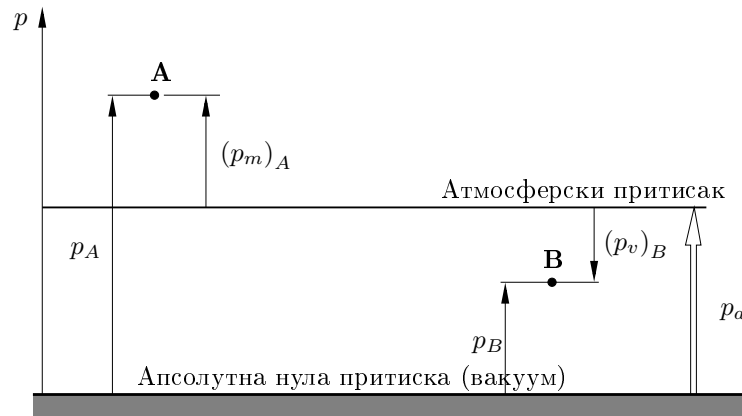
$$\vec{p}_n = p_{nn}\vec{n} = -p\vec{n}, \quad \vec{p}_x = -p\vec{i}, \quad \vec{p}_y = -p\vec{j}, \quad \vec{p}_z = -p\vec{k}$$

У флуиду који мирује једина постојећа нормална компонента напона не зависи од оријентације површи и у свакој тачки тог флуида је

$$p_{nn} = p_{xx} = p_{yy} = p_{zz} = -p$$

### 3.1.1 Појам апсолутног притиска, потпритиска и натпритиска

Као што је речено у уводу, при мировању флуида напонско стање у флуиду се своди на притисак. Основна јединица у SI систему за притисак је **паскал** - [Pa]. Алтернативна јединица за притисак, која се често користи у механици флуида је bar -  $1\text{ bar} = 100000\text{ Pa} \equiv 10^5\text{ Pa}$ .



Слика 3.2. Разни начини представљања притиска

Дефинишимо сада појмове везане за притисак, а које ћемо често сретати. То су:

- **Атмосферски притисак** - представља притисак околног ваздуха, и он је функција временских услова и надморске висине. Означава се са  $p_a$  или  $p_b$ . У нашим прораџуницама најчешће се узимати да је  $p_a = const$ , и да та вредност износи приближно  $p_a \approx 1\text{ bar}$ , тачније  $p_a = 101325\text{ Pa}$ . Ова вредност представља тзв. стандардну атмосферу.
- **Апсолутни притисак** - апсолутни притисак се мери у односу на апсолутну нулу притиска (види слику слику 3.2), и он у флуиду може бити мањи, једнак или већи од атмосферског. Означава се са  $p$ .
- **Натпритисак** - ако је у некој тачки флуиду притисак **већи** од атмосферског, онда се у тој тачки може дефинисати натпритисак који представља разлику апсолутног притиска у тој тачки и атмосферског притиска. Означава се са  $p_m$ .
- **Потпритисак** - ако је у некој тачки у флуиду притисак **мањи** од атмосферског, онда се у тој тачки може дефинисати потпритисак који представља разлику атмосферског притиска и апсолутног притиска у тој тачки. Означава се са  $p_v$ .

$$p_A = p_a + (p_m)_A \quad - \quad \text{апсолутни притисак у тачки A}$$

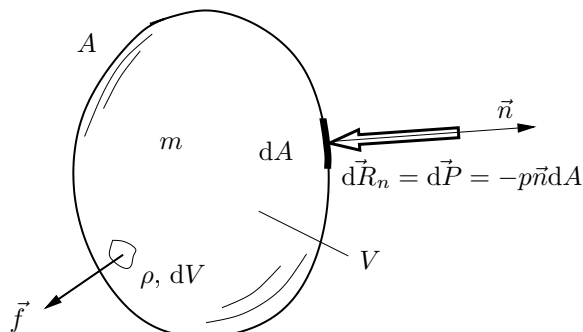
$$p_B = p_a - (p_v)_B \quad - \quad \text{апсолутни притисак у тачки B}$$

$$(p_m)_A \quad - \quad \text{натпритисак у тачки A}$$

$$(p_v)_B \quad - \quad \text{потпритисак у тачки B}$$

## 3.2 Ојлерова једначина

Посматра се произвољна запремина флуида  $V$  који се налази у стању мировања (сл. 3.3).



**Слика 3.3.** Издвојена произвољна количина флуида масе  $m$  и запремине  $V$  која се налази у стању мировања.

Из поглавља 2.2.4 и израза (3.1) следи израз за резултујућу површинску силу

$$\vec{R}_n = \iint_A \vec{p}_n dA = - \iint_A p \vec{n} dA = - \iiint_V \nabla p dV = \vec{P} \quad (3.2)$$

која се у овом случају своди на силу притиска  $\vec{P}$ . У изразу (3.2) је коришћена формула Гаус-Остроградског

$$\iint_A p \vec{n} dA = \iiint_V \text{grad} p dV. \quad (3.3)$$

Применом првог Њутновог закона на издвојену масу флуида у запремини  $V$  ограниченој са површи  $A$  добија се

$$\sum_i \vec{F}_i = 0 \Rightarrow \vec{R}_m + \vec{R}_n = 0 \rightarrow \iiint_V \rho \vec{f} dV + \iiint_V -\text{grad} p dV = 0, \quad (3.4)$$

$$\iiint_V (\rho \vec{f} - \nabla p) dV = 0.$$

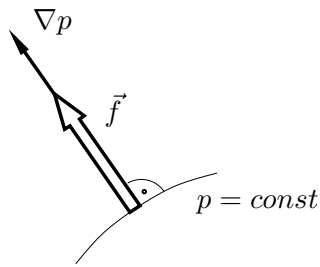
Једначина (3.4) представља интегрални облик Ојлерове једначине статике. Како је запремина  $V$  потпуно произвољна, а запремински интеграл једнак нули, онда, под претпоставком да је подинтегрална функција непрекидна, мора интегранд бити једнак нули како следи:

$$\boxed{\text{grad} p = \rho \vec{f}}. \quad (3.5)$$

Једначина (3.5) представља диференцијални облик Ојлерове једначине.

**Напомена 1:** О облику површи  $p = \text{const}$

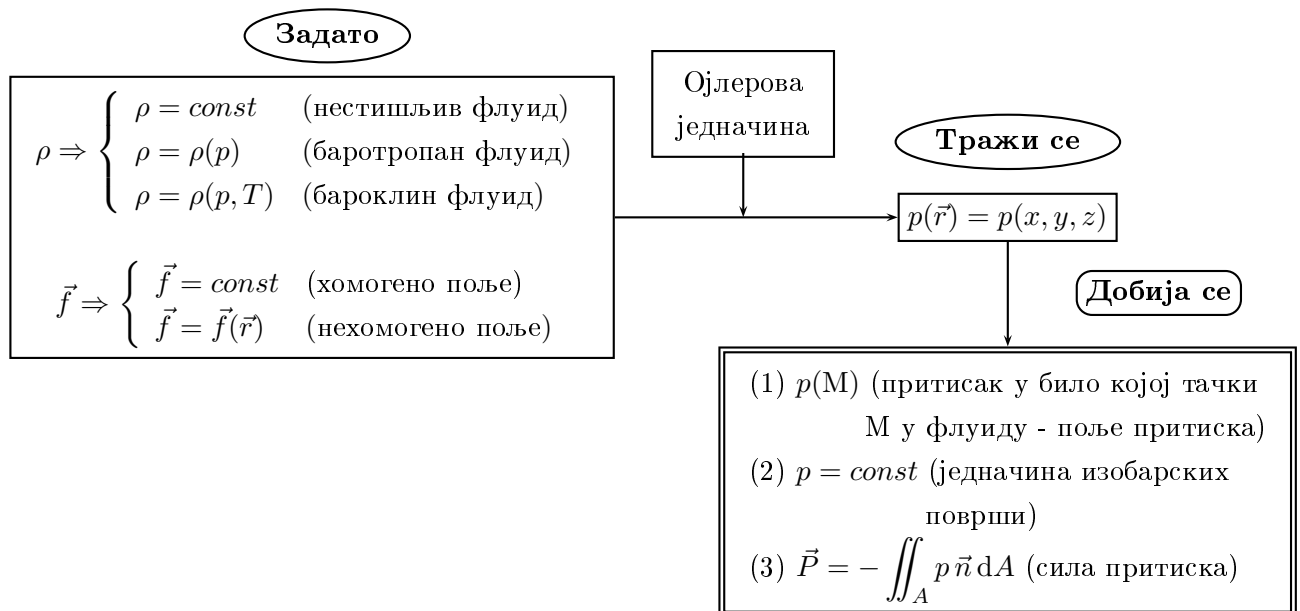
Из векторске једначине (3.5) следи: скаларно поље притиска се тако формира да површи константног притиска (изобарске површи)  $p = \text{const}$  у свакој својој тачки за нормалу имају задато поље масених сила  $\vec{f}(\vec{r})$ ! Вектори  $\nabla p$  и  $\vec{f}$  су међусобно **колинеарни** вектори.



Када су изобарске површи равне, а када криве? То зависи од карактера (природе) масених сила  $\vec{f}$ . Очигледно, када је векторско поље сила  $\vec{f}$  хомогено ( $\vec{f} \neq \vec{f}(\vec{r}) \rightarrow \vec{f} = \text{const}$ ) површи  $p = \text{const}$  морају бити равне површи! За случај нехомогеног поља масених сила  $\vec{f}$ , површи константног притиска (изобарске површи, еквипритисне површи) су криве површи!

### 3.3 Одређивање поља притиска у нестишљивом и стишљивом флуиду

Поље притиска  $p(\vec{r})$  се одређује из једначине (3.5) за задато скаларно поље густине  $\rho(\vec{r})$  и задато векторско поље масених сила  $\vec{f}(\vec{r})$ .



**Напомена 2:** Скаларни облик Ојлерове једначине

У циљу одређивања поља притиска потребно је Ојлерову векторску једначину написати у њеним скаларним облицима како следи:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \rho f_x, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = \rho f_y, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = \rho f_z,$$

$$\vec{f} = f_x \vec{i} + f_y \vec{j} + f_z \vec{k}, \quad d\vec{r} = dx \vec{i} + dy \vec{j} + dz \vec{k}$$

$$\nabla p = \rho \vec{f} / \cdot d\vec{r} \quad \rightarrow \quad dp = \rho (\vec{f} \cdot d\vec{r})$$

$dp = \rho (f_x dx + f_y dy + f_z dz)$

(3.6)

### Напомена 3: Специјални случајеви масених сила важних за механику флуида

#### 1. Хомогено поље сила

- Сила Земљине теже:  $\vec{f} = \vec{g} = \{0, 0, -g\}$
- Инерцијална сила при транслаторном праволинијском кретању константним убрзањем  $\vec{a}$ :  $\vec{f}_{in} = -\vec{a}$

#### 2. Нехомогено поље сила

Центрифугална сила при ротацији константном угаоном брзином  $\omega$  око вертикалне осе  $z$

$$\vec{f} = \omega^2 \vec{r} = \omega^2 x \vec{i} + \omega^2 y \vec{j} = \{\omega^2 x, \omega^2 y, 0\}$$

Строго узевши, овај случај не припада области статике флуида. Међутим, када се у систему постигне ротација флуида као крутог тела, онда се могу применити анализирани једначине.

### 3.3.1 Поље притиска и једначине изобарских површи у случају мировања нестишљивог хомогеног флуида.

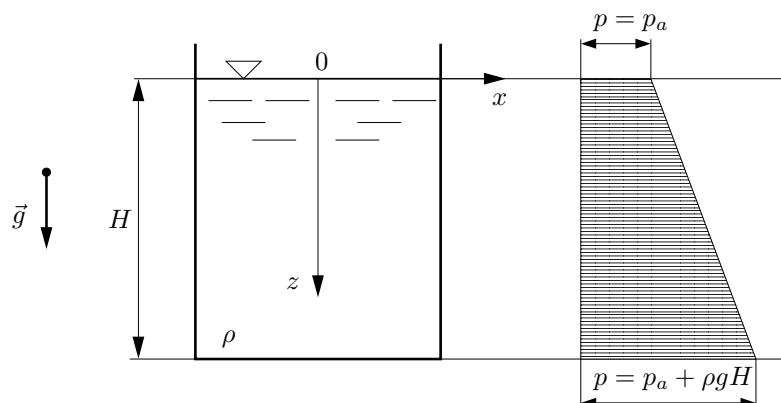
Посматра се мировање нестишљивог хомогеног флуида -  $\rho = const$ , у случају када се он налази у хомогеном и нехомогеном пољу масених сила.

#### Мировање у пољу силе Земљине теже

Када флуид мирује у пољу земљине теже, векторско поље запреминских сила је константно, тј.  $\vec{f} = g \vec{k}$  или  $\vec{f} = -g \vec{k}$ , у зависности од тога како је усмерена оса  $z$  (навише или наниже). Посматрајмо суд који је напуњен течносту која мирује (слика 3.4). Позитиван смер  $z$  осе је вертикално наниже, тако да је  $\vec{f} = g \vec{k}$ .

За овако усвојени координатни систем пројекције вектора  $\vec{f}$  на осе координатног система  $x, y, z$  су  $f_x = f_y = 0$  и  $f_z = g$ . Ако се то замени у једначину (3.6) добија се:

$$p = p(x, y, z) = \int \rho(g dz) + C$$



Слика 3.4. Расподела притиска при мировању нестишљивог флуида у пољу силе Земљине теже



Како се ради о мировању нестишљивог флуида, тј. ако је  $\rho = const.$ , добија се:

$$\boxed{p = \rho g z + C} \quad (3.7)$$

Константа  $C$  се одређује из граничних услова. За конкретан пример са слике 1.3 за  $x = z = 0$ ,  $p = p_a$ , где је  $p_a$  атмосферски притисак. Тако се коначно добија расподела притиска:

$$\boxed{p = p_a + \rho g z} \quad (3.8)$$

Из једначине (3.7) закључујемо да су изобарске површи одређене једначином  $z = const$ , и оне представљају хоризонталне равни. Такође, те изобарске површи и вектор  $\vec{g}$  су нормални, што смо и раније закључили; вектор  $\vec{g}$  показује и смер највећег пораста притиска - вертикално наниже. Изобарска површ на којој је  $p = p_a$  назива се **слободна површ**; означаваћемо је обрнутим троуглићем.

Ако се течност налази у неком затвореном суду, и ако се изнад ње налази неки гас у коме влада натпритисак  $p_m$  (пример - боца неког газираног пића), расподела притиска ће бити врло слична једначини (3.7), разликоваће се само константна  $C$ . У том случају она ће бити  $C = p_a + p_m$ . Са друге стране, ако је изнад нивоа течности гас у коме влада потпритисак  $p_v$ , вредност константе  $C$  ће бити  $C = p_a - p_v$ .

### Мировање у пољу инерцијалних сила и силе Земљине теже

Посматрајмо резервоар који се креће по хоризонталној подлози константним убрзањем  $\vec{a}$ . У стању апсолутног мировања суд је био напуњен до висине  $H$ . Из искуства знамо да ће течност заузети положај приказан на слици 3.5. Ако неки координатни систем вежемо за суд, у том координатном систему нећемо имати кретање течности - у том координатном систему ће важити Ојлерова једначина.

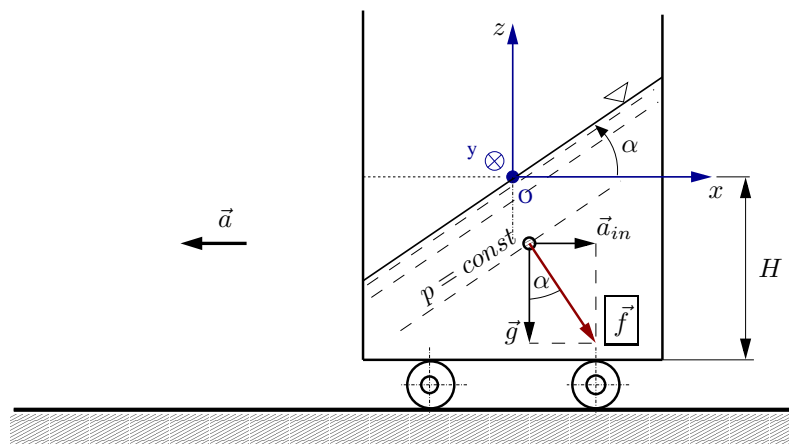
У овом случају масене силе које делују на флуид су  $g$  и инерцијална сила  $a_{in}$ . Инерцијална сила је истог интензитета а супротног смера од смера убрзања којим се креће суд,  $\vec{a}_{in} = -\vec{a}$ . Укупна запреминска сила која делује на флуид је:

$$\vec{f} = \vec{g} + \vec{a}_{in} = \vec{g} - \vec{a} \quad (3.9)$$

Из диференцијалног облика Ојлерове једначине,  $\rho \vec{f} = \text{grad} p$ , закључује да су вектори нормала изобарских површи и вектор  $\vec{f}$  колинеарни, тј. вектор  $\vec{f}$  је управан на изобарске површи које су нагнуте под углом  $\alpha$  у односу на хоризонталу. Угао  $\alpha$  је пропорционалан интензитету убрзања  $a$ .

Користећи једначину (3.6), и имајући у виду да су пројекције векторског поља запреминских сила на осе усвојеног координатног система

$$f_x = a, \quad f_y = 0 \quad f_z = -g,$$



Слика 3.5. Релативно мировање флуида при транслагацији.

поље притиска је одређено изразом:

$$dp = \int \rho (a dx - g dz) \implies p = \rho (ax - gz) + C$$

Константа  $C$  се одређује из граничних услова, који је за конкретан пример и усвојени координатни систем:

$$x = 0, z = 0 : p = p_a \implies C = p_a$$

Коначно, поље притиска је одређено изразом:

$$p - p_a = \rho (ax - gz)$$

Може се закључити да су изобарске површи међусобно паралелне праве

$$p = C, \quad C = const. \implies z = \frac{a}{g} x + C$$

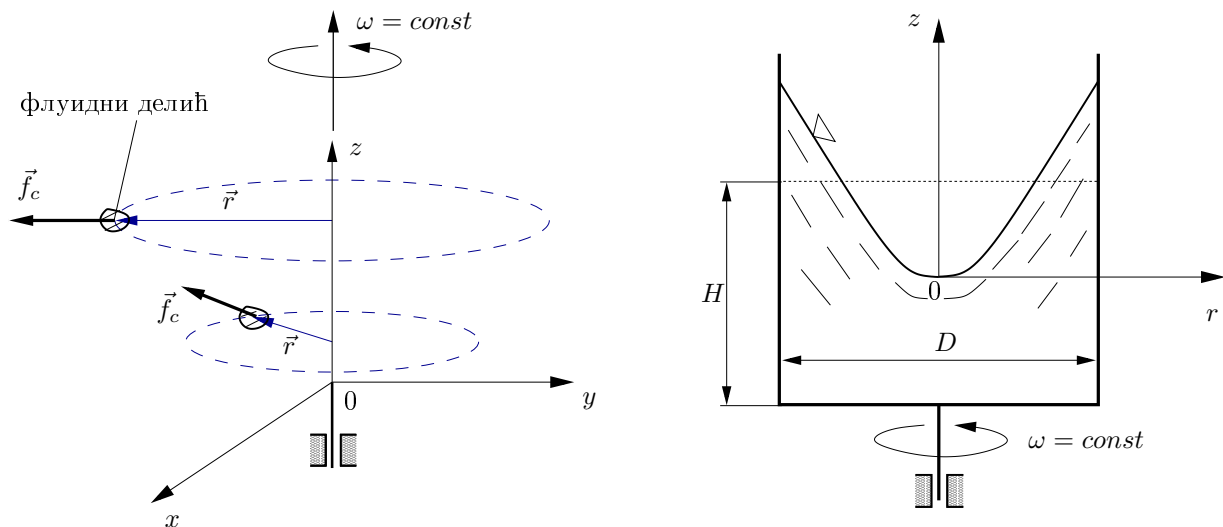
које заклапају угао  $\alpha = \arctg \frac{a}{g}$  са позитивним смером *ose*. Једначину слободне површи одређујемо из поља притиска и услова да је на слободној површи  $p = p_a$  - вредност константе  $C$  је у том случају једнака нули, тако да је једначина слободне површи одређена изразом

$$z = \frac{a}{g} x.$$

### Мировање флуида у пољу центрифугалне силе

Посматра се један цилиндрични суд, пречника  $D$  који је напуњен течношћу густине  $\rho$  до висине  $H$ . Нека се суд почне обртати константном угаоном брзином  $\omega$  око вертикалне осе, и нека се та оса поклапа са осом суда. Услед дејства вискозности делићи течности који се налазе на зиду суда ће се обртати заједно са судом; ти делићи ће у том кретању са собом повлачити и остале делиће, а ови себи суседне на мањем радијусу, све до осе цеви. После извесног времена сва течност у суду ће се обртати заједно са њим - можемо сматрати да се

течност обрће као круто тело. У координатном систему везаном за суд, течност мирује, па ће за њу важити Ојлерова једначина статике флуида.



**Слика 3.6.** Релативно мировање при ротацији. Координатни систем  $0xy$  такође ротира угаоном брзином  $\omega$  око осе  $z$ .

Пошто течност ротира константном угаоном брзином, на сваки флуидни делић који се налази на растојању  $r$  од осе ротације, делује центрифугална сила (по јединици масе) усмерена ка осе ротације:

$$\vec{f}_c = f_x \vec{i} + f_y \vec{j} = \omega^2 \vec{r} = \omega^2 (x \vec{i} + y \vec{j}) \quad (3.10)$$

па су пројекције запреминске силе која делује на флуид, за усвојени координатни систем ( $z$  оса се мора поклапати са осом ротације, због начина дефинисања центрифугалне силе;  $r$  оса се може усвојити било где на осе ротације).

$$f_x = \omega^2 x; \quad f_y = \omega^2 y; \quad f_z = -g \quad (3.11)$$

Заменом једначине (3.11) у једначину (3.6), и њеним интеграљењем добија се:

$$p = \frac{1}{2} \rho \omega^2 \underbrace{(x^2 + y^2)}_{r^2} - \rho g z + C = \frac{1}{2} \rho \omega^2 r^2 - \rho g z + C \quad (3.12)$$

Координата  $r$  се мери од осе суда, и она је увек позитивна (то је радијус мерен од осе ротације)! Константа  $C$  се одређује из граничних услова. За усвојени координатни систем, тај гранични услов је:

$$x = 0, z = 0 : p = p_a \implies C = p_a$$

па је коначно поље притиска одређено изразом:

$$p - p_a = \frac{1}{2} \rho \omega^2 r^2 - \rho g z \quad (3.13)$$

Дакле, поље притиска је нелинеарно по координати  $r$ , а линеарно по координати  $z$ . Изо-

барске површи су обртни параболоиди

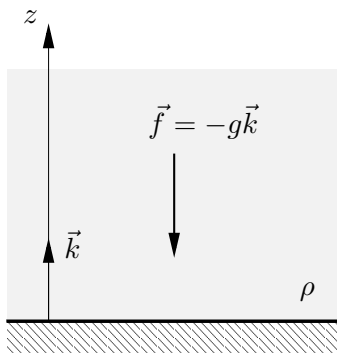
$$z = \frac{\omega^2}{2g} r^2 + C, \quad C = \text{const} \quad (3.14)$$

а једначина слободне површи ( $p = p_a$ ) слободне површи је одређена изразом

$$z = \frac{\omega^2}{2g} r^2 \quad (3.15)$$

### 3.3.2 Мировање стишљивог флуида у пољу силе Земљине теже

Посматра се мировање стишљивог флуида у пољу силе Земљине теже (ваздух у Земљиној атмосфери).



Ојлерова једначина:  $dp = -\rho g dz$

Једначина стања:  $p = \rho RT$

Из претходне две једначине њховим међусобним дељењем долази се до диференцијалне једначине

$$\frac{dp}{p} = -\frac{g dz}{RT(z)}$$

чије се решење, за гранични услов  $z = z_0 \rightarrow p = p_0$ , одређује из израза

$$p = p_0 \exp \left( -\int_{z_0}^z \frac{g dz}{RT(z)} \right).$$

Три карактеристична случаја зависности  $T = T(z)$ :

1.  $T = T_0 = \text{const}$

$$p = p_0 \exp \left[ -\frac{g}{RT_0} (z - z_0) \right] \quad (3.16)$$

2.  $T(z) = T_0 - \gamma z$

$$p = p_0 \left( 1 - \frac{\gamma z}{T_0} \right)^{\frac{g}{\gamma R}} \quad (3.17)$$

3.  $p/\rho^\kappa = p_0/\rho_0^\kappa$

$$z - z_0 = \frac{\kappa}{\kappa - 1} \frac{p}{g\rho_0} \left[ 1 - \left( \frac{p}{p_0} \right)^{\frac{\kappa - 1}{\kappa}} \right] \quad (3.18)$$

### Појам стандардне атмосфере

Земљина атмосфера је слојевита, и дефинишу се четири њена слоја: тропосфера, стратосфера, мезосфера и јоносфера. У тропосфери, која је дебљине око 11 km је температура

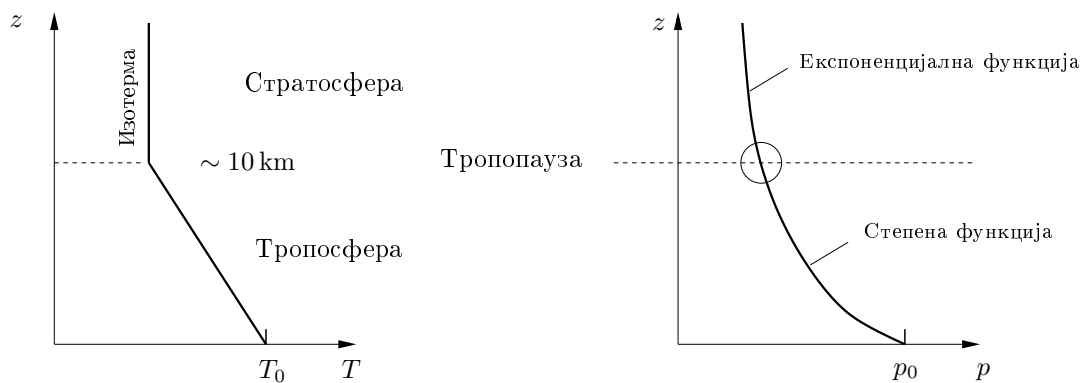
линеарно опада са висином, тј.

$$T(z) = T_0 - \gamma z, \quad T_0 = 288 \text{ K}, \quad \gamma = 6,5 \text{ K/km}$$

па је расподела притиска у тропосфери дефинисана изразом (3.17), док се до зависности густине од висине долази применом једначине стања  $p = \rho RT$

$$\rho = \rho_0 \left(1 - \frac{\gamma z}{T_0}\right)^{\frac{g}{\gamma R} - 1} \quad (3.19)$$

У стратосфери температура ваздуха је приближно константна, и она приближно износи  $t = -56,5^\circ \text{ C}$  па ке расподела притиска у стратосфери дефинисана изразом (3.16).



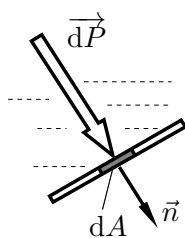
Слика 3.7. Расподела температуре и притиска у атмосфери.

Обе функције притиска, степена у тропосфери и експоненцијална у стратосфери су у тропопаузи непрекидне, тј. прелазе једна у другу у тропопаузи непрекидно и непрекидно диференцијабилно (непрекидне вредности и непрекидни први извод у спајању обе функције, тј. нема скока (прекида) ни прве ни друге врсте при преласку експоненцијалне функције притиска у степену и обратно.

### 3.4 Дејство силе притиска на равне и криве површи

#### (а) Равне површи

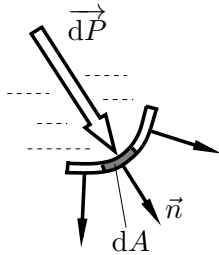
Поље елементарних површинских сила, тј. елементарних сила притиска  $d\vec{P}$  представља поље међусобно паралелних вектора, тако да се векторско сабирање замењује скаларним:



$$d\vec{P} = p \vec{n} dA \quad \rightarrow \quad \vec{P} = \iint_A p \vec{n} dA = \vec{n} \iint_A p dA. \quad (3.20)$$

$$dP = p dA \quad \rightarrow \quad P = \iint_A p dA. \quad (3.21)$$

(б) Криве површи



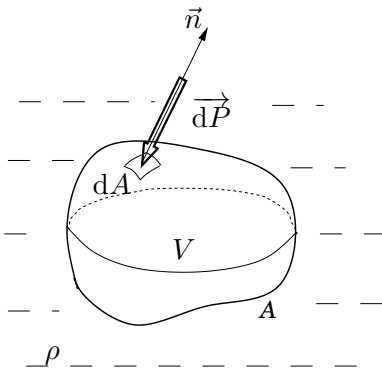
У овом случају векторско поље јединичних вектора нормала површи  $\vec{n}$  није хомогено, тј.  $n \neq const!$  Сходно томе, важе следеће релације

$$\begin{aligned} d\vec{P} &= p \vec{n} dA \quad \rightarrow \quad \vec{P} = \iint_A p \vec{n} dA \\ \vec{P} &= \iint_A p (n_x \vec{i} + n_y \vec{j} + n_z \vec{k}) dA, \end{aligned} \quad (3.22)$$

или записано у индексној нотацији

$$dP_j = p n_j dA = p dA_j \quad \Rightarrow \quad P = \iint_A p n_j dA, \quad j = x, y, z. \quad (3.23)$$

(в) Резултујућа површинска сила на потпуно оквашену затворену површ  $A$  - Архимедова сила (сила потиска)



$$d\vec{P} = -p \vec{n} dA \quad \rightarrow \quad \vec{P} = - \oiint_A p \vec{n} dA \quad (3.24)$$

Површ  $A$  је затворена па се може применити теорема Гаус-Остроградског, као и Ојлерова једначина (3.5) након тога, па следи израз за Архимедову силу потиска

$$\vec{P}_A \stackrel{\Gamma-O}{=} - \iiint_V \nabla p dV \stackrel{Ojлер}{=} - \iiint_V \rho \vec{f} dV. \quad (3.25)$$

Потисак **није** никаква допунска сила у односу на силу притиска!

**Закључак:** Дакле, у статисти флуида, битно је одредити стање напона, тј. скаларно поље притиска  $p(\vec{r}) = p(x, y, z)$  из Ојлерове једначине  $\text{grad} p = \rho \vec{f}$ , тј.  $dp = \rho F_i dx_i$  (сумирање по  $i = 1, 2, 3$ )! Уврштавањем скаларне функције притиска  $p$  у изразе (3.20) - (3.24) и израчунавањем назначених интеграла добијају се силе притиска на равне и криве површи!

3.4.1 Одређивање силе притиска на равну површ

Посматра се један резервоар са косим бочним зидом у коме се налази течност густине  $\rho$  (слика 3.8). На бочном зиду се налази правоугаони отвор, који је затворен неким затварачем. Коликом силом течност делује на тај затварач (он је причвршћен рецимо завртањским везама за зид суда - да би смо одредили силе оптерећења у везама, морамо срачунати силу притиска)? Како је усмерена та сила? Где се налази нападна тачка те силе? Одговори на ова питања следе иза ових редова.

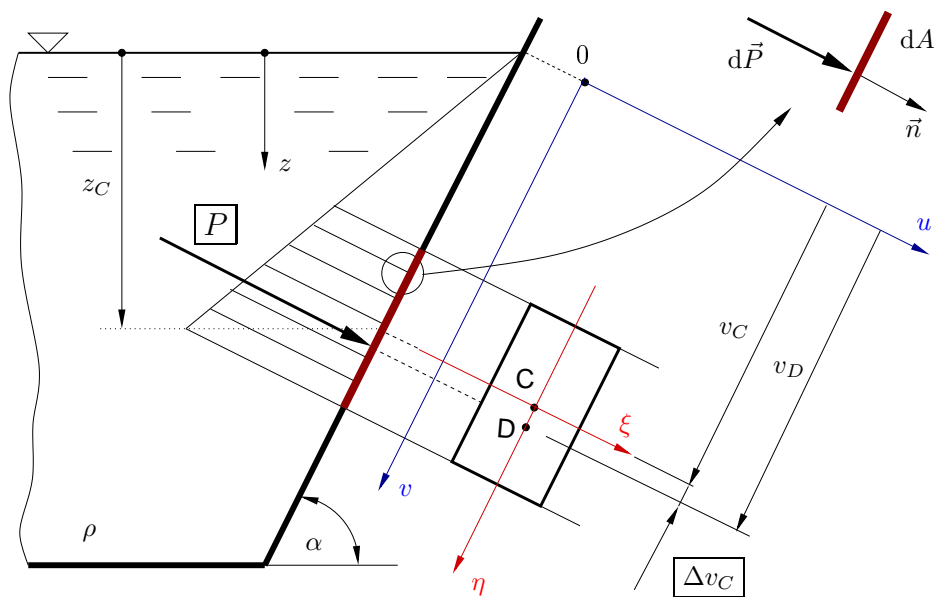
- Сила притиска на неку равну површ делује увек у правцу који је нормалан на ту површ.

- Силу притиска усмеравамо од течности ка површи која је оквашена том течношћу.
- Силу притиска рачунамо помоћу израза (3.20), и имајући у виду расподелу притиска у течности која је одређена изразом (3.8):

$$\begin{aligned}
 P &= \iint_A p \, dA = \iint_A (p_a + \rho g z) \, dA - \iint_A p_a \, dA = \left( p_a A + \rho g \iint_A z \, dA \right) - p_a A \\
 &= \underbrace{(p_a + \rho g z_C)}_{p_c} A - p_a A = (p_c - p_a) A \equiv \rho g z_C A
 \end{aligned}
 \tag{3.26}$$

где су

- $z_C$  -  $z$  координата тежишта површи мерена од слободне површи течности
- $p_c$  - апсолутни притисак у тежишту површи
- $p_a$  - атмосферски притисак околног ваздуха
- $A$  - површина површи на коју се тражи сила притиска



Слика 3.8. Сила притиска на равни површи

Дакле, решавањем интеграла изразу (3.20) добија се једноставан, алгебарски израз за одређивање интензитета силе притиска:

$$\boxed{P = (p_c - p_a) A.}
 \tag{3.27}$$

Када површ заклапа неки угао  $\alpha$  са хоризонталом ( $180^\circ < \alpha < 0^\circ$ ), расподела притиска на површи је неравномерна (притисак линеарно расте са повећањем координате  $z$ ), те стога сила притиска делује у тачки D која се назива *центар притиска*. Положај те тачке се одређује применом Варињонове теореме: момент резултујуће силе за произвољну осу једнак је суми момената њених компонената у односу на ту исту осу, и узимајући као меродавну

осу осу  $u$  следи да је

$$P v_D = \iint_A v dP \Rightarrow \rho g z_C A v_D = \rho g \int_A z v dA,$$

односно, имајући у виду везу координата  $z = v \sin \alpha$

$$v_D = \frac{1}{v_C A} \iint_A v^2 dA = \frac{I_u}{v_C A},$$

где је  $I_u$  момент инерције површи  $A$  у односу на осу  $u$ . Ако се сада примени Штајнерова теорема, односно да је  $I_u = I_{C\xi} + v_C^2 A$ , добија се релативни положај центра притиска у односу на тежиште:

$$v_D = \frac{1}{v_C A} (v_C^2 A + I_{C\xi}) = v_C + \Delta v_C \Rightarrow \Delta v_C \equiv v_D - v_C = \frac{I_{C\xi}}{v_C A}.$$

Ако се у последњи израз  $v_C$  изрази као  $v_C = z_C / \sin \alpha$ , а потом  $z_C A$  као  $P / \rho g$  добија се

$$\Delta v_C = \frac{I_{C\xi} \sin \alpha}{z_C A} = \frac{\rho g I_{C\xi} \sin \alpha}{P}$$

Дакле, релативни положај центра притиска у односу на тежиште површи се одређује на основу израза

$$\boxed{\Delta v_C = \frac{I_{C\xi}}{v_C A} \equiv \frac{\rho g I_{C\xi} \sin \alpha}{P}} \quad (3.28)$$

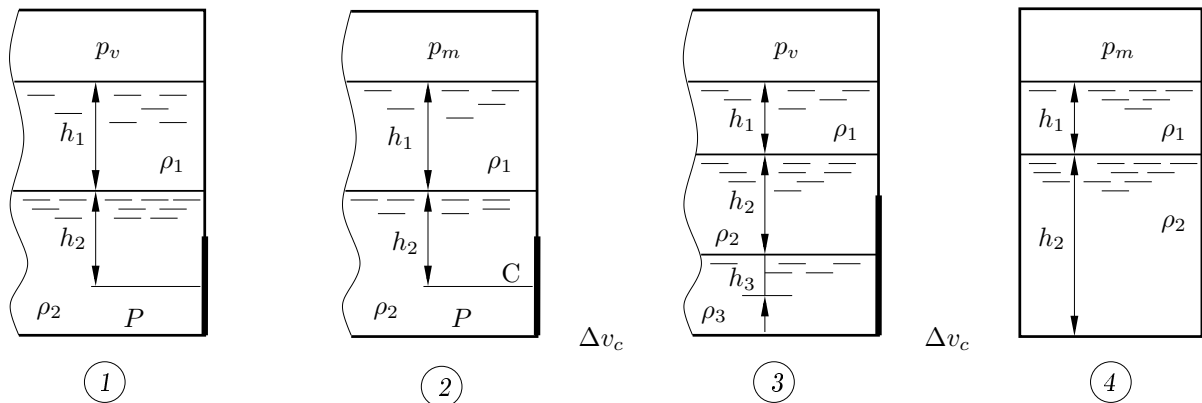
где су  $I_{C\xi}$  тежишни момент инерције за осу  $\xi$ , а  $P$  резултујућа сила притиска одређена изразом (3.27).

Ако површ није симетрична, онда постоји и померање нападне тачке по координати  $u$ . То растојање је одређено изразом  $\Delta u_c = \frac{I_{\xi\eta}}{u_c A}$ . У већини задатака површи ће бити симетричне.

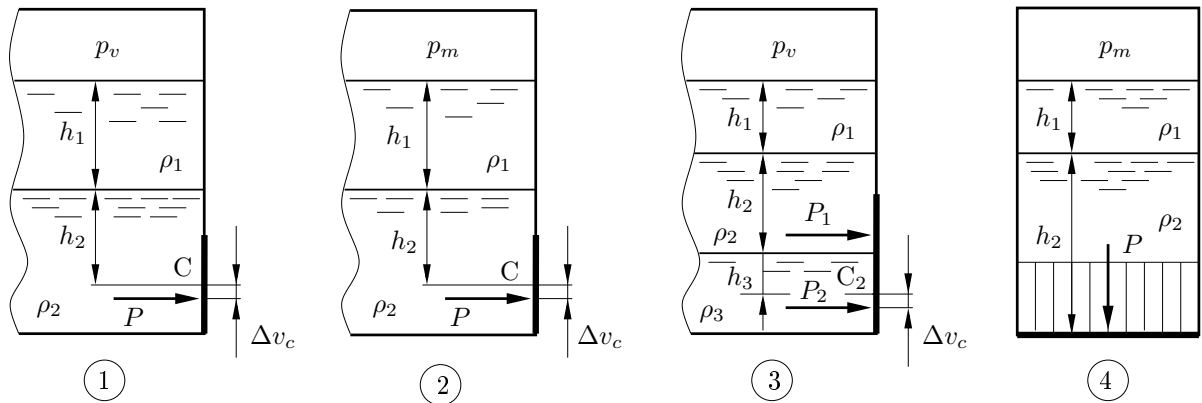
У случају **хоризонталних површи** притисак у свим тачкама површи има исту вредност, па сила притиска **делује у тежишту површи!**



**ПРИМЕР 3.1:** Одредити силе притиска на равне површи приказане на слици.



На основу претходних разматрања, на слици 3.9 су уцртане силе притиска.



**Слика 3.9.** Карактеристични случајеви одређивања силе притиска на равну површ

① Апсолутни притисак у тежишту:

$$p_c = p_a - p_v + \rho_1 g h_1 + \rho_2 g h_2$$

Сила притиска:

$$P = (p_c - p_a)A = (-p_v + \rho_1 g h_1 + \rho_2 g h_2)A$$

Координата тежишта:

$$z_c = \frac{p_c - p_a}{\rho_2 g} = -\frac{p_v}{\rho_2 g} + \frac{\rho_1}{\rho_2} h_1 + h_2$$

Нападна тачка силе  $P$  - центар притиска (у свим случајевима је  $\alpha = 90^\circ$ )

$$\Delta v_c \equiv \Delta z_c = \frac{I_{c\xi}}{z_c A}$$

Ако је вредност потпритиска  $p_v$  већа од збира  $\rho_1 g h_1 + \rho_2 g h_2$  (у тежишту површи влада апсолутни притисак мањи од атмосферског, тј. потпритисак), добиће се негативна вредност за силу  $P$ , што значи да је претпостављени смер силе погрешан - у том случају не треба мењати смер силе, али тај знак минус треба узимати у обзир када се замењује бројна вредност за њу у неку од једначине равнотежа или неку моментну једначину за

**неку од оса.** Такође, у овом случају ће се добити и негативна вредност за  $\Delta v_c$  - физички, то значи да је тачка D изнад тежишта, али не треба померати силу у ту нападну тачку - довољно је при срачунавању узети у обзир негативну вредност за  $\Delta v_c$  (ако се пишу моментне једначине). Дакле, **увек сматрамо да сила притиска делује од течности ка површи коју је оквашена том течношћу, и да је центар притиска увек испод тежишта.**

② Апсолутни притисак у тежишту:

$$p_c = p_a + p_m + \rho_1 g h_1 + \rho_2 g h_2$$

Сила притиска:

$$P = (p_c - p_a)A = (p_m + \rho_1 g h_1 + \rho_2 g h_2)A$$

Координата тежишта:

$$z_c = \frac{p_c - p_a}{\rho_2 g} = \frac{p_m}{\rho_2 g} + \frac{\rho_1}{\rho_2} h_1 + h_2$$

Нападна тачка силе  $P$  - центар притиска ( $\alpha = 90^\circ$ )

$$\Delta v_c \equiv \Delta z_c = \frac{I_{c\xi}}{z_c A}$$

У овом случају нема недоумица - у тежишту влада натпритисак, претпостављени смер је исправан, и физички нападна тачка силе је испод тежишта.

③ Ако имамо случај да једну површ квасе више течности, имаћемо онолико сила колико има течности које су у контакту са површи. Овде се дају изрази само за силу  $P_2$ . Израз за силу  $P_1$  је порпуно аналоган као у првом случају.

Апсолутни притисак у тежишту:

$$p_c = p_a - p_v + \rho_1 g h_1 + \rho_2 g h_2 + \rho_3 g h_3$$

Сила притиска:

$$P = (p_c - p_a)A = (-p_v + \rho_1 g h_1 + \rho_2 g h_2 + \rho_3 g h_3)A_2$$

Координата тежишта:

$$z_c = \frac{p_c - p_a}{\rho_2 g} = -\frac{p_v}{\rho_2 g} + \frac{\rho_1}{\rho_2} h_1 + \frac{\rho_2}{\rho_2} h_2 + h_3$$

Нападна тачка силе  $P$  - центар притиска ( $\alpha = 90^\circ$ )

$$\Delta v_c \equiv \Delta z_c = \frac{I_{c\xi}}{z_c A}$$

Овде важи иста прича као под 1.

④ Апсолутни притисак у тежишту:

$$p_c = p_a + p_m + \rho_1 g h_1 + \rho_2 g h_2$$

Сила притиска:

$$P = (p_c - p_a)A = (p_m + \rho_1 g h_1 + \rho_2 g h_2)A_2$$

Координата тежишта:

$$z_c = \frac{p_c - p_a}{\rho_2 g} = \frac{p_m}{\rho_2 g} + \frac{\rho_1}{\rho_2} h_1 + h_2$$

Центар притиска је у тежишту!

■

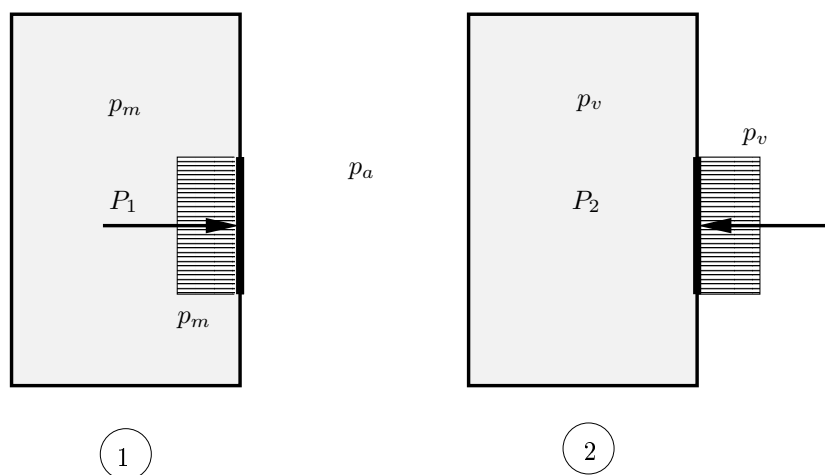
### Случај када је гас у ком влада натпритисак или потпритисак у контакту са равном површи

При одређивању силе којом гас делује на неку површ, претпостављамо да је поље притиска у гасу **хомогено**, тј. у свакој тачки у гасу притисак има исту вредност - на слици 3.10 у случају 1 свуда у суду је  $p_m$ , тј. у случају 2 је свуда  $p_v$ . Пошто у свакој тачки равне притисак има исту вредност, сила притиска делује у тежишту површи.

За одређивање силе користи се потпуно исти образац као и у случају течности, једначина (3.27). За случајеве на слици добија се:

$$P_1 = p_m A \quad \text{тј.} \quad P_2 = -p_v A$$

Видимо да ћемо у случају 2 добити негативну вредност за силу  $P_2$ . То значи да је стварни смер дејства силе супротан, тј. у околном ваздух влада већи притиском него у ваздуху у суду, па сила делује на затварач са спољне стране! Тај стварни смер силе  $P_2$  је уцртан на слици 3.10, док је њен интензитет  $P_2 = p_v A$ .

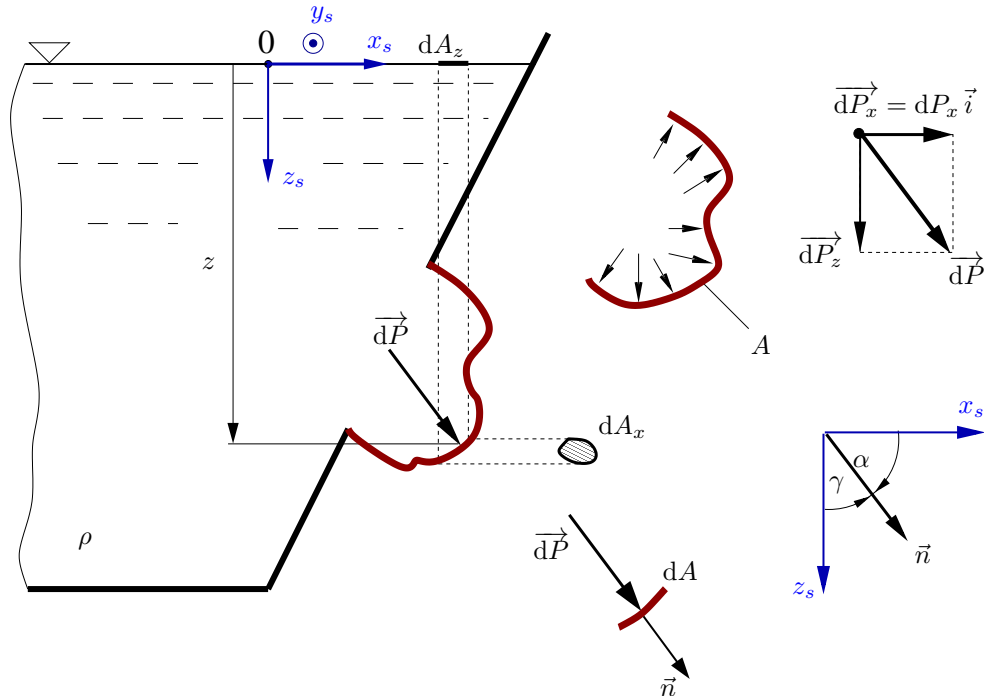


Слика 3.10. Сила притиска у случају дејства притиска који влада у гасу на равну површ

### 3.4.2 Одређивање силе притиска на криву површ

Посматра се једна криву површ која је у контакту са течношћу густине  $\rho$  (сл. 3.11). Нека је та површ симетрична у односу на раван  $x - z$ .

Елементарна сила притиска  $d\vec{P}$  је одређена изразом (3.22). За разлику од равних површи, код кривих површи вектори нормала елементарних површи  $dA$  нису истог правца, тако да ће и елементарне силе  $dP$  бити различитог правца.



Слика 3.11. Сила притиска на криву површ.

За произвољну елементарну површ  $dA$  површи  $A$  чији је положај одређен координатом  $z$ , вектор  $\vec{n}$  те површи се може написати као:

$$\vec{n} = \vec{i} \cos \angle(\vec{n}, \vec{i}) + \vec{k} \cos \angle(\vec{n}, \vec{k}) = \vec{i} \cos \alpha + \vec{k} \cos \gamma \quad (3.29)$$

где се углови  $\alpha$  и  $\gamma$  углови које вектор нормале  $\vec{n}$  гради са позитивним смером одговарајућих оса.

Елементарну силу  $d\vec{P}$  која делује на посматрану површ  $dA$  можемо изразити преко њене две пројекције (обе пројекције ове силе, на осе  $x$  и  $z$  су позитивне, а и косинуси углова  $\alpha$  и  $\gamma$  су  $\cos \alpha > 0$  и  $\cos \gamma > 0$ ):

$$d\vec{P} = d\vec{P}_x + d\vec{P}_z \equiv dP_x \vec{i} + dP_z \vec{k} = \rho g z (\vec{i} \cos \alpha + \vec{k} \cos \gamma) dA \quad (3.30)$$

Из последње једначине следи:

$$dP_x = \rho g z \underbrace{(dA \cos \alpha)}_{dA_x} \Rightarrow P_x = \rho g \int_{A_x} z dA_x \Rightarrow \boxed{P_x = \rho g z_{cx} A_x} \quad (3.31)$$

где су:  $A_x$  - пројекција површи  $A$  у правцу  $x$ -осе на раван  $y - z$

$z_{cx}$  - координата тежишта површи  $A_x$  мерена од слободне површи.

Из једначине (3.30) следи да је пројекција  $dP_z$  одређена изразом:

$$dP_z = \rho g z \underbrace{(dA \cos \gamma)}_{dA_z} \Rightarrow P_z = \rho g \int_A z dA_z \Rightarrow \boxed{P_z = \rho g V} \quad (3.32)$$

где је  $V$  запремина која се добија пројектовањем криве површи у вертикалном правцу до слободне површи. Нападна линија силе  $P_z$  пролази кроз тежиште запремине  $V$ .

Како се практично одређују компоненте  $P_x$  и  $P_z$  биће приказано на следећим примерима.

---

**ПРИМЕР 3.2:** Одредити силу притиска која делује на криву површ облика дела омотача сфере за пример за слике 3.12.

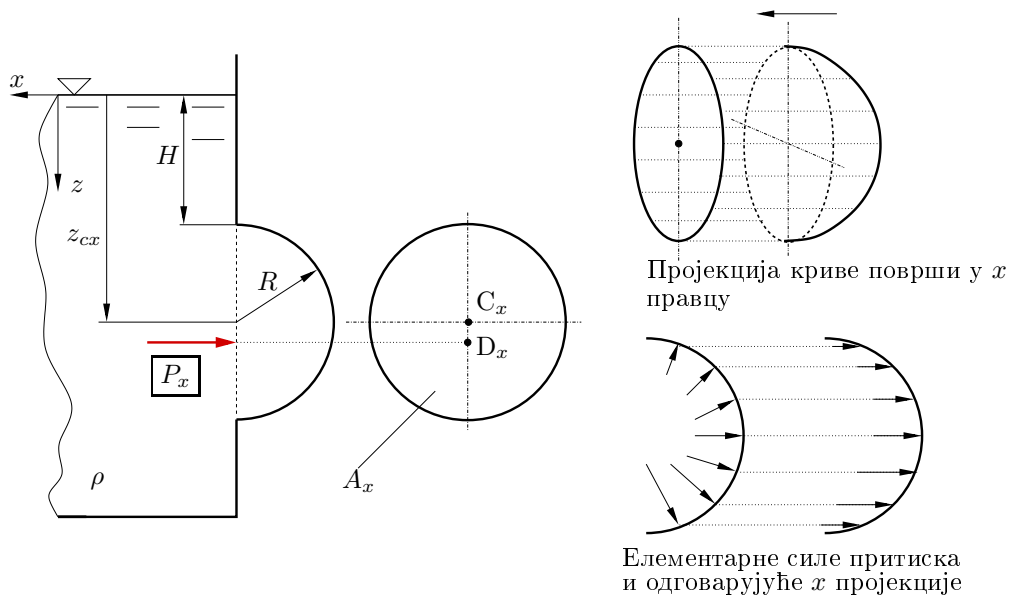
---

Прво се одређује хоризонтална компонента силе притиска. Површ  $A_x$  која се добија пројектовањем криве површи у  $x$ -правцу представља једну равну површ и сила притиска која делује на ту равну површ се може одредити помоћу израза (3.27) или израза (3.31), тј.

$$P_x = (p_{cx} - p_a)A_x \equiv \rho g z_{cx} A_x$$

За конкретан пример са слике та сила је одређена изразом:

$$P_x = \rho g (H + R)R^2\pi$$



Слика 3.12. Одређивање  $x$  пројекције силе притиска на криву површ облика омотача полусфере

При одређивању вертикалне компоненте, површ ћемо поделити на два дела, као што је приказано на слици 3.12. Евидентно је да ће на горњи део површи деловати сила која је усмерена вертикално навише, и то силу ћемо означити са  $P_{z1}$ . На доњи део површи делује сила која је усмерена вертикално наниже, и ту силу ћемо означити са  $P_{z2}$ . Резултујућа вертикална сила која делује на поклопац биће једнака разлици ове две силе и биће усмерена вертикално наниже, јер је као што ћемо видети, интензитет силе  $P_{z2}$  већи од интензитета силе  $P_{z1}$ .

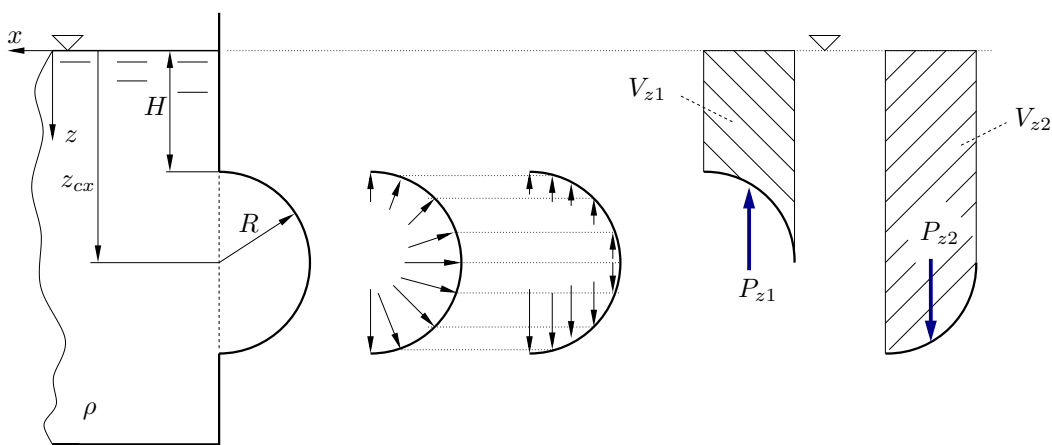
Интензитети сила  $P_{z1}$  и  $P_{z2}$  се одређују помоћу израза (3.32). Тако се за силу  $P_{z1}$  добија:

$$P_{z1} = \rho g V_{z1} = \rho g V_{z1} = \rho g \left[ \frac{1}{2} R^2 \pi (H + R) - \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{3} R^3 \pi \right] = \rho g R^2 \pi \left[ \frac{H}{2} + \frac{R}{6} \right]$$

Запремина  $V_{z1}$  је једнака разлици запремина четвртине цилиндра полупречика  $R$  и висине  $H + R$  и четвртине лопте полупречика  $R$ . Напоменимо још једном да је ова сила усмерена вертикално навише.

Интензитет силе  $P_{z2}$  је:

$$P_{z2} = \rho g V_{z2} = \rho g V_{z2} = \rho g \left[ \frac{1}{2} R^2 \pi (H + R) + \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{3} R^3 \pi \right] = \rho g R^2 \pi \left[ \frac{H}{2} + \frac{5R}{6} \right]$$

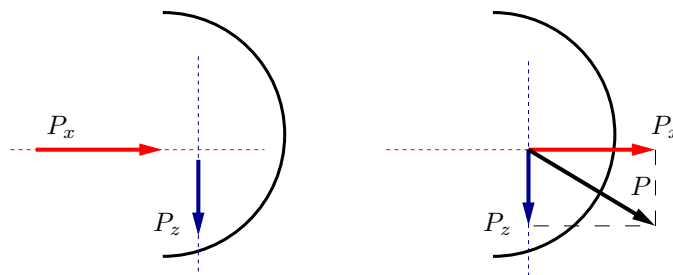


Слика 3.13. Одређивање вертикалне пројекције силе притиска на криву површ облика омотача полусфере

Као што можемо видети интензитет силе  $P_{z2}$  је већи од силе  $P_{z1}$ , па је резултујућа сила  $P_z$  усмерена вертикално наниже и њен интензитет је:

$$P_z = P_{z2} - P_{z1} = \rho g R^2 \pi \left[ \frac{H}{2} + \frac{5R}{6} \right] - \rho g R^2 \pi \left[ \frac{H}{2} + \frac{R}{6} \right] = \frac{2}{3} \rho g R^3 \pi$$

Дакле, укупну силу притиска смо разложили на две међусобно управне компоненте, које чине сучељни систем сила<sup>1</sup> - то је из разлога што што је крива површ симетрична у односу на вертикалну  $x - z$  раван која пролази кроз њено тежиште; **то ће бити случај у свим задацима који ће бити рађени у оквиру овог курса.**



Слика 3.14. Компонента резултујуће силе притиска чине сучељни систем сила.

<sup>1</sup>Систем сила чије се нападне линије секу у једној тачки се назива сучељни систем сила.

Та резултујућа сила притиска је једнака:

$$P = \sqrt{P_x^2 + P_z^2} = \sqrt{[\rho g (H + R)R^2\pi]^2 + \left[\frac{2}{3}\rho g R^3\pi\right]^2} = \rho g R^2\pi \sqrt{(H + R)^2 + \frac{4R^2}{9}}$$

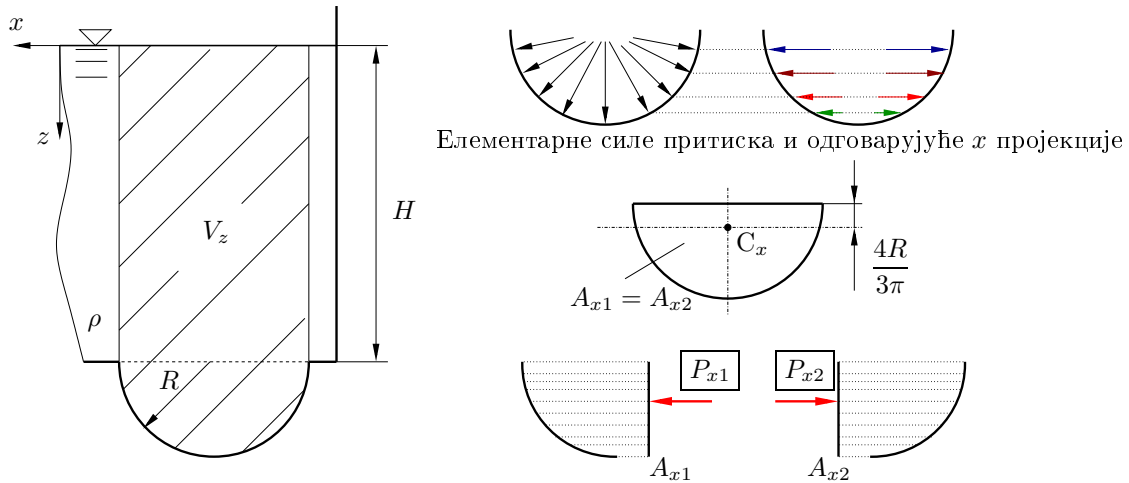
Смер вертикалне компоненте силе која делују на неку криву површ можемо одредити и на следећи, једноставан начин:

Ако се запремина која се добија пројектовањем криве површи до слободне површи течности која је са њом у контакту формира са неоквашене стране површи, онда је смер силе усмерен вертикално навише (сила  $P_{z1}$ ). Ако се та запремина формира са оквашене стране површи, смер вертикалне компоненте силе је усмерен вертикално наниже (сила  $P_{z2}$ ).

■

**ПРИМЕР 3.3:** Одредити силу притиска која делује на криву површ облика дела омотача сфере за пример за слике 3.15.

У овом примеру, приликом одређивања  $P_x$ , криву површ површ делимо на два дела и одређујемо одговарајуће пројекције  $P_{x1}$  и  $P_{x2}$  које делују на та два дела криве површи.



Слика 3.15. Одређивање  $x$  пројекције силе притиска на криву површ облика омотача полусфере

Силе  $P_{x1}$  и  $P_{x2}$  су истог интензитета и оне су, на основу (3.31) одређене изразом:

$$P_{x1} = P_{x2} = \rho g \left( H + \frac{4R}{3\pi} \right) \frac{R^2\pi}{2}$$

Како су ове силе супротних смерова резултујућа сила притиска у  $x$ -правцу ће бити једнака нули, тј:

$$P_x = P_{x1} - P_{x2} = 0$$

Могли смо до истог закључка да дођемо и једноставном анализом. Наиме, свакој елементарној површи  $dA_1$  се може придружити и одговарајућа симетрична елементарна површ  $dA'_1$  која се налази

на истој хоризонтали (истој изобарској површи!) на коју делује сила  $dP_x$  истог интензитета и правца, али супротног смера. Ако сумирамо (интегралимо) по целој површи  $A$ , добиће се да је резултујућа сила притиска у  $x$  правцу једнака нули.

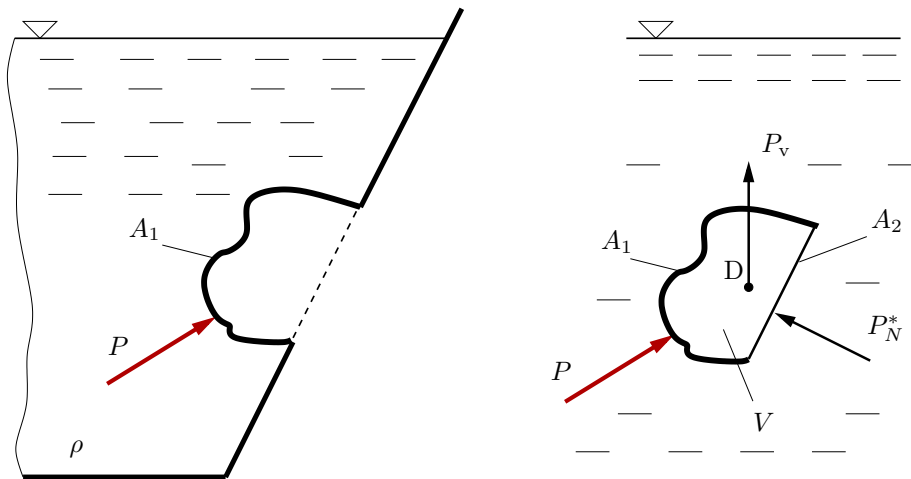
Компонента  $P_z$  је одређена изразом:

$$P_z = \rho g V_z = \rho g \left( R^2 \pi H + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} R^3 \pi \right) = \rho g R^2 \pi \left( H + \frac{2R}{3} \right)$$

Како је  $P_x = 0$ , резултујућа сила притиска  $P$  је  $P = P_z$ . ■

### 3.4.3 Метода потиска при одређивању силе притиска на криву површ

У неким случајевима, чињеница да је резултујућа сила притиска која делује на неко потопљено тело управо сила потиска нам може знатно олакшати одређивање силе притиска на неку криву површ.



Слика 3.16. Одређивање силе притиска на криву површ методом потиска

Посматра се крива површ са слике 3.16. Желимо да одредимо колика је сила притиска  $P$  на ту криву површ. У том циљу можемо применити и следећи поступак.

Ако замислимо да кривој површи додамо одређени број равних површи, добићемо једну запремину за коју можемо сматрати да представља једно тело које је потопљено у течности. Као што је добро познато резултујућа сила притиска која делује на тако добијено тело је сила потиска. Интеграл у изразу (3.24) се може поделити на интеграл по површи  $A_1$  и интеграл по површи  $A_2$ .

$$\vec{P}_v = - \iint_A p \vec{n} dA = - \underbrace{\iint_{A_1} p \vec{n} dA_1}_{\vec{P}} + \left( - \underbrace{\iint_{A_2} p \vec{n} dA_2}_{\vec{P}_N^*} \right) = \vec{P} + \vec{P}_N^*$$

Пошто желимо да одредимо силу  $P$ , и имајући и виду да је  $\vec{P}_N^* = -\vec{P}_N$ , добија се коначан



израз за одређивање силе притиска на криву површ методом потиска:

$$\vec{P} = \vec{P}_v - \vec{P}_N^* = \vec{P}_v + \vec{P}_N = -\rho g V + \vec{P}_N \quad (3.33)$$

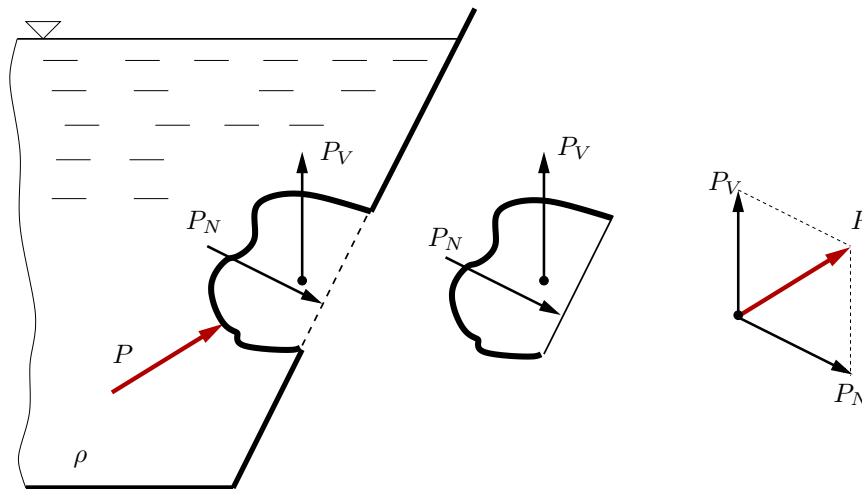
где је  $V$  запремина која се добија затварањем криве површи са одговарајућим бројем равних површи. За конкретан случај са слике, запремина  $V$  је формирана само увођењем једне равне површи.

Ако желимо да напишемо један општи израз, када се запремина  $V$  добија увођењем  $n$  равних површи, израз за силу притиска на криву површ је:

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^n \vec{P}_{Ni} + \vec{P}_v = \sum_{i=1}^n \vec{P}_{Ni} - \rho g V \quad (3.34)$$

Колико равних површи изабрати за решавање проблема је ствар личног избора. Генерално, постоји бесконачан број начина (избора равних површи) на који можете решити задати проблем.

Једначина (3.34) је векторска једначина и пројектовањем на два изабрана управна правца добијамо одговарајуће пројекције.



Слика 3.17. Одређивање силе притиска на криву површ методом потиска

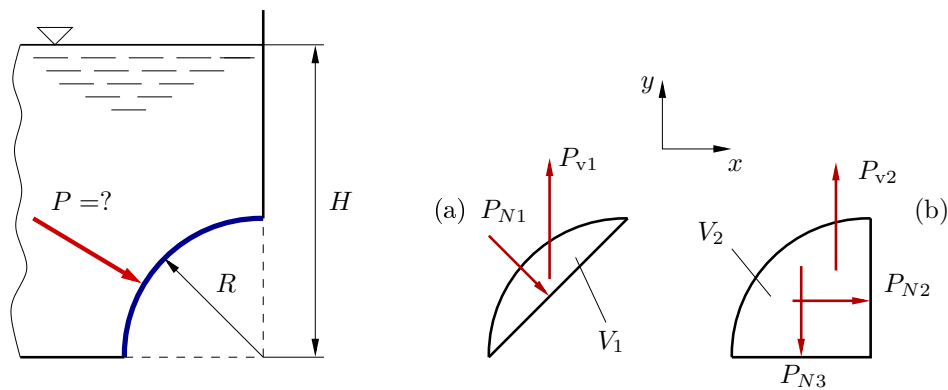
**ПРИМЕР 3.4:** Одредити интензитет силе притиска на криву површ са слике, облика четвртине омотача цилиндра полупречика  $R$  и дужине  $L$ . Величине  $\rho$  и  $H$  такође сматрати познатим.

Проблем ће бити решен на два начина, означена са (а) и (б) на слици 3.18.

У случају под силе (а)  $P_{N1}$  и  $P_{v1}$  су одређене изразима:

$$P_{N1} = (p_{c1} - p_a)A_1 = \rho g \left( H - \frac{R}{2} \right) R\sqrt{2} L$$

$$P_{v1} = \rho g V_1 = \rho g \left( \frac{R^2 \pi}{4} - \frac{1}{2} R^2 \right) L = \rho g R^2 \left( \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \right) L$$



Слика 3.18. Одређивање силе притиска на криву површ облика четвртине омотача цилиндра методом потиска

Пројекције силе  $P$  на осе координатног система  $x - y$  су одређене изразима:

$$P_x = P_{N1} \cos 45^\circ = P_{N1} \frac{\sqrt{2}}{2} = \rho g \left( H - \frac{R}{2} \right) RL$$

$$P_y = P_{N1} \sin 45^\circ - P_{v1} = \rho g \left( H - \frac{R}{2} \right) RL - \rho g R^2 \left( \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \right) L = \rho g \left( H - \frac{R}{4} \pi \right) RL$$

Интензитет силе  $P$  је:

$$P = \sqrt{P_x^2 + P_y^2} = \rho g RL \sqrt{\left( H - \frac{R}{2} \right)^2 + \left( H - \frac{R}{4} \pi \right)^2}$$

У случају под (b) интензитети одговарајућих сила су одређени изразом:

$$P_{N2} = \rho g \left( H - \frac{R}{2} \right) RL, \quad P_{N3} = \rho g H RL$$

$$P_{v2} = \rho g V_2 = \rho g \cdot \frac{1}{4} R^2 \pi L$$

Пројекције силе  $P$  су:

$$P_x = P_{N2} = \rho g \left( H - \frac{R}{2} \right) RL$$

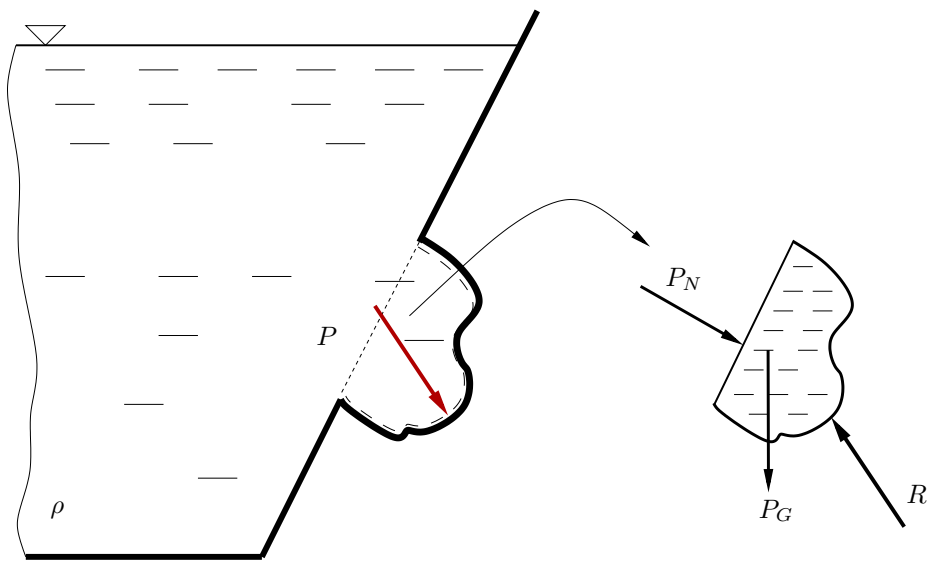
$$P_y = P_{N3} - P_{v2} = \rho g H RL - \rho g \cdot \frac{1}{4} R^2 \pi L = \rho g \left( H - \frac{R}{4} \pi \right) RL$$

Наравно, добијени су исти резултати. ■

### 3.4.4 Метода равнотеже течности

Треба одредити силу притиска на криву површ са слике 3.19. Приликом извођења Ојлерове једначине посматрана је *потпуно произвољна* запремина флуида и за њу примењен први Њутнов закон.

Ако се сада изабере запремина као на слици 3.19, тако да један део површи који је ограничава буде крива површ на коју тражимо силу притиска, а остали део једна или више



Слика 3.19. Одређивање силе притиска на криву површ методом равнотеже течности

равних површи. Дакле, течност која се налази унутар те запремине је у стању мировања, тј.

$$\sum_i \vec{F}_i = 0 \Rightarrow \underbrace{\vec{P}_N + \vec{R}}_{\text{Укупна површинска сила}} + \underbrace{\vec{P}_G}_{\text{Запреминска сила}} = \mathbf{0} \quad (3.35)$$

где су:  $\vec{P}_N$  - сила притиска на равну површ;  
 $\vec{P}_G = \rho \vec{g} V$  - тежина течности која се налази унутар запремине;  
 $\vec{R}$  - сила којом крива површ делује на течност унутар запремине.

Сила  $P_G$  делује у тежишту запремине  $V$ , док сила  $P_N$  делује испод тежишта равне површи (погледај причу везану за силе притиска на равне површи).

Како је по трећем Њутновом закону,  $\vec{P} = -\vec{R}$ , долазимо до израза за силу притиска:

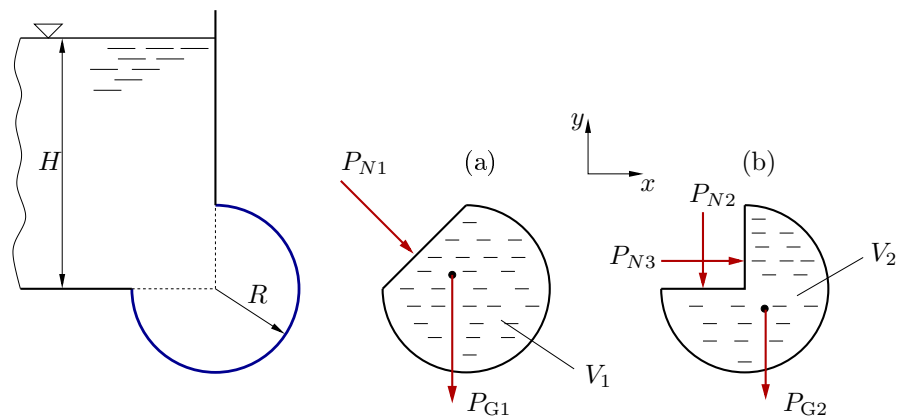
$$\vec{P} = \vec{P}_N + \vec{P}_G = \vec{P}_N + \rho \vec{g} V \quad (3.36)$$

У општем случају, када се запремина састоји од  $n$  равних површи и криве површи на коју тражимо силу притиска, израз са силу притиска је:

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^n \vec{P}_N + \vec{P}_G = \sum_{i=1}^n \vec{P}_N + \rho \vec{g} V \quad (3.37)$$

**ПРИМЕР 3.5:** Одредити интензитет силе притиска на криву површ са слике 3.20, облика 3/4 омотача цилиндра полупречника  $R$  и ширине  $L$ . Сматрати познатим величине  $H$ ,  $\rho$ ,  $R$  и  $L$ .

Као и претходни пример, и овај ће бити урађен на два начина, увођењем различитих равних површи у циљу добијања запремине  $V$ .



**Слика 3.20.** Одређивање силе притиска на криву површ методом равнотеже течности на криву површ облика 3/4 омотача цилиндра.

Тако је за случај под (а):

$$P_{N1} = \rho g \left( H - \frac{R}{2} \right) R\sqrt{2}L$$

$$P_{G1} = \rho g V_1 = \rho g \left( \frac{3}{4}R^2\pi + \frac{1}{2}R^2 \right) L = \rho g \left( \frac{3}{4}\pi + \frac{1}{2} \right) R^2L$$

Пројекције силе притиска на осе координатног система  $x - y$ :

$$P_x = P_{N1} \cos 45^\circ = \rho g \left( H - \frac{R}{2} \right) RL$$

$$P_y = P_{G1} + P_{N1} \sin 45^\circ = \rho g \left( \frac{3}{4}\pi + \frac{1}{2} \right) R^2L + \rho g \left( H - \frac{R}{2} \right) RL = \rho g \left( \frac{3R}{4}\pi + H \right) RL$$

Интензитет резултујуће силе притиска је:

$$P = \sqrt{P_x^2 + P_y^2} = \rho g RL \sqrt{\left( H - \frac{R}{2} \right)^2 + \left( \frac{3R}{4}\pi + H \right)^2}$$

За случај под (б) интензитети сила  $P_{N2}$ ,  $P_{N3}$  и  $P_{G2}$  су одређени изразима:

$$P_{N2} = \rho g \left( H - \frac{R}{2} \right) RL; \quad P_{N3} = \rho g HRL$$

$$P_{G2} = \rho g V_2 = \frac{3}{4}\rho g R^2\pi L$$

Одговарајуће пројекције силе  $P$ :

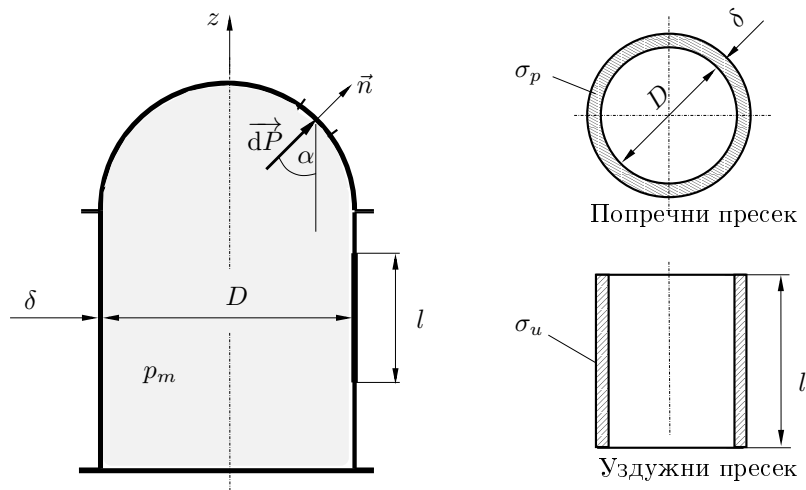
$$P_x = P_{N2} = \rho g \left( H - \frac{R}{2} \right) RL$$

$$P_y = P_{N3} + P_{G2} = \rho g \left( \frac{3R}{4}\pi + H \right) RL$$

■

### 3.4.5 Прорачун судова под притиском

Посматра се суд, са поклопцем облика сфере пречника  $D$  у коме се налази гас у коме влада натпритисак  $p_m$ . Треба одредити зависност напона који се јављају у материјалу у функцији притиска који влада у суду, и геометријских карактеристика суда - димензионасање суда под притиском.



Слика 3.21. Уздужни пресек суда изложеног дејству константног притиска  $p_m$

Резултујућа сила притиска на сферну површ је

$$P_z = \int_{A_z} p_m dA_z = p_m A_z = p_m \frac{D^2 \pi}{4} = 0,$$

и она је једнака сили истезања у попречном пресеку суда, тј.

$$p_m \frac{D^2 \pi}{4} = \sigma_p D \pi \delta \Rightarrow \sigma_p = \frac{p_m D}{4 \delta} < \sigma_{doz}.$$

Напон  $\sigma_p$  је напон истезања у попречном пресеку суда.

Цилиндрични део суда висине  $l$  у уздужном пресеку је изложен дејству силе притиска

$$P = p_m D l$$

и та сила је једнака сили истезања у зидовима цилиндричног дела суда, тј.

$$p_m D l = \sigma_u 2 \delta l \Rightarrow \boxed{\sigma_u = \frac{p_m D}{2 \delta} < \sigma_{doz}} \text{ - Мариотова формула}$$

Како је  $\sigma_u > \sigma_p$ , Мариотова формула се користи при димензионисању дебљине суда, тј

$$\delta \geq \frac{p_m D}{2 \sigma_{doz}}.$$

---

## 4 Динамика невискозног флуида

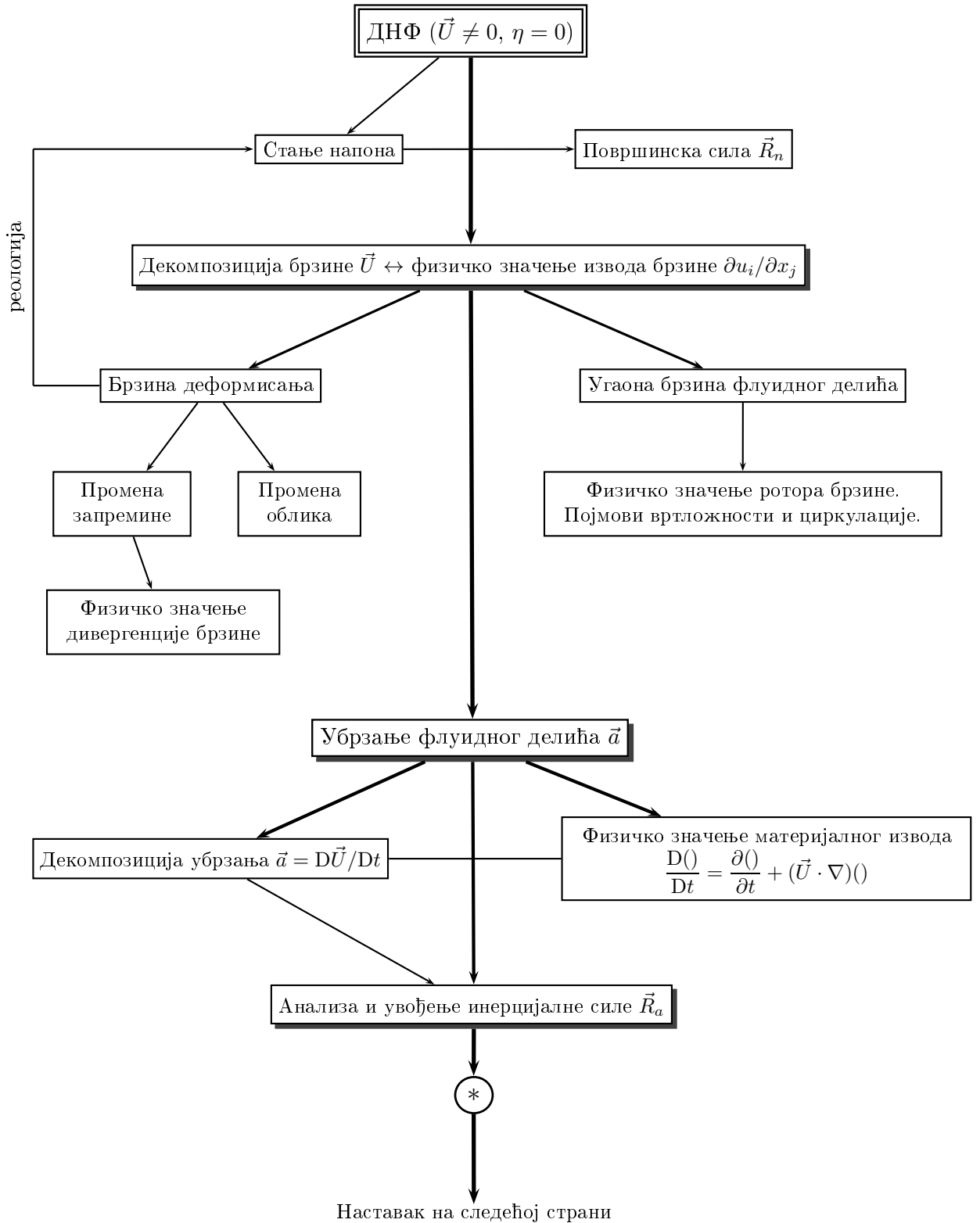
---

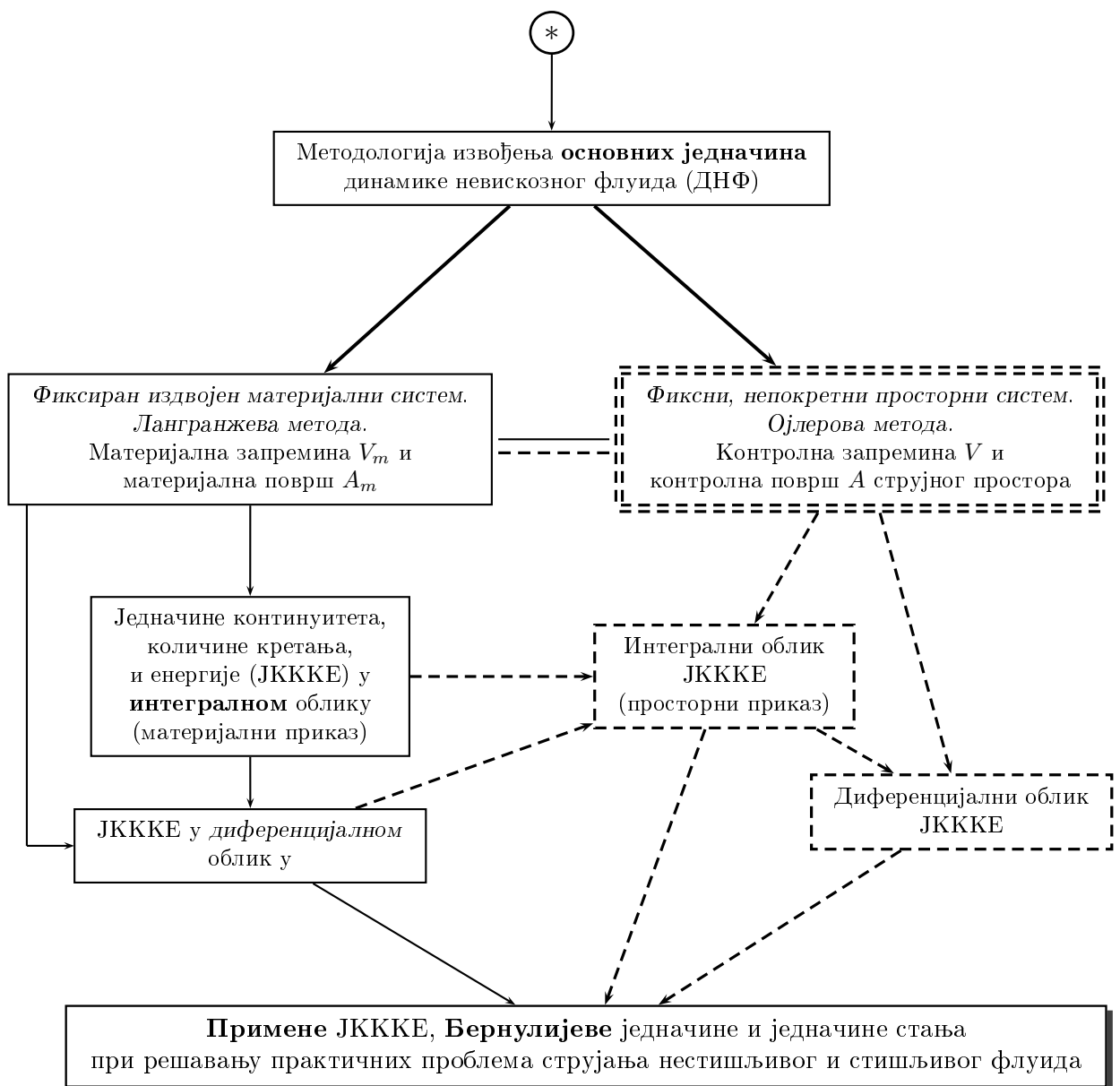
### 4.1 Дидактички концепт (аспект) динамике невискозног флуида (ДНФ)

1. Зашто је важно стање *напона*, тј. модел напона?
2. Који су основни закони и једначине ДНФ?
3. Зашто су битни декомпозиција (разлагање) брзинског поља  $\vec{U}(\vec{r}, t)$  и испитивање физичког значења извода брзине  $\partial u_i / \partial x_i$ ?
4. У каквој је вези *брзина деформисања* флуидног делића са тачком 3? У каквој су међусобној вези тачке 1 и 4?
5. У каквој су вези појмови дивергенције брзине ( $\text{div} \vec{U}$ ) и ротора брзине ( $\text{rot} \vec{U}$ ) са садржајем тачака 3 и 4?
6. У каквој је вези убрзање флуидног делића  $\vec{a}$  са тачком 3? Које је физичко значење *материјалног извода*?
7. Зашто је важна анализа и декомпозиција убрзања флуидног делића  $\vec{a}$ ? Који су најважнији изрази за убрзање  $\vec{a}$ ?
8. У каквој су међусобној вези други Њутнов закон, Даламберов принцип, закон о колицини кретања, теорема импулса, масене, површинске и инерцијалне силе са појмовима, физичко-математичким садржајима и физичким тумачењима величина у тачкама 1-7?
9. Које су основне релације које повезују Лагранжев и Ојлеров метод, као и концепте материјалних и контролних (просторних) запремина и површи?
10. Којим методама се изводе и математички формулишу основне једначине одржања масе, импулса и енергије како у материјалном и просторном приказу, тако и у интегралним и диференцијалним облицима?
11. Дати јасна *физичка тумачења* свих величина, израза, једначина и закона обухваћених тачкама 1-10.
12. Примерима и задацима суштински, физички и математички, показати примену материје обухваћене тачкама 1-10 при **решавању практичних инжењерских проблема**.

4.2 Алгоритам дидактичког концепта (аспекта) ДНФ ( $\vec{U} \neq 0, \eta = 0$ )

"The principle is most important, not the detail" — Theodore von Karman, 1954





Слика 4.1. Дидактичко-педагошка мапа за главу 4.

Дидактички концепт и приказан педагошко-методолошки алгоритам на слици 4.1 важе и за Динамику вискозног флуида (глава 5)! Очигледно је, међутим, да у том случају битне разлике настају у следећем:

- (а) ново стање напона (појава вискозних напона), в. поглавље 2.2.3
- (б) нова површинска сила  $\vec{R}_n$ , в. поглавље 2.2.4
- (в) одговарајуће реолошке зависности и конститутивне једначине.

Анализа свих осталих релација, закона, теорема и једначина је иста као и у глави 4, тј. у Динамици невискозног флуида! Из тих разлога је глава 4 са својим садржајем врло значајна.



## Инерцијална сила

Сагласно Њутновим законима и Даламберовом (J. D’Alambert, 1717-1783) принципу у динамици флуида су маса, инерција, кретање, брзина и убрзање флуидног делића повезани извесним релацијама са *површинским* и *масеним силама*. Наиме, из Њутнових закона произилази да је збир масених и површинских сила једнак производу масе флуида и његовог убрзања. Дакле, *сила инерције*, која карактерише природну тенденцију, тј. својство материје да се супротставља сваком дејству које доводи до промене њеног стања кретања, заједно са резултујућом масеном и површинском силом, одређује врсте, режиме и стабилност струјања флуида. Због тога се *убрзању флуидног делића, сили инерције и закону импулса* посвећује посебна пажња у овом курсу механике флуида!

## 4.3 Стање напона

У динамици невискозног флуида стање напона је, због непостојања смицајних напона, односно вискозних напона уопште, идентично стању напона у статисти флуида (в. поглавље 2.2.3). Дакле,  $p_{ij}^{\eta} = 0 \rightarrow \tau_{ij} = 0$ ,  $\sigma_{ii}^{\eta} = 0$ ,  $i, j = x, y, z$ ,  $T = 0 \rightarrow p_{ij} = -p\delta_{ij}$ , па су *површинске* силе одређене, тј. дефинисане скаларним пољем *притиска* (в. поглавље 2.2.4).

## 4.4 Методе описа струјног поља

Укупност *шест величина*  $\vec{U}(u, v, w)$ ,  $p$ ,  $\rho$ ,  $T$  у посматраном простору и временском домену одређују *струјно поље*. У том циљу су на располагању и *шест једначина* (в. табелу 1.1). За опис струјног поља, као и за извођење основних једначина механике флуида, на располагању су Лангранжева и Ојлерова метода (в. слику 4.1).

**Лангранжева** (Lagrange, 1736-1812) метода подразумева *праћење ученог флуидног делића* при његовом кретању у простору. На пример, брзина је дата функцијом (сл. 4.2)

$$\vec{U} = \vec{U}[x(t), y(t), z(t), t] = \vec{U}[\vec{r}(\vec{r}_0, t), t], \quad (4.1)$$

у којој  $\vec{r}[x_i(t)]$ ,  $i = 1, 2, 3$  означава *векторе положаја ученог делића током времена t!* Дакле, ако се флуидни делић налази у тачки M( $\vec{r}$ ) у тренутку  $t$ , а потом у тачки N( $\vec{r}_1$ ) у тренутку  $t_1$ , онда је *брзина флуидног делића* у тачки M вектор

$$\vec{U} = \lim_{t_1 \rightarrow t} \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}}{t_1 - t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}}{\Delta t} = \dot{\vec{r}}. \quad (4.2)$$

**Ојлерова** (Euler, 1707-1783) метода подразумева посматрање промене струјних величина у *фиксној просторној тачки*, док кроз њу пролазе поједини флуидни делићи. Ово одговара поступку мерења са мерним инструментом фиксираним на једном месту струјног простора. *Брзинско поље* је задато функцијом

$$\vec{U} = \vec{U}(x, y, z, t) = \vec{U}(\vec{r}, t), \quad (4.3)$$

у којој су координате  $x, y, z$  *фиксне просторне координате*, тј.  $\vec{r}(x, y, z)$  је вектор положаја

геометријске тачке у струјном пољу (сл. 4.3).

**Лагранжеве** координате  $(\vec{r}_0, t)$  – скуп четири **независно промењиве** величине  $(x_0, y_0, z_0, t)$  (4.4)

**Ојлерове** координате  $(\vec{r}, t)$  – скуп четири **независно промењиве** величине  $(x, y, z, t)$

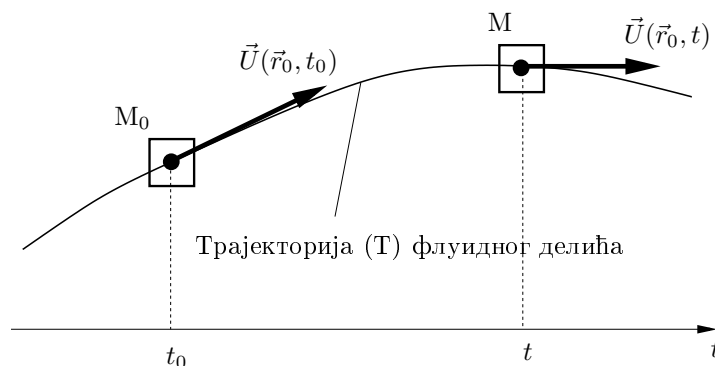
**Трајекторија** (Т), тј. путања извесног флуидног делића је низ узастопних положаја центра масе тог делића током његовог кретања. Диференцијалне једначине трајекторије делића у Декартовим координатама имају, сагласно изразима (4.1) и (4.2), облик

$$\boxed{\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{U}} \Rightarrow \frac{dx}{dt} = u(x, y, z, t), \quad \frac{dy}{dt} = v(x, y, z, t), \quad \frac{dz}{dt} = w(x, y, z, t). \quad (4.5)$$

Уколико је познато поље брзине *коначне једначине путање делића* се добијају интегралњем система диференцијалних једначина (4.5)

$$dx_k = u_k(x_i, t) dt, \quad i, k = 1, 2, 3 \quad (4.6)$$

уз *задате почетне услове!* При томе су  $x_{1,2,3} = x, y, z$  и  $u_{1,2,3} = u, v, w$ . На пример,  $x_2 = y$  и  $u_3 = w$ .



**Слика 4.2.** Лагранжев опис струјања флуида. Положаји делића (тачке  $M_0$  и  $M$ ) су функције његовог почетног положаја  $\vec{r}_0$  у тренутку  $t_0$  и времена  $t$ . Путања, тј. трајекторија Т флуидног делића задата је једначином  $\vec{r} = \vec{r}(\vec{r}_0, t)$ .

**Струјнице** (S) су векторске линије брзинског поља! Дакле, то су криве које у било ком фиксном, задатом тренутку за своје тангенте имају векторе брзина. Оне приказују *тренутну* слику брзинског поља (сл. 4.3). Диференцијалне једначине фамилије струјница, сагласно ознакама на сл. 4.3, гласе:

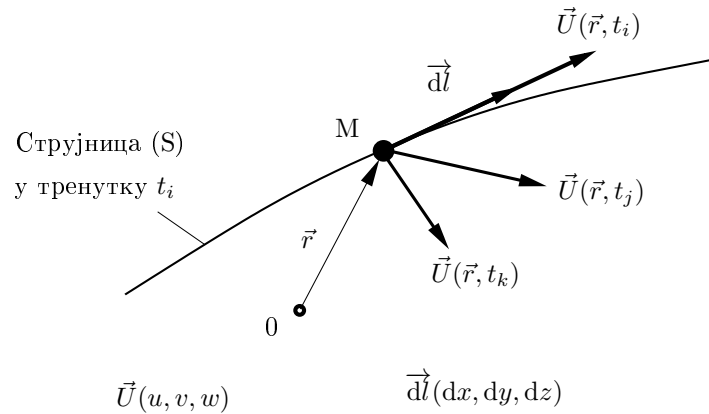
$$\boxed{\vec{U} \times d\vec{l} = 0} \Rightarrow \frac{dx}{u(x, y, z, t)} = \frac{dy}{v(x, y, z, t)} = \frac{dz}{w(x, y, z, t)}, \quad (4.7)$$

у којима се  $x, y, z$  *Ојлерове координате!* Интегралњем једначина (4.7) у којима је време  $t$

параметар, добијају се коначне једначине струјница

$$f_1(x, y, z, t) = C_1, \quad f_2(x, y, z, t) = C_2, \quad (4.8)$$

где су величине  $C_1$  и  $C_2$  интеграционе константе.



**Слика 4.3.** Ојлеров опис струјног поља. Ојлерове координате чине скуп од четири независно променљиве величине, од којих три представљају просторне координате, а четврта време! Овим је дефинисан четвородимензионални простор, тј. просторно-временска тачка скаларног, векторског или тензорског поља, које је у општем случају *нестационарно* и *нехомогено*. Тачка М је произвољна фиксирана тачка у простору, а  $\vec{U}(\vec{r}, t_l)$ ,  $l = 1, 2, \dots, i, \dots, j, \dots, k, \dots$  су вектори брзина флуидних делића који се у њој налазе у тренутцима  $\dots, t_i, \dots, t_j, \dots, t_k, \dots$ . Крива линија (S) представља струјницу у тачки М у тренутку  $t_i$ , а  $\vec{dl}$  је усмерени елемент те струјнице.

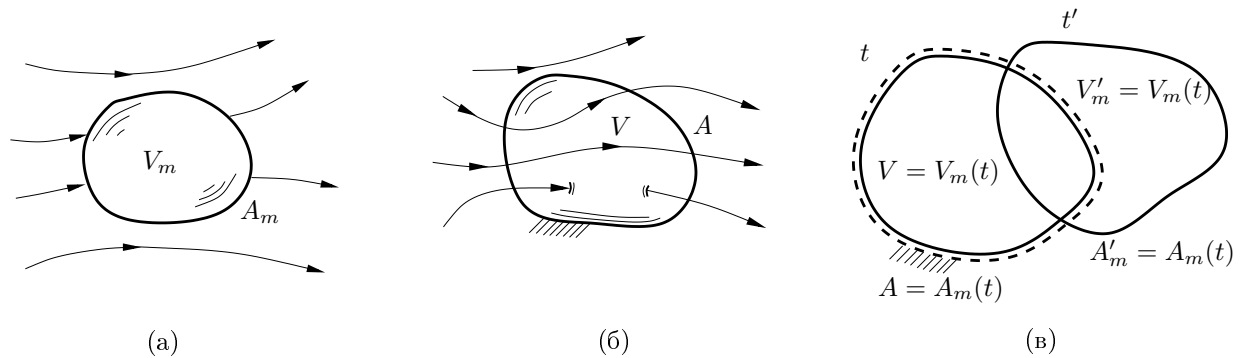
**Изворница**, тј. **емисиона линија** је линија коју у неком тренутку времена формирају (сачињавају) сви флуидни делићи који су прошли кроз исту изворску, емисиону тачку у струјном пољу.

Очигледно је, да се при *стационарном струјању*, када се у Ојлеровом смислу брзина у просторној тачки *не мења током времена* (на пример,  $\vec{U}(M_1, t) = \vec{U}(M_1, t')$ ), *трајекторије*, *струјнице* и *изворнице* (које се у овом курсу не разматрају детаљније) међусобно *поклапају*. У једначинама (4.7) и (4.8) тада не постоји зависност од времена. За случај *нестационарног струјања* ове фамилије кривих линија у општем случају се међусобно разликују!

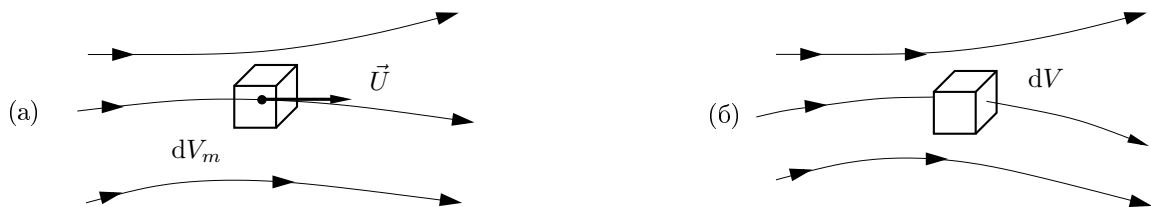
#### 4.4.1 Материјалне и контролне запремине и површи

- **Материјалне** линије  $l_m$ , површи  $A_m$  и запремине  $V_m$  састоје се током времена од *истих флуидних делића*. Дакле, када се говори о *материјалном систему* онда се, у смислу Лагранжа, подразумева издвојена количина флуида масе  $m$  у запремини  $V_m$  ограниченој са површи  $A_m$ , која се прати у току времена и тиме омогућује анализа и израчунавање промена физичких величина (количине кретања, енергије и слично) чији је носилац посматрана материја (сл. 4.4а)
- **Контролна запремина**  $V$  и површ  $A$  су *геометријски* појмови. Дакле, када се говори о фиксном, непокретном, *просторном систему* онда се, у смислу Ојлера, мисли на непокретну контролну површ  $A$  која обухвата контролну геометријску запремину  $V$ , тј. *известан домен струјног простора* (сл. 4.4б).

- **Контролна површ  $A$  за материјалну запремину  $V_m$**  представља непокретну, фиксну површ у простору која у датом тренутку  $t$  ограничава посматрану запремину флуида  $V_m$ , тј. поклапа се са материјалном површи  $A_m$  и обухвата контролну запремину  $V$ , тако да је  $V_m(t) = V$  (сл. 4.4в). У тренутку  $t'$  материјални систем  $(V'_m, A'_m)$  је делимично напустио геометријски фиксни контролни простор  $(V, A)$ .



**Слика 4.4.** Материјалне и контролне запремине и површи: (а) Материјална запремина произвољног дела флуида  $V_m$  и материјална површ  $A_m$  који се крећу заједно са флуидом тако, да се састоје стално од истих флуидних делића (Лагранж); (б) Контролна запремина  $V$  и контролна површ  $A$  фиксирани у простору кроз које протиче флуид (Ојлер); (в) Контролна површ  $A$  за материјалну запремину  $V_m$  и флукс, тј. проток материјалног система  $(V_m, A_m)$  кроз граничну, непокретну контролну површ  $A$  током временског интервала  $\Delta t = t' - t$ . Струјно поље је приказано струјницама.

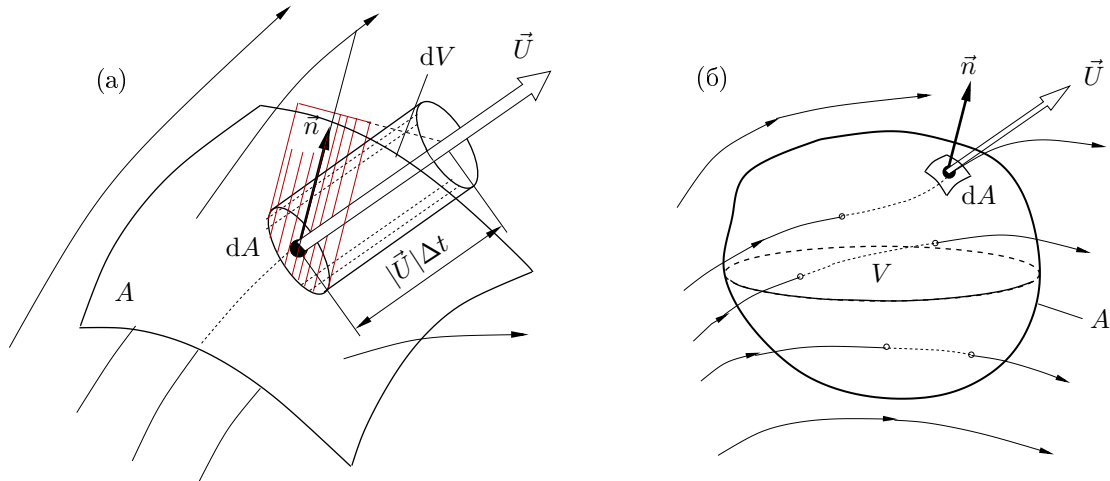


**Слика 4.5.** Инфинитезималне материјалне и контролне запремине: (а) Инфинитезимална материјална запремина, тј. запремина флуидног делића ( $dV_m \equiv \delta V$ ) који се креће брзином  $\vec{U}$  једнакој локалној брзини струјања у свакој тачки (Лагранж); (б) Инфинитезимална контролна запремина  $dV$  фиксна у простору кроз коју струји, тј. протиче флуид (Ојлер).

Коначне запремине  $V_m$  и  $V$ , као и површи  $A_m$  и  $A$  су од значаја за извођење једначина механике флуида у *интегралном облику*. Међутим, често је сврсисходно диференцијалне једначине извести директно, а не трансформацијама интегралних једначина. Дакле, коришћењем *инфинитезималних* материјалних запремина  $dV_m$  и контролних запремина  $dV$ , сл. 4.5, изводе се основне једначине механике флуида у *диференцијалном облику*.

#### 4.4.2 Запремински и масени проток флуида

**Запремински проток флуида** представља количину флуида која у јединици времена протекне кроз фиксну контролну површ  $A$ . Он се означава са  $\dot{V}$ .



**Слика 4.6.** (а) Отворена и (б) затворена фиксна контролна површ  $A$  у струјном пољу. Јединични вектор спољашње нормале површи  $dA$  је  $\vec{n}$ , а  $dV$  је запремина елементарног цилиндра.

Сагласно ознакама на сл. 4.6а, следе релације:

$$\begin{aligned} dV &= [(\vec{U} \Delta t) \cdot \vec{n}] dA = \vec{U} \cdot \vec{n} dA \Delta t \\ \Delta V &= \int_A \vec{U} \cdot \vec{n} dA \Delta t = \Delta t \int_A \vec{U} \cdot \vec{n} dA \end{aligned}$$

$$\dot{V} \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta V}{\Delta t} = \int_A \vec{U} \cdot \vec{n} dA \quad (4.9)$$

Физичка интерпретација запреминског протока је да он представља **флукс брзинског поља  $\vec{U}$**  кроз површ  $A$ .

**Масени проток флуида** се дефинише као маса течности која у јединици времена протекне кроз неку површ  $A$ . Означава се са  $\dot{m}$ , и аналогно изразу (4.9) за запремински проток следи да је масени проток дефинисан изразом

$$\dot{m} \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta t} = \int_A \rho \vec{U} \cdot \vec{n} dA \quad (4.10)$$

Очигледно је да изрази (4.9) и (4.10) у уобичајеној индексној нотацији и конвенцији о сабирању по поновљеном индексу добијају облик

$$\dot{V} = \int_A u_i n_i dA, \quad \dot{m} = \int_A \rho u_i n_i dA \quad (4.11)$$

На основу *флука вектора брзине* било кроз *инфинитезималну затворену фиксну површ*, сл. 4.5б, или кроз *коначну затворену фиксну контролну површ  $A$*  (сл. 4.6б) доказује се физички смисао дивергенције брзине  $\text{div} \vec{U}$ , као и физичко тумачење формуле

Гаус-Остроградског (деталније о овоме видети, *факултативно*, у књизи С. Чантрак, Хидродинамика, поглавље 2.11). Корисно је у оквиру ове материје навести релацију у векторском облику и у индексној нотацији која повезује дешавања на граничној површи  $A$  и унутар запремине  $V$  коју она обухвата:

$$\oiint_A \vec{U} \cdot \vec{n} dA = \iiint_V \operatorname{div} \vec{U} dV \Leftrightarrow \oiint_A u_i n_i dA = \iiint_V \frac{\partial u_i}{\partial x_i} dV. \quad (4.12)$$

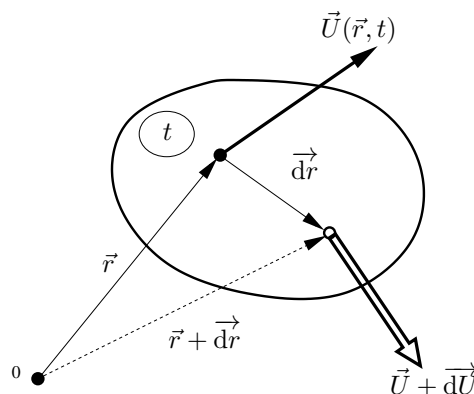
Физички појам  $\operatorname{div} \vec{U}$  разматра се у наредном поглављу 4.5.

У поглављима 4.5 и 4.6 која следе дају су *битна физичка тумачења* неопходна како за правилно разумевање суштинског у науци о струјању, тако и за извођење основних једначина механике флуида и њихову примену!

## 4.5 Кретање и декомпозиција брзине флуидног делића

### 4.5.1 Кретање, деформисање и декомпозиција извода брзине флуидног делића

*Прва Хелмхолцева теорема* (Н. Helmholtz, 1821-1894) *теорема*: Опште кретање флуидног делића састоји се из: (1) транслаторног (праволинијског или криволинијског) кретања; (2) обртног (ротационог) кретања око тренутне сопствене осе и (3) деформационог кретања.



**Слика 4.7.** Декомпозиција поља брзине унутар флуидног делића:  $d\vec{U}\{du_i\}$ ,  $i = 1, 2, 3$ ;  $d\vec{r}\{dx_j\}$ ,  $j = 1, 2, 3$ .

$$\vec{U} + d\vec{U} = \vec{U} + \boxed{(\vec{dr} \cdot \nabla) \vec{U}} \Leftrightarrow u_i + du_i = u_i + \boxed{\frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx_j} \quad (4.13)$$

Из (4.13) следи да се делић креће као крута (недеформабилна) целина брзином  $\vec{U}$ , тј.  $u_i$ , а да су његова *ротација* и *деформација* одређени само *прираштајем брзине*. Дакле, потребно је разматрати члан  $(\partial u_i / \partial x_j) dx_j$  у изразу (4.13), који представља прираштај брзине  $u_i$  у правцу координате  $x_j$ , тј. у датом индексном запису ( $i, j = 1, 2, 3$ ) тотални (укупни) прираштај функције три промењиве. Очигледно да *девет* величина (извода брзине)  $\partial u_i / \partial x_j$  формира матрицу  $3 \times 3$  која може да се растави, тј. може да се изврши њена декомпозиција

на један симетричан и један несиметричан (асиметричан) део (матрицу) како следи:

$$\boxed{\frac{\partial u_i}{\partial x_j}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \stackrel{\text{Ознаке}}{=} \dot{S}_{ij} + \omega_{ij} \quad (4.14)$$

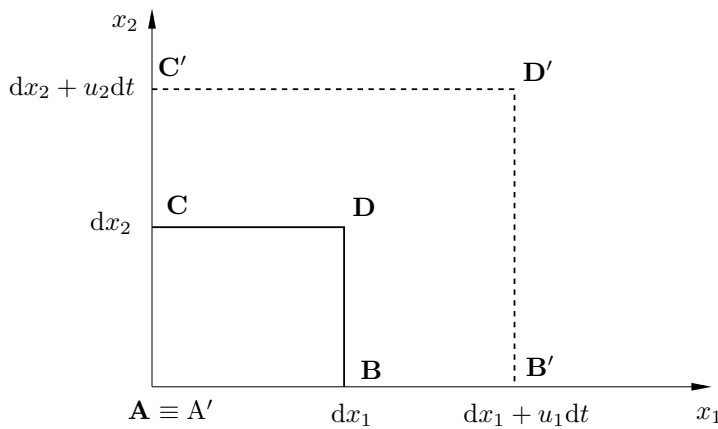
Симетрични део извода брзине,  $\dot{S}_{ij}$  представља компоненту **тензора брзине деформисања**, док асиметрични део  $\omega_{ij}$  представља компоненту **тензора вртложности**. Сада ће се бити извршена детаљна анализа тих тензора.

### 4.5.2 Анализа тензора брзине деформисања. Физички смисао дивергенције брзине

$\dot{S}_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$  — компонента тензора брзине деформисања (симетрични тензор другог реда)

#### Анализа чланова $\partial u_i / \partial x_j$ са истим индексима ( $i = j$ )

Посматра се флуидни делић облика правоугаоника (ABCD), страница  $dx_1$  и  $dx_2$ , слика 4.8. Након временског интервала  $dt$ , дошло је до издужења његових страница, тако да је он сада облика  $A'B'C'D'$ .



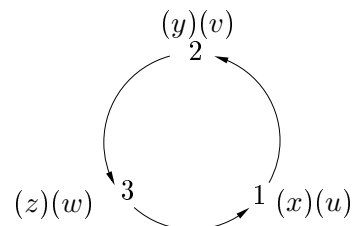
**Слика 4.8.** Физички смисао дијагоналних елемената  $\partial u_i / \partial x_i$  (не сумира се по  $i!$ ) у матрици  $\dot{S}_{ij}$ ; —  $t$  (недеформисан флуидни делић); - - -  $t + dt$  (деформисани флуидни делић) - издужење или скраћење дужине његових страница → промена запремине флуидног делића.

Координате тачака  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  и  $D'$  (сл. 4.8)

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(0, 0) &\rightarrow \mathbf{A}'(0, 0), & \mathbf{D}(dx_1, dx_2) &\rightarrow \mathbf{D}' \left( dx_1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} dx_1 dt, dx_2 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} dx_2 dt \right) \\ \mathbf{B}(dx_1, 0) &\rightarrow \mathbf{B}' \left( dx_1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} dx_1 dt, 0 \right), & \mathbf{C}(0, dx_2) &\rightarrow \mathbf{C}' \left( 0, dx_2 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} dx_2 dt \right) \end{aligned}$$

Ознаке:

$$\begin{aligned} x_1 &= x, & x_2 &= y, & x_3 &= z \\ u_1 &= u, & u_2 &= v, & u_3 &= w \end{aligned}$$



Различите координате тачака физички означавају дилатацију (издужење) или контракцију (скраћење) страница у правцима оса  $0x_1$  и  $0x_2$ . На пример, дужина дужи  $A'B'$  дефинисана је релацијом:

$$A'B' = dx_1 + [u_1(dx_1) - u_1(0)] dt \approx dx_1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} dx_1 dt.$$

Релативна промена дужине странице (дужи, ивице)  $AB$  у временском интервалу  $dt$  износи

$$\frac{d(AB)}{AB} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} dt \Leftrightarrow \frac{d(dx_1)}{dx_1} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} dt$$

Релативна промена *површине правоугаоника*  $ABCD$  одређена је изразом

$$\frac{dA^*}{A^*} = \frac{d(AB)}{AB} + \frac{d(AC)}{AC} = \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) dt = \text{div} \vec{U} dt. \quad (4.15)$$

Узимајући у обзир промену брзине и у трећем правцу  $x_3$ , управном на раван слике 4.8, добија се *релативна промена запремине  $V$  елементарног паралелоипеда*

$$\frac{dV}{V} = \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) dt = \frac{\partial u_i}{\partial x_i} dt = (\text{div} \vec{U}) dt. \quad (4.16)$$

Дакле, *експанзија или компресија запремине изражава се помоћу дивергенције брзине  $\text{div} \vec{U}$ !* Ако је  $V_m = dV_m$  запремина флуидног делића онда из релације (4.16) следи:

$$\frac{d(dV_m)}{dV_m} = \text{div} \vec{U} dt \Leftrightarrow \boxed{\text{div} \vec{U} = \frac{d(dV_m)}{dt} \frac{1}{dV_m}}. \quad (4.17)$$

Дакле, *дивергенција брзине  $\text{div} \vec{U}$  представља брзину релативне промене запремине флуидног делића!* За случај *нестишљивог* флуида ( $\frac{dV}{V} = 0 \Leftrightarrow \frac{d(dV_m)}{dV_m} = 0$ ) је  $\text{div} \vec{U}!$

### Анализа чланова $\partial u_i / \partial x_j$ у $\dot{S}_{ij}$ за $i \neq j$

Са слике 4.9 следи

$$\begin{aligned} A(0, 0) &\rightarrow A'(0, 0) \\ B(dx_1, 0) &\rightarrow B' \left( dx_1, \frac{\partial u_2}{\partial x_1} dx_1 dt \right) \\ C(0, dx_2) &\rightarrow C' \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} dx_2 dt, dx_2 \right) \\ D(dx_1, dx_2) &\rightarrow D' \left( dx_1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} dx_2 dt, dx_2 + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} dx_1 dt \right) \end{aligned}$$

Угао  $d\alpha$  карактерише ротацију стране  $AB$  у времену  $dt$ :

$$d\alpha \approx \text{tg}(d\alpha) = [u_2(dx_1) - u_2(0)] \frac{dt}{dx_1} \approx \frac{\partial u_2}{\partial x_1} dt$$



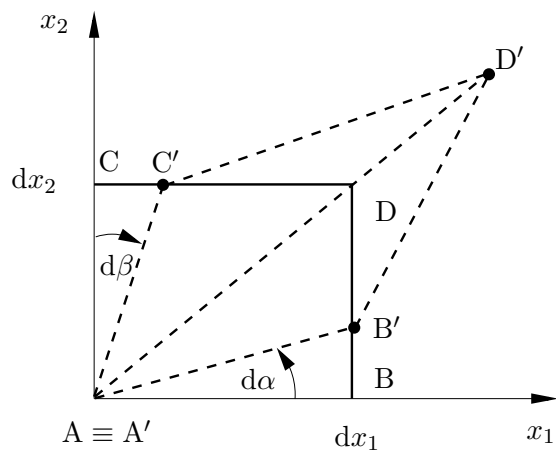
одакле следи

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{\partial u_2}{\partial x_1}$$

Аналогно се добија и  $d\beta/dt = -\partial u_1/\partial x_2$  (сагласно сл. 4.9), тако да се промена  $d\gamma/dt$  угла  $\gamma$  између страница  $A'B'$  и  $A'C'$  дефинише релацијом

$$\frac{d\gamma}{dt} = -\frac{d\alpha - d\beta}{dt} = -\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right) = -2\dot{S}_{12} \quad (4.18)$$

Анализа ротације осталих страница и промена углова између њих је потпуно аналогна.



Слика 4.9. Деформација правих углова између страница услед недијагоналних чланова  $\partial u_i/\partial x_j$ ,  $i \neq j$  у матрици  $\dot{S}_{ij}$ ; —  $t$  (недеформиран флуидни делић); - - -  $t + dt$  (деформација правих углова)

Дакле, чланови  $\partial u_i/\partial x_j$ ,  $i \neq j$  у матрици  $\dot{S}_{ij}$  дефинишу локалну брзину промене (деформације) углова, тј. брзину деформације облика флуидног делића. Због тога се симетрична матрица  $\dot{S}$ , чији су елементи  $\dot{S}_{ij}$  дефинисани релацијом (4.14), назива тензором брзине деформисања. Величине  $\dot{S}_{ij}$  за случај  $i = j$  дефинишу промену запремине,

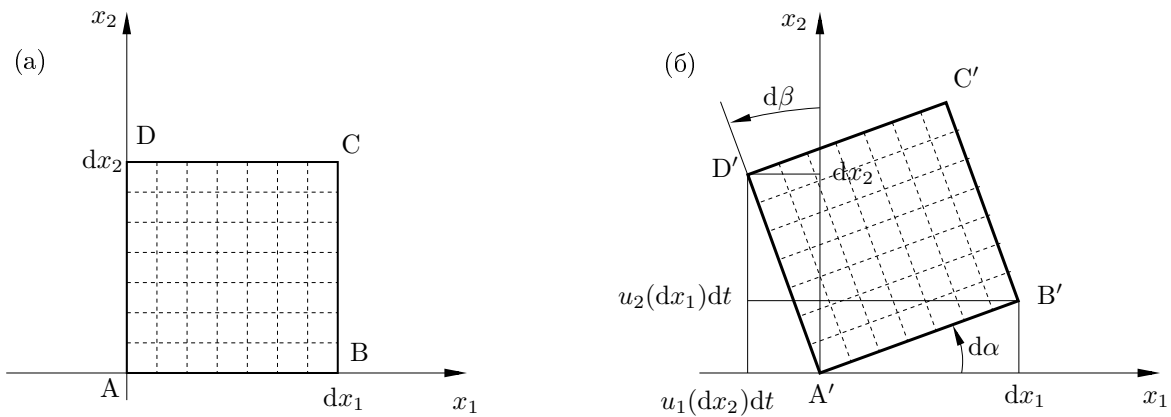
$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \equiv \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \text{div} \vec{U}$$

док величине  $\dot{S}_{ij}$  за  $i \neq j$  одређују брзину деформације облика флуидног делића, тј. промену углова између карактеристичних праваца!

### 4.5.3 Анализа асиметричне матрице $\omega_{ij}$ (чиста ротација)

Посредством релације (4.14), поглавља 4.5.2 и слике 4.10 следе релације:

- $\omega_{ij} = 0$  за  $i = j$  ( $\omega_{ii} = 0$ ; не сумира се по  $i$ !)
- $\omega_{ij} = -\omega_{ji}$  (асиметричност),
- $\dot{S}_{ij} = 0$  за  $\partial u_i/\partial x_j = -\partial u_j/\partial x_i$ ,
- $d\alpha \approx \frac{\partial u_2}{\partial x_1} dt$ ,
- $d\beta \approx -\frac{\partial u_1}{\partial x_2} dt = d\alpha$
- $\Rightarrow d\gamma = -(d\alpha - d\beta) = 0$  (нема промене угла између страница  $AB$  и  $AC$ )



Слика 4.10. Ефекат извода брзине  $\partial u_i/\partial x_j$  за случа  $i \neq j$  и  $\partial u_i/\partial x_j = -\partial u_j/\partial x_i$ : (а) тренутак  $t$ ; (б) тренутак  $t + dt$

На основу претходно наведених релација следи

$$d\alpha = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} dt = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) dt = \omega_{21} dt \quad (4.19)$$

Дакле, члан  $\omega_{21}$  физички означава угаону брзину  $d\alpha/dt$  локалне ротације, без деформације, флуидног делића! Чиста ротација, дефинисана изразом (4.19), настаје ротацијом страница АВ и АС у исту страну једнаким угаоним брзинама (угао између страница се не мења, величина  $\dot{S}_{12}$  је једнака нули сагласно релацији (4.18). Аналогно је и за остале равни, тако да следи:

$$\boxed{\omega_{ij} = 0, \quad i = j} \quad \boxed{\omega_{ij} = -\omega_{ji} \quad \rightarrow \quad \omega_{12} = -\omega_{21}, \quad \omega_{23} = -\omega_{32}, \quad \omega_{31} = -\omega_{13}}$$

$$\|\omega_{ij}\| = \begin{pmatrix} 0 & \omega_{12} & \omega_{13} \\ \omega_{21} & 0 & \omega_{23} \\ \omega_{31} & \omega_{32} & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) \end{Bmatrix} \quad (4.20)$$

Матрица, тј. асиметрични тензор другог реда  $\|\omega_{ij}\|$  се назива тензор вртљости. И он, као и тензор напона  $\|p_{ij}\|$  и тензор брзине деформисања  $\|\dot{S}_{ij}\|$  има девет компоненти, од којих су, међутим само три међусобно независне, јер за разлику од тензора  $\|p_{ij}\|$  и  $\|\dot{S}_{ij}\|$ , антисиметричан! Дакле, сагласно изразу (4.20), тензору вртљости  $\|\omega_{ij}\|$  се у тродимензионалном простору, у коме има три међусобно независне компоненте координира, тј. придружује један вектор  $\vec{\omega}(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$  чије су компоненте, на основу, (4.19) и (4.20), дефинисане релацијама:

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) = \omega_{21} = \omega_3, \quad \omega_{13} = \omega_2, \quad \omega_{32} = \omega_1 \quad (4.21)$$

Резултујућа угаона брзина флуидног делића у тродимензионалном простору одређена је вектором

$$\vec{\omega} = \omega_x \vec{i} + \omega_y \vec{j} + \omega_z \vec{k}$$

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \vec{i} + \left( \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \vec{j} + \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \vec{k} \right] \quad (4.22)$$

Ротација флуидног делића, тј. његова угаона брзина  $\vec{\omega}$  изражена је посредством извода брзинског поља  $\partial u_i / \partial x_j$ !

### Физичко значење ротора брзине и појам вртложности

Сагласно дефиницији ротора брзинског поља<sup>1</sup>  $\text{rot} \vec{U}$  и изразу (4.22) добија се релација

$$\boxed{\text{rot} \vec{U} = 2\vec{\omega}} \quad (\text{rot} \vec{U} \equiv \nabla \times \vec{U}) \quad (4.23)$$

Ротор брзине  $\text{rot} \vec{U}$  представља двоструку угаону брзину којом флуидни делић као целина (делић круте материје) врши ротацију око сопствене осе!

У литератури се интензитет вектора ротора брзине, тј. двоструког вектора угаоне брзине делића дефинише као **вртложност**  $|\vec{\Omega}|$ , а сам вектор као **вектор вртложности**  $\vec{\Omega}$ :

$$\vec{\Omega} = \text{rot} \vec{U} = 2\vec{\omega} \quad (4.24)$$

У овом курсу механика флуида, појам вртложности ће се односити на величину  $\vec{\omega}$ .

#### 4.5.4 Вртложна и потенцијална струјања. Појам вртлога и циркулације.

Дефиниција вртложних и потенцијалних струјања се дефинише на основу вредности ротора брзине.

1. Ако је  $\nabla \times \vec{U} \neq 0$  у свакој тачки струјног поља, струјање је *вртложно* ( $\vec{\omega} \neq 0$ ). Струјање је ротационо (обртно) и флуидни делић има коначну угаону брзину!
2. Ако је  $\nabla \times \vec{U} = 0$  у свакој тачки брзинског поља, онда је струјање *потенцијално* (*невртложно*)! У том случају угаона брзина флуидног делића је једнака нули, па је његово кретање у простору чиста translација, или translација удружена са деформацијом (запремине и облика).

Пошто је  $\text{rot grad} \varphi = 0 \equiv \nabla \times \nabla \varphi \equiv 0$ , за било коју функцију  $\varphi(x, y, z, t)$ , онда из у слова  $\vec{\omega} = 0$ , тј.  $\text{rot} \vec{U} = 0$  следи да је  $\vec{U} = \text{grad} \varphi$ , где **функција**  $\varphi$  означава *потенцијал брзине*! Ако *нестисљив* флуид ( $\text{div} \vec{U} = 0$ ) струји *потенцијално* ( $\vec{\omega} = 0 \rightarrow \vec{U} = \text{grad} \varphi$ ) онда је

$$\text{div grad} \varphi = 0 \Rightarrow \nabla \cdot \nabla \varphi \equiv \nabla^2 \varphi \Rightarrow \boxed{\Delta \varphi = 0} \quad (4.25)$$

или у Декартовим координатама

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0 \quad (\text{Лапласова једначина}) \quad (4.26)$$

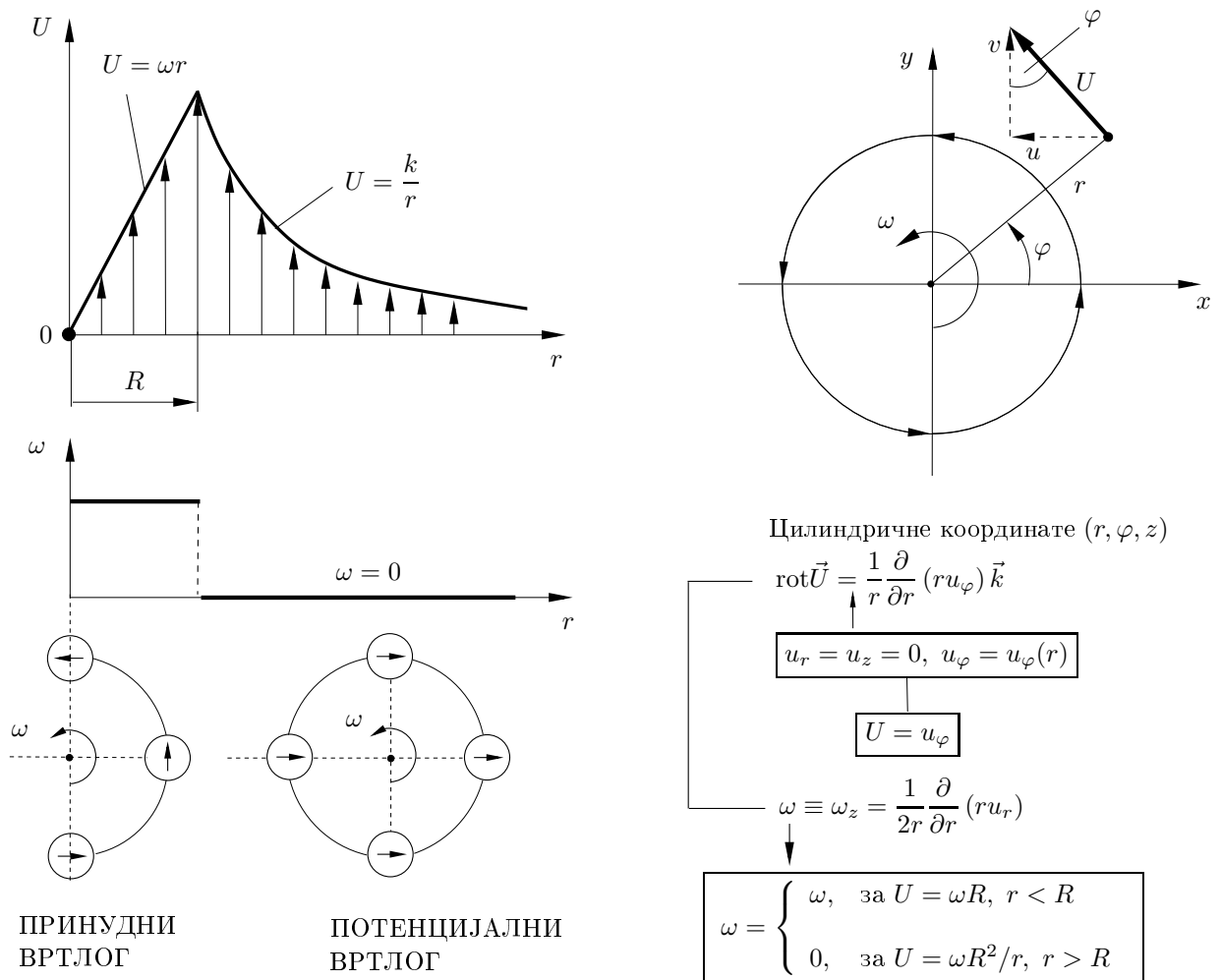
<sup>1</sup>(Основно математичко оруђе за механику флуида погледај у књизи С. Чантрак, *Хидродинамика*, глава 2.11.)

Дакле, у случају *потенцијалног* струјања *нестисљивог* флуида потенцијал брзине задовољава *Лапласову* (Pierre Simon de Laplace, 1749-1827) *једначину*, која је *линеарна парцијална диференцијална једначина другог реда*. Ову једначину за *задате граничне услове* потребно решити, у циљу добијања функције  $\varphi$ .

*Вртлог* представља одговарајућу струјну структуру различитих размера у брзинском пољу, која настаје кретањем флуидних делића дуж затворених линија (путања) око заједничког центра. Међу *вртлозима*, који се карактеришу струјањем у којем су струјнице концентрични кругови, посебно се издваја комбиновани вртлог, тзв. *Ранкинов вртлог*.

**Ранкинов вртлог**

Моделом Ранкиновог вртлога је описан *равански вртлог* у коме се флуидни делић крећу дуж концентричних кружница у равни  $xOy$ . Овим моделом је представљена комбинација два типа вртлога: (1) *принудног вртлога*, и (2) *слободног, тј. потенцијалног вртлога*.



Слика 4.11. Распореда брзине и вртложности у Ранкиновом, тј. принудно-потенцијалном вртлогу.

1. *Принудни вртлог* - ротација флуида као крутог тела око осе  $Oz$  константном угаоном брзином  $\omega$  - сл. 4.11). У овом случају се брзина линеарно повећава са повећањем

растојања од центра ротације укупне масе флуида.

$$\begin{aligned}\vec{U} = \vec{\omega} \times \vec{r} \quad \rightarrow \quad & u_r = u_z = 0, \quad u_\varphi = \omega r = U \\ & u = -\omega r \sin \varphi = -\omega y, \quad v = \omega r \cos \varphi = \omega x.\end{aligned}$$

Из ових релација, сагласно изразу (4.22) и (4.23) следи да је

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 2\omega \quad \Leftrightarrow \quad \text{rot} \vec{U} = 2\omega \vec{k} \quad (\omega = \omega_z) \quad (4.27)$$

2. *Потенцијални вртлог.* У свакој тачки струјног поља потенцијалног вртлога производ брзине и радијалног растојања од центра вртлога је константан, тј. брзина је обрнуто пропорционална растојању од центра ротације. Тако је поље брзине за слободног вртлога

$$U = k/r \quad \rightarrow \quad u = -k \frac{\sin \varphi}{r} = k \frac{y}{x^2 + y^2}, \quad v = \frac{\cos \varphi}{r} = k \frac{x}{x^2 + y^2}$$

тако да важи ( $k = \text{const}$ )

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad \xrightarrow{\text{јдн. (4.27)}} \quad \omega \equiv \omega_z = 0. \quad (4.28)$$

Очигледно је да се услов потенцијалног струјања (4.28) испуњава функцијом потенцијала брзине  $\varphi$

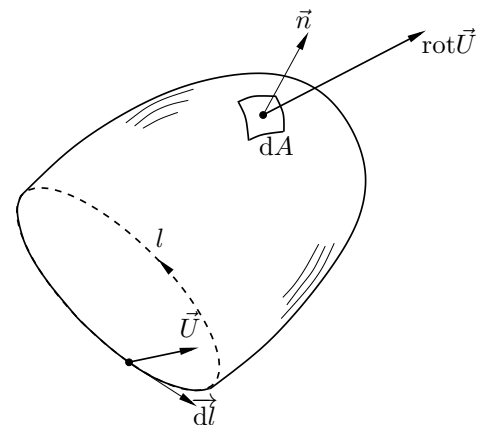
$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y} \quad \xrightarrow{\text{div} \vec{U}=0, \text{јдн. (4.28)}} \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \Delta \varphi = 0.$$

### Циркулација брзине

Циркулација брзине  $\Gamma$  је суштински повезана са појмом *вртложности* и представља битну карактеристику брзинског поља. Циркулација се повезује са вектором вртложности преко Стоксове теореме. Тако је, на основу ње, флукс вектора  $\text{rot} \vec{U}$  кроз произвољну незатворену површ  $A$  једнак је циркулације брзине дуж контуре на коју се та површ ослања (сл. 4.12).

$$\Gamma = \oint_l \vec{U} \cdot d\vec{l} = \int_A \text{rot} \vec{U} \cdot \vec{n} dA \equiv \int_A 2\vec{\omega} \cdot \vec{n} dA. \quad (4.29)$$

Постојање вртложности  $\vec{\omega}$  се утврђује израчунавањем циркулације дуж одговарајућих кривих. На пример, ако је струјање потенцијално, а циркулација је ипак различита од нуле, онда се унутар површи обухваћеној кривом дуж које је  $\Gamma \neq 0$  постоје хидродинамички сингуларитети типа вртлога. Тако се применом обрасца (4.29) на струјно поље



**Слика 4.12.** Стоксов образац - физичка зависност вектора брзине и вектора вртложности и појам циркулације брзине.

Ранкиновог вртлога (сл. 4.11) добија  $\Gamma_l = 2\pi\omega R^2$ , где је  $l$  било која крива која обухвата сингуларитет  $r = 0$ ! Циркулација је у потенцијалном струјању повезана са потенцијалом брзине  $\varphi$ , а при опструјавању тела са силом узгона! Циркулација има суштинску улогу у извођењу, доказу и применама кинематичким и динамичких теорема о вртложности (Келвин, Хелхолц, Лагранж).

## 4.6 Убрзање флуидног делића

### 4.6.1 Декомпозиција убрзања и појам материјалног извода. Локални и конвективни део инерцијалне силе.

Посматра се исти делић у тачкама  $M_1(\vec{r}_1)$  и  $M_2(\vec{r}_2)$  у два произвољна тренутка  $t$  и  $t'$  са брзинама  $\vec{U}(\vec{r}_1, t)$  и  $\vec{U}(\vec{r}_2, t')$  (сл. 4.13). Дакле, у тренутку  $t' = t + \Delta t$  делић се налази у тачки  $M_2(\vec{r}_2)$  одређеној са  $\vec{r}_2 = \vec{r}_1 + \vec{U}(\vec{r}_1, t)\Delta t + \mathcal{O}[(\Delta t)^2]$  у којој има брзину  $\vec{U}(\vec{r}_2, t')$

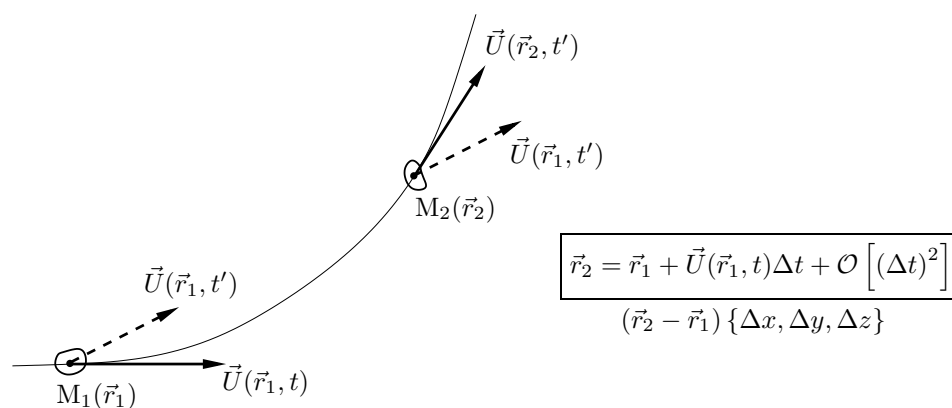
Промена (прираштај) брзине  $\Delta\vec{U}$  флуидног делића у времену  $\Delta t = t' - t$  састоји се од:

- (а) промене експлицитно везане за промену поља брзине  $\vec{U}(\vec{r}, t)$  у току времена; ако је струјање *стационарно*, ова промена не постоји (чланови  $\vec{U}(\vec{r}_1, t') - \vec{U}(\vec{r}_1, t)$ , сл. 4.13).
- (б) промене изазване кретањем флуидног делића; ако је поље брзине *униформно* (хомогено) онда овај део не постоји (чланови  $\vec{U}(\vec{r}_2, t') - \vec{U}(\vec{r}_1, t')$ , сл. 4.13).

Укупна промена вектора брзине флуидног делића дефинисана је изразом:

$$\Delta\vec{U} = \vec{U}(\vec{r}_2, t') - \vec{U}(\vec{r}_1, t) = \frac{\partial\vec{U}}{\partial t}\Delta t + \frac{\partial\vec{U}}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial\vec{U}}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial\vec{U}}{\partial z}\Delta z,$$

где су  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  и  $\Delta z$  компонентне вектора  $\vec{r}_2 - \vec{r}_1$  (сл. 4.13).



Слика 4.13. Декомпозиција убрзања флуидног делића у случају нестационарног струјања.

Убрзање  $\vec{a}$  флуидног делића одређено је релацијом:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{U}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( \frac{\partial\vec{U}}{\partial t} + \frac{\partial\vec{U}}{\partial x} \frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{\partial\vec{U}}{\partial y} \frac{\Delta y}{\Delta t} + \frac{\partial\vec{U}}{\partial z} \frac{\Delta z}{\Delta t} \right) = \frac{\partial\vec{U}}{\partial t} + u \frac{\partial\vec{U}}{\partial x} + v \frac{\partial\vec{U}}{\partial y} + w \frac{\partial\vec{U}}{\partial z} \stackrel{\text{деф.}}{=} \frac{D\vec{U}}{Dt} \quad (4.30)$$

или у још компактнијем облику

$$\boxed{\frac{D\vec{U}}{Dt} = \frac{\partial\vec{U}}{\partial t} + (\vec{U} \cdot \nabla)\vec{U}} \tag{4.31}$$

$\frac{D\vec{U}}{Dt}$  - убрзање флуидног делића  $\rightarrow$  инерцијална сила  $\vec{R}_a$

$\frac{\partial\vec{U}}{\partial t}$  - локални део убрзања (једнак нули у стационарном струјању)  $\rightarrow$  локална  $\vec{R}_a$

$(\vec{U} \cdot \nabla)\vec{U}$  - конвективни део убрзања (једнак нули у униформном брзинском пољу)  $\rightarrow$  конвективна  $\vec{R}_a$

Сагласно изразу (4.31) оператором

$$\boxed{\frac{D()}{Dt} = \frac{\partial()}{\partial t} + (\vec{U} \cdot \nabla)() = \frac{\partial()}{\partial t} + u_i \frac{\partial()}{\partial x_i}} \tag{4.32}$$

Декартове координате

се дефинише *материјални извод* физичке величине  $()$ , тј. материјални (брзински, Стоксов, тотални, индивидуални, субстанцијални) извод скаларне, векторске или тензорске величине стања  $()$ . На пример, промена температуре  $T(\vec{r}, t)$  флуидног делића дуж његове трајекторије одређена је изразом

$$\frac{DT}{Dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{U} \cdot \nabla)T = \frac{\partial T}{\partial t} + \vec{U} \cdot \text{grad}T$$

Величина  $DT/Dt$  одређује *материјалну промену* (везану за флуидни делић) температуре, док члан  $\partial T/\partial t$  дефинише *локалну промену* температуре  $T$ . Разлика ове две промене изражава се *конвективном променом*  $\vec{U} \cdot \text{grad}T$ , која описује утицај брзинског поља!

### 4.6.2 Физичко значење материјалног извода. Прелаз од Лагранжеве ка Ојлеровој методи

Детаљна анализа и математичко оруђе дати су у одељку 2.11.14 у књизи *С. Чантрак, Хидродинамика*. Тај материјал се овде допуњава само са извесном графичком интерпретацијом, како следи.

Лагранжев извод по времену	Ојлеров временски извод	
Материјални	Локални	Конвективни извод
извод	извод	
$\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + u \frac{\partial f}{\partial x} + v \frac{\partial f}{\partial y} + w \frac{\partial f}{\partial z}$		
	нестационарност	нехомогеност
Лагранжева метода (флуидни делић)	Ојлерова метода (начин описа поља) (фиксна тачка) - место у простору	

(4.33)

У изразу (4.33) величина  $f(\vec{r}, t)$  представља скаларно, векторско или тензорско поље, које је у општем случају *нестационарно* и *нехомогено*! При извођењу једначина механике флуида, као и при прелазу из Лагранжевог система у Ојлеров и интерпретацији физичког значења појединих израза (сл. 4.1), релација (4.33) игра битну улогу и има важно физичко-математичко значење.

**Трансформација из Лагранжевих у Ојлерове координате, тј. промењиве**

Када се у изразу за брзину  $\vec{U}(\vec{r}, t)$  величина  $\vec{r}$  сматра функцијом времена у смислу Лагранжа онда је  $\vec{U}(\vec{r}, t)$  експлицитна и имплицитна функција времена, па се парцијалним диференцирањем добија убрзање у облику

$$\vec{a}(\vec{r}, t) = \left( \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} \right)_{(\vec{r} \text{ фиксно})} + \frac{\partial \vec{U}}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + u_i \frac{\partial \vec{U}}{\partial x_i} \tag{4.34}$$

који комплетно дефинише трансформацију од Лагранжевих у Ојлерове координате. У Ојлеровом смислу  $\vec{r}$  представља фиксирани тачке простора у коме се посматра струјно поље. Из релација (4.30)-(4.34) следе изрази

$$D = dt \frac{\partial}{\partial t} + (d\vec{r} \cdot \nabla), \quad D\vec{U} = dt \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + (d\vec{r} \cdot \nabla)\vec{U}, \quad \frac{D\vec{U}}{Dt} = \vec{a}(\vec{r}, t) \tag{4.35}$$

у којима D означава материјални (субстанцијални) диференцијални оператор!

**4.6.3 Физичка анализа и увођење инерцијалне силе  $\vec{R}_a$ . Математички изрази за силе инерције**

Математички израз за инерцијалну силу у Декартовим правоуглим координатама у правцу x-осе ( $\rho \frac{D\vec{U}}{Dt} \equiv \rho \vec{a} \equiv \vec{R}_a^*$  - сила инерције за јединичну запремину флуида):

$$\rho \left[ \underbrace{\frac{\partial u}{\partial t}}_{(1)} + \underbrace{u \frac{\partial u}{\partial x}}_{(2)} + \underbrace{\frac{1}{2}v \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{1}{2}w \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)}_{(3)} + \underbrace{\frac{1}{2}w \left( \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) - \frac{1}{2}v \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)}_{(4)} \right]$$

$$\equiv \left[ \rho \frac{\partial u}{\partial t} \right] + \left[ \rho \left( \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] \tag{4.36}$$

конвективна

локална

}

сила инерције  $R_{a,x}^* = \rho a_x$

(1) - локално убрзање изазвано променом транслаторног кретања



② - убрзање линеарне (запреминске) деформације

③ - убрзање угаоне деформације (смицања, промене облика)

④ - убрзање обртања (ротације) (вртложно)

② + ③ + ④ - чланови **конвективног убрзања**

Аналогно се, цикличном пермутацијом, добијају изрази у правцима  $y$  и  $z$  осе.

Врло често се сврсисходно да се израз за убрзање, а тиме и инерцијалну силу, напише тако да су посебно издвојени чланови који карактеришу *кинетичку енергију* и чланови који дефинишу *вртложно кретање*, тј. *струјање*. Сагласно изразима (4.36) и (4.22) добија се следећи израз за инерцијалну силу дуж осе  $0x$ :

Инерцијална сила $R_{a,x}^*$		
локална	конвективна	
	изазвана променом кинетичке енергије	изазвана вртложношћу
$\rho \left[ \frac{\partial u}{\partial t} \right]$	+	$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{U^2}{2} \right)$
	+	$2(w\omega_y - v\omega_z)$

Цикличном пермутацијом добијају се и слични изрази за инерцијалне силе  $R_{a,y}^*$  и  $R_{a,z}^*$ . Из те три скаларне једначине се добија израз за инерцијалну силу  $\vec{R}_a^*$

$$\rho \left[ \underbrace{\frac{\partial \vec{U}}{\partial t}}_{\text{①}} + \underbrace{\text{grad} \left( \frac{U^2}{2} \right)}_{\text{②}} - \underbrace{\vec{U} \times \text{rot} \vec{U}}_{\text{③}} \right] \equiv \rho \frac{D\vec{U}}{Dt} \equiv \rho \vec{a} \tag{4.37}$$

① - локална инерцијална сила; ② - део услед промене кинетичке енергије; ③ - део услед вртложности; ② + ③ - конвективна инерцијална сила

Величина  $U$  представља интензитет резултујуће брзине, тј.

$$U \equiv |\vec{U}| = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2}.$$

Овде се истиче да се израз (4.37) добија без трансформација скаларних облика директно из (4.31) коришћењем познате формуле из векторске анализе

$$(\vec{U} \cdot \nabla) \vec{U} \equiv \underbrace{\frac{1}{2} \text{grad} U^2 - \vec{U} \times \text{rot} \vec{U}}_{\text{конвективно убрзање}} \tag{4.38}$$

Инерцијална сила $\vec{R}_a^*$	$\rho \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} +$	$\rho \text{grad} \frac{U^2}{2} +$	$2\rho \vec{\omega} \times \vec{U}$
Физички смисао (значање)	Локална инерција	Промена кинетичке енергије у простору	Утицај вртложности ( $\text{rot} \vec{U} = 2\vec{\omega}$ )
		<i>Конвективна инерција</i>	
Математичке карактеристике	Линеарни члан првог реда	Нелинеарни чланови - нелинеарни квадратни члан ( $\vec{U} \cdot \nabla \vec{U}$ )	
Апроксимација	При стационарном струјању једнака нули		У потенцијалном струјању једнака нули. Решења су хармонијске функције.
		При веома спором струјању једнака нули	При веома спором струјању једнака нули

Табела 4.1. Физичко значење, математичка природа и извесне апроксимације инерцијалне силе.

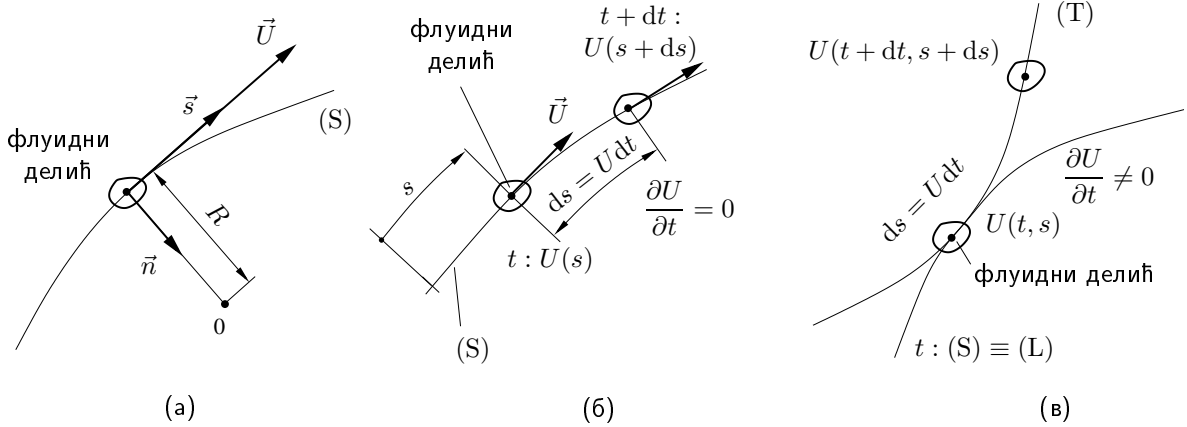
#### 4.6.4 Убрзање, тј. инерцијална сила у природним координатама

За примену, а нарочито при изучавању *једнодимензијских* струјања флуида, потребно је располагати са изразима за *тангентно* и *нормално убрзање*, тј. са изразима за компоненте инерцијалне силе у правцима трајекторија и струјница, као и у правцима ортогоналним на њих (слика 4.14).

За случај **нестационарног** струјања (сл. 4.14(в))  $a_s$  није више одређено изразом  $U \frac{\partial U}{\partial s}$  већ изразом  $\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial s}$ . У том циљу се замишља фиксна крива (L) која се у тренутку  $t$  поклапа са струјницом (сл. 4.14(в)) и на којој се у том тренутку налази флуидни делић чије се кретање посматра. Брзина тог флуидног делића у тренутку  $t$  је  $U(s, t)$ . За време  $dt$  делић се помери у положај  $s + ds = s + U dt$ . Флуидни делић се креће дуж трајекторије (T), али пошто је у крива (L) у тренутку  $t$  струјница (S), и струјница и трајекторија се поклапају у тачки у којој се налази флуидни делић, онда је такође тачно рећи, да делић прелази растојање  $ds$  дуж криве (L). Он има тада брзину  $U(t + dt, s + ds)$ . Брзина флуидног делића се у интервалу времена  $dt$  променила за  $dU = U(t + dt, s + ds) - U(s, t) = \frac{\partial U}{\partial s} U dt + \frac{\partial U}{\partial t} dt$ , тако да је убрзање

$$a_s = \frac{dU}{dt} \equiv \frac{DU}{Dt} = \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial s}.$$

Вектор убрзања  $\vec{a}$  флуидног делића, који се креће дуж криволинијске трајекторије, разлаже се осим на убрзање  $a_s$  и на нормално убрзање  $a_n$  (центрипетално убрзање које је усмерено ка центру кривине 0 трајекторије - сл. 4.14а). Ово убрзање је одређено изразом  $a_n = U^2/R$ , тако да је одговарајућа инерцијална сила за флуидни делић  $dm = \rho dV$  дата изразом  $\rho(U^2/R)dV$ .



**Слика 4.14.** Убрзање  $\vec{a} = D\vec{U}/Dt$  у природним координатама  $(s, n)$ . Ознаке: (S) - струјница;  $s$  - дужина која расте у смеру брзине  $\vec{U}$ ;  $\vec{s}$  и  $\vec{n}$  - јединични вектори у правцу тангенте и нормале на (S);  $R$  - полупречник кривине (слика (а)); (б) стационарно струјање; (в) нестационарно струјање; (Т) - трајекторија; (L) - фиксна крива која се у одговарајућем тренутку  $t$  поклапа са струјницом;  $a_s$  - убрзање флуидног делића у правцу струјања (тангентно убрзање) је промена у времену интензитета брзине  $U$  флуидног делића (слика б): у тренутку  $t$  флуидни делић је у положају  $s$ , а у тренутку  $t + dt$  је у тачки  $s + ds = s + U dt$ . Промена интензитета брзине  $U = |\vec{U}|$  у времену  $dt$  је:  $dU = U(s + U dt) - U(s) = \frac{\partial U}{\partial s} U dt$ , тако да одавде следи  $a_s = \frac{dU}{dt} \equiv \frac{DU}{Dt} = U \frac{\partial U}{\partial s}$ . Инерцијална сила у правцу струјања за флуидни делић  $dm = \rho dV$  износи  $\rho dV U \frac{\partial U}{\partial s} = \rho \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{U^2}{2} \right) dV$ , а за нестишљив флуид ( $\rho = const$ ) је  $\frac{\partial}{\partial s} \left( \rho \frac{U^2}{2} \right) dV$ .

На основу претходне анализе и ознака на слици 4.14 произилазе следеће релације:

$$\frac{D()}{Dt} = \frac{\partial()}{\partial t} + (\vec{U} \cdot \nabla)(); \quad \vec{U} = |\vec{U}| \vec{s} = U \vec{s}; \quad U = U(s, t); \quad (\vec{U} \cdot \nabla)() = (|\vec{U}| \vec{s} \cdot \nabla)() = U \frac{\partial}{\partial s}()$$

$$\boxed{\frac{D()}{Dt} = \frac{\partial()}{\partial t} + U \frac{\partial()}{\partial s}.} \quad (U = |\vec{U}|) \quad (4.39)$$

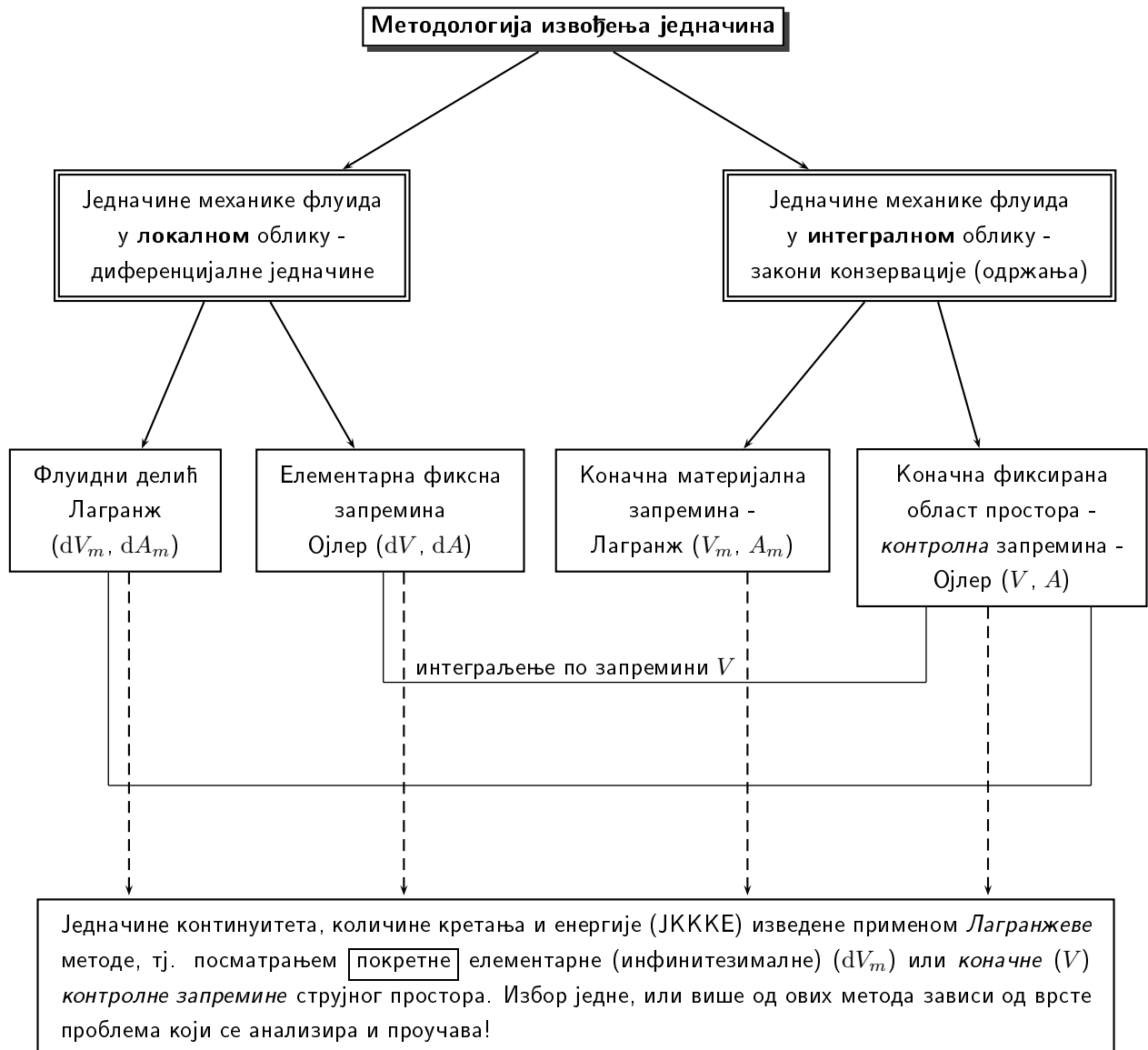
$$\vec{a} = \frac{D}{Dt}(U \vec{s}) = \left( \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial s} \right) \vec{s} + \frac{U^2}{R} \vec{n} = a_s \vec{s} + a_n \vec{n} \quad (4.40)$$

Како је  $U \vec{s} = \vec{U}$  и  $\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial s} = \frac{DU}{Dt}$  може се коначно вектор убрзања написати у облику

$$\boxed{\vec{a} = \frac{D\vec{U}}{Dt} = \frac{DU}{Dt} \vec{s} + \frac{U^2}{R} \vec{n} = \left( \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial s} \right) \vec{s} + \frac{U^2}{R} \vec{n}.} \quad (4.41)$$

## 4.7 Методологија извођења основних једначина механике флуида

Сагласно приказаном алгоритму на слици 4.1, у овом поглављу се образлаже методологија која је усвојена при извођењу једначине континуитета, једначине количине кретања и једначине енергије.



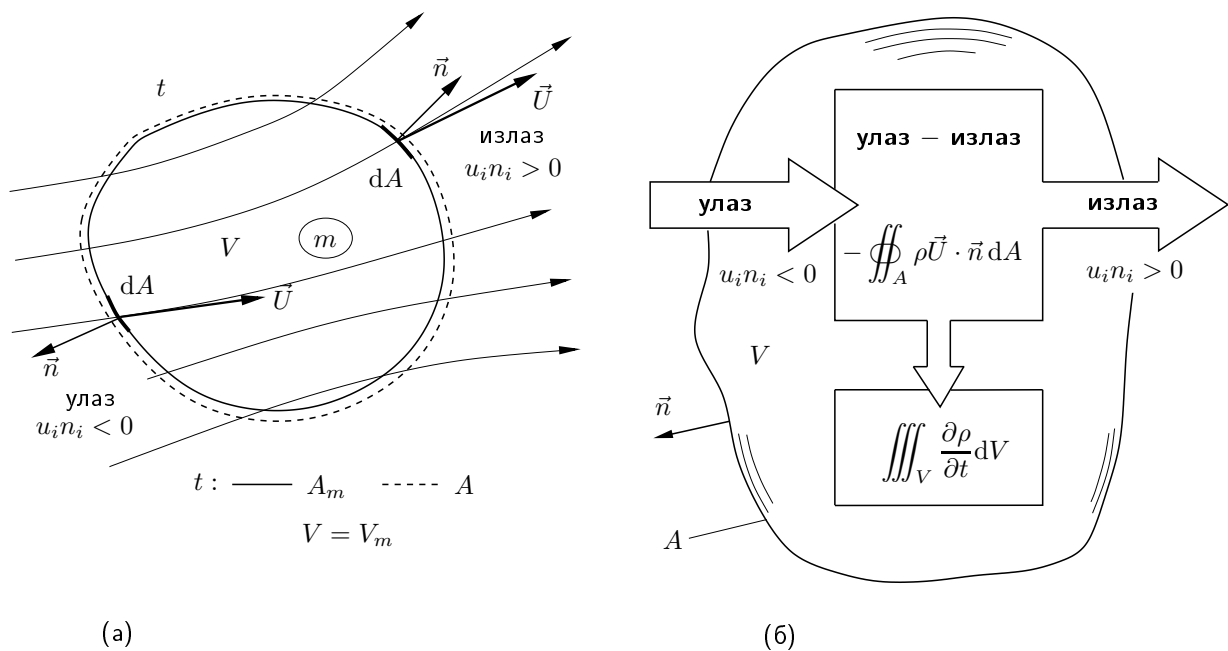
Слика 4.15. Методолошка мапа извођења основних једначина механике флуида у диференцијалном и интегралном облику

Из дидактичких разлога и најочигледније физичке интерпретације, нарочито при примени теорије за решавање *практичних проблема* у механици флуида, предност је дата извођењу једначина из њиховог **интегралног облика** како за *материјалну*, тако и за **контролну запремину**, уз неопходно коришћење физичко-математичког појма *материјалног извода*. Овакав приступ омогућује:

1. Суштинско повезивање Лагранжеве и Ојлерове методе, тј. материјалне и контролне запремине, тј. материјалних система и фиксне области (домена) простора.

2. Физички разумљиву примену основних закона одржања (конзервације) масе, импулса и енергије при извођењу основних једначина, као и јасну интерпретацију физичког смисла појединих чланова у овим једначинама.
3. Једноставан и разумљив метод добијања ЖККЕ у диференцијалном облику из њихових интегралних облика. Овим постаје потпуно јасан и обрнут поступак, када се из диференцијалних облика једначина изводе њихови интегрални облици.
4. У инжењерској пракси су физичко разумевање и примене основних једначина написаних за сврсисходно изабране контролне запремине и површи разматраних техничких система од огромног значаја! На пример, упркос једноставној формулацији закона импулса, тј. количине кретања он остаје и даље најтежи закон науке о струјању! Једна од тешкоћа, која га таквим чини, је управо и проблем сврсисходног избора контролне запремине, поред свих других потребних знања о струјном пољу.
5. Кроз **примере** и **примену** биће демонстриране и друге наведене методе извођења једначина, као и физичка тумачења основних једначина механике флуида у диференцијалном и интегралном облику. **Није циљ** формална примена готових формула, израза и једначина, али **јесте циљ** физичко разумевање проблема и примена закона, теорема и једначина у њиховом изворном облику! То је задатак инжењера и основни смисао инжењерства уопште!

### 4.8 Закон одржања масе - једначина континуитета



**Слика 4.16.** (а) Интегрални облик једначине континуитета за коначни материјални домен (материјална запремина  $V_m$ ) и за коначни фиксирани домен простора (контролна запремина  $V$ ) - у тренутку  $t$  материјална  $A_m$  и контролна површ  $A$  се поклапају; (б) Шематски приказ процеса дефинисаног једначином (4.47) за контролну површ  $A$  и контролну запремину  $V$ .

4.8.1 Коначна материјална запремина - материјални извод - Лагранжев метод

**Закон одржања масе - једначина континуитета**

Промена масе  $m$  материјалног система, тј. одређене количине флуида запремине  $V_m$  током времена једнака је нули (сл. 4.16а)

$$\frac{D}{Dt} \iiint_{V_m} \rho dV = 0 \tag{4.42}$$

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \int_{\text{МАСА } y \text{ } V_m} dm &= \int_{(M)} \frac{D}{Dt} (dm) = 0 \\ \frac{D}{Dt} (dm) &\equiv \frac{D}{Dt} (\rho dV) = 0 \end{aligned} \tag{4.43}$$

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \iiint_{(V_m)} \rho dV &= \iiint_{(V)} \frac{D\rho}{Dt} dV + \iiint_{(V)} \rho \frac{D(dV)}{Dt} = \\ &= \iiint_V \left( \frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div} \vec{U} \right) dV = 0 \end{aligned} \tag{4.44}$$

$\left[ \operatorname{div} \vec{U} = \frac{D(dV)}{Dt} \frac{1}{dV} \right]$

Како је запремина  $V$  потпуно произвољна, а подинтегрална функција непрекдна, онда из једначине континуитета (4.44) у интегралном облику следи њен диференцијални облик.

$$\boxed{\frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div} \vec{U} = 0} \quad \longleftrightarrow \quad \boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{U}) = 0} \tag{4.45}$$

Лагранж

$$\begin{aligned} (1) \quad \frac{D\rho}{Dt} &= \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{U} \cdot \operatorname{grad} \rho \\ (2) \quad \operatorname{div}(\rho \vec{U}) &= \rho \operatorname{div} \vec{U} + \vec{U} \cdot \nabla \rho \end{aligned}$$

Ојлер

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad \longleftrightarrow \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho u_i) = 0 \tag{4.46}$$

Очигледно је да се диференцирањем једначине (4.42) и коришћењем дефиниције дивергенције брзине добија једначина континуитета (4.45) како следи:

$$\frac{D}{Dt} (\rho dV) = \frac{D\rho}{Dt} dV + \rho \frac{D(dV)}{Dt} = \frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div} \vec{U} = 0$$

#### 4.8.2 Коначан домен (област) простора - контролна запремина - Ојлеров метод

Промена масе у јединици времена у контролној запремини =  
 $\sum$  улазних масених протока у контролну запремину –  
 $\sum$  излазних масених протока из контролне запремине

слика 4.16(б)

$$\iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = - \iint_A \rho \vec{U} \cdot \vec{n} dA \quad \longleftrightarrow \quad \frac{d}{dt} \iiint_V \rho dV = - \iint_A \rho u_i n_i dA \quad (4.47)$$

Промена укупне масе  $m$  флуида унутар запремине  $V$  једнака је њеном флуксу, тј. масеном протоку кроз контролну површ  $A$ .

слика 4.16(б)

$$\frac{d}{dt} \iiint_V \rho dV = - \iint_A \rho \vec{U} \cdot \vec{n} dA \quad (4.48)$$

Важе следеће релације:

$$\frac{d}{dt} \iiint_V \rho dV = \frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho dV = \iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV \quad - \quad \text{Лајбницово правило} \quad (4.49)$$

$$\iint_A \rho \vec{U} \cdot \vec{n} dA = \iiint_V \nabla \cdot (\rho \vec{U}) dV \quad - \quad \text{формула Гаус-Остроградског} \quad (4.50)$$

Замена редоследа диференцирања и интеграљења код запреминског интеграла (4.49) је могућа, јер је запремина  $V$  фиксна - контролна, па су границе интеграла константне, и тада важи *Лајбницово правило* диференцирања под знаком интеграла! Из релације (4.47), односно (4.48) добија се, помоћу релација (4.49) и (4.50) *једначина континуитета у интегралном облику*

$$\iiint_V \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \rho \vec{U} \right) dV = 0. \quad (4.51)$$

Контролна запремина  $V$  је потпуно произвољна па интегранд мора бити једнак нули, тако да се из (4.51) добија *једначина континуитета у диференцијалном облику*

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{U}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \vec{U} = 0. \quad (4.52)$$

Очигледна је еквивалентност, тј. идентичност израза (4.45) и (4.52). Учити различите методе помоћу којих су ове једначине добијене!

## 4.8.3 Анализа једначине континуитета

1. Физичко значење дивергенције брзине:

$$\operatorname{div} \vec{U} = \frac{1}{dV} \frac{D(dV)}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt}$$

Дивергенција брзине - *релативна издашности струјног поља!*

2. Промена густине једног флуидног делића ( $D\rho/Dt$ )

$$\underbrace{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{U} \cdot \operatorname{grad} \rho}_{\frac{D\rho}{Dt}} + \rho \operatorname{div} \vec{U} = 0. \quad (4.53)$$

Конвективни извод је коресподентан са Лангранжевим описом јер дефинише промену у правцу брзине флуидног делића.

3. Услов **нестипљивости** флуида - *једначина континуитета за нестипљив хомоген или нехомоген флуид.*

$$\frac{D\rho}{Dt} = 0 \quad \implies \quad \boxed{\operatorname{div} \vec{U} = 0} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0} \quad (4.54)$$

4. Једначина (4.53) може да се напише у облику који повезује промену густине и запремине флуидног делића

$$\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} + \frac{1}{dV} \frac{D(dV)}{Dt} = 0. \quad (4.55)$$

5. Ако у свакој тачки струјног поља  $\operatorname{div} \vec{U} = 0$  онда се анализом израза (4.53) могу извести следећи закључци:

(а)  $\frac{D\rho}{Dt} = 0$

–  $\rho = \text{const}$  у целом простору (за све флуидне делиће) → *нестипљив хомоген флуид!*

–  $\rho_i = \text{const}$ ,  $i = 1, 2, \dots, k, \dots$   $\rho_i \neq \rho_k$  → сваки флуидни делић има константу густину, али се она разликује од делића до делића → *нестипљив нехомоген флуид!*

(б)  $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{U} \cdot \operatorname{grad} \rho = 0$

ако је поље густине стационарно ( $\partial \rho / \partial t$ ) онда су вектори  $\vec{U}$  и  $\operatorname{grad} \rho$  међусобно управни. Ово је струјање нестипљивог флуида у слојевима исте (константне) густине; сви флуидни делићи једнаке константне густине распоређени су у једном слоју и густина се разликује од слоја до слоја; ово је случај струјања *стратификованог флуида.*



### 4.8.4 Увођење струјне функције

Услов *потенцијалног* струјања  $2\vec{\omega} = \text{rot}\vec{U} = 0$  испуњен је потенцијалном функцијом  $\varphi(x, y, z, t)$ , тј.  $\vec{U} = \text{grad}\varphi$ , која задовољава Лапласову диференцијалну једначину  $\Delta\varphi = 0$ .

За *раванско* и *стационарно* струјање ( $w = 0, \partial/\partial z = 0, \partial/\partial t = 0, u(x, y), v(x, y)$ ) *нестисхљивог* флуида *једначина континуитета*

$$\text{div}\vec{U} = 0 \implies \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

задовољена је **струјном функцијом**  $\psi(x, y)$

$$u = \frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial\psi}{\partial x} \tag{4.56}$$

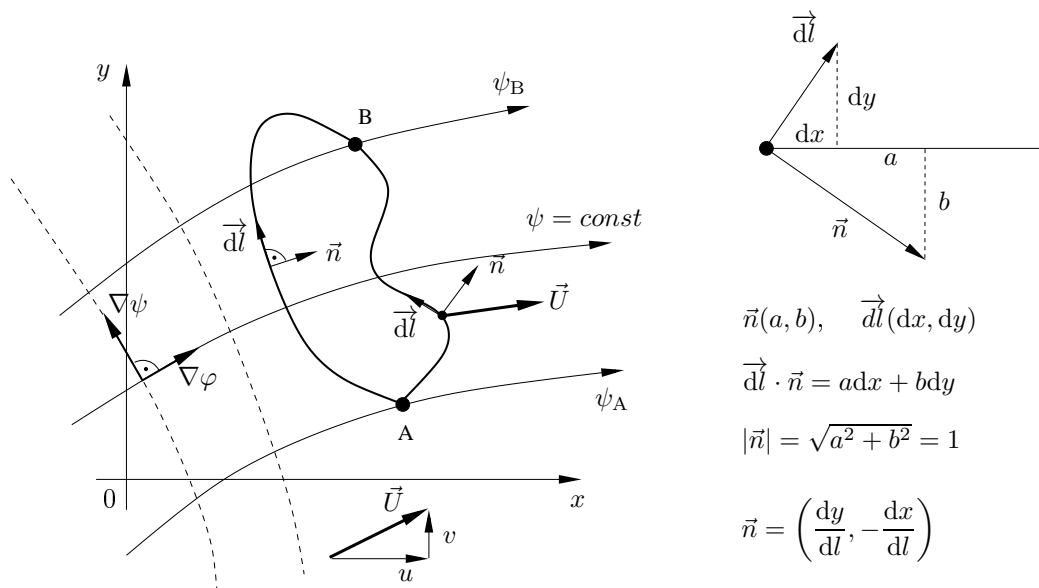
Ако је струјање и *потенцијално*, онда важе релације

$$\boxed{u = \frac{\partial\psi}{\partial y} = \frac{\partial\varphi}{\partial x}, \quad v = -\frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{\partial\varphi}{\partial y}} \tag{4.57}$$

тако да и струјна функција  $\psi$  задовољава Лапласову једначину

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = 0 \iff \boxed{\Delta\psi = 0} . \tag{4.58}$$

Једначине (4.57) се називају *Коши-Риманове* (Cauchy-Riemann) диференцијалне једначине које имају врло велику улогу у механици флуида. Њихова анализа, као и анализа аналитичких функција комплексне променљиве и комплексног потенцијала  $w(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$ , где је  $z = x + iy$  и  $i = \sqrt{-1}$  превазилазе оквире овог курса механике флуида.



**Слика 4.17.** Физичко значење струјне функције  $\psi$  у раванском струјању. *Ортогонална мрежа* струјница ( $\psi = \text{const}$ ) и *екvipотенцијалних* линија ( $\varphi = \text{const}$ ).

Потенцијал брзине  $\varphi$  и струјна функција  $\psi$  имају важна физичка својства! Овде се наводе само нека од њих, која су најзначајнија:

1. За *линије*  $\psi = \text{const}$  важи релација

$$d\psi = \frac{\partial\psi}{\partial x}dx + \frac{\partial\psi}{\partial y}dy = -vdx + udy = 0 \quad \implies \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)_{\psi=\text{const}} = \frac{v}{u}.$$

Одавде следи да су *линије*  $\psi = \text{const}$  *струјнице!* Анализирати овај резултат у складу са раније разматраном дефиницијом фамилије струјница! У том смислу је сврсисходно навести релацију

$$\vec{U} \cdot \text{grad}\psi = u \frac{\partial\psi}{\partial x} + v \frac{\partial\psi}{\partial y} = 0$$

2. За *еквипотенцијалне линије*  $\varphi = \text{const}$  такође важе релације

$$d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy = udx + vdy = 0 \quad \implies \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)_{\varphi=\text{const}} = -\frac{u}{v}.$$

Дакле, струјнице  $\psi = \text{const}$  и еквипотенцијалне линије  $\varphi = \text{const}$  представљају фамилију међусобно *ортогоналних* трајекторија, тј. формирају *ортогоналну мрежу* (сл. 4.17). Очигледно је да се до овог резултат долази и помоћу Коши-Риманових једначина (4.57) како следи (сл. 4.17)

$$\text{grad}\psi \cdot \text{grad}\varphi = \frac{\partial\psi}{\partial x} \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial y} \frac{\partial\varphi}{\partial y} = -vu + uv = 0$$

Фамилија струјница  $\psi = \text{const}$  формира *струјну слику* у равни струјања!

3. За *запремински проток*  $\dot{V}$  између две струјнице у раванском струјању између две струјнице у раванском струјању за јединичну висину у правцу осе  $Oz$  управне на струјну раван важи релације (слика 4.17)

$$\boxed{\dot{V}_{AB}} = \int_A^B \underbrace{(\vec{U} \cdot \vec{n})}_{d\dot{V}} dl = \int_A^B \left[ \frac{\partial\psi}{\partial y} dy + \left(-\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) (-dx) \right] = \int_A^B d\psi = \boxed{\psi_B - \psi_A} \quad (4.59)$$

Запремински проток не зависи од облика криве која спаја тачке А и В и једнак је разлици вредности струјне функције у овим тачкама!

#### 4.8.5 Интерпретација промене у времену интеграла физичке величине $f(\vec{r}, t)$ по материјалној запремини помоћу интеграла те физичке величине по фиксној контролној запремини (методе Лагранжа и Ојлера)

На основу анализе различитих метода при извођењу једначине континуитета, сагласно једначинама (4.43), (4.44) и (4.47) закључује се да се промене у времену материјалног интеграла може израчунати заменом редоследа интегралења и диференцирања. Тиме се промешива област  $V_m = V(t)$  замењује са фиксном облашћу  $V$ , која се у тренутку  $t$  поклапа са

промењивом облашћу  $V_m$ , (сл. 4.16а). Та промена се дефинише интегралом

$$\frac{D}{Dt} \iiint_{V_m=V(t)} \rho f dV \quad (4.60)$$

у коме је  $f = f(\vec{r}, t)$  физичка величина (скалар или вектор) сведена на јединицу масе флуида. Међутим, иако се домен интерграције, тј, запремина  $V_m$  мења у времену (границе запреминског интеграла су функције времена), *маса флуида која се налази у тој материјалној запремини је константна у сваком тренутку!* У сагласности са тим запремински интеграл (4.60) преводи се у интеграл по маси помоћу следеће релације  $\rho dV = dm$  како следи

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \iiint_{V_m=V(t)} \rho f dV &= \frac{D}{Dt} \int_{\substack{M \\ (\text{маса у } V_m)}} f dm = \int_{\substack{M \\ (\text{маса у } V_m)}} \frac{D}{Dt} (f dm) \\ &= \int_M \frac{Df}{Dt} dm = \iiint_{V_m} \rho \frac{Df}{Dt} dV. \end{aligned} \quad (4.61)$$

При извођењу релације (4.61), приликом диференцирања интеграла по маси, важи следеће:

- област интеграљења константна
- маса  $dm$  флуидног делића константна
- $f$  и  $Df/Dt$  су непрекидне функције
- Лајбницово правило - диференцирање под знаком интеграла

Резултат последњег интеграла у (4.61) се *не мења* ако се промењива област, тј. *материјална* запремина  $V_m = V_m(t)$  замени са фиксном (непокретном) облашћу, тј. *контролном* запремином  $V$  која се у тренутку  $t$  поклапа са  $V_m$  (сл. 4.16а), тако да се добија *суштински резултат*

$$\boxed{\frac{D}{Dt} \iiint_{V_m} \rho f dV = \iiint_V \rho \frac{Df}{Dt} dV} \quad (4.62)$$

Дакле, при материјалној формулацији физичких закона, тј. закона одржања масе, импулса и енергије **изводи по времену материјалних интеграла се могу заменити запреминским интегралима!**

Релација (4.62) изведена је коришћењем закона о одржању масе, тј. једначине континуитета. Свођење временске промене материјалног запреминског интеграла на запремински интеграл са фиксним границама је чисте кинематичке природе. Аналогно се, коришћењем израза (4.17) који одређује физички смисао дивергенције брзине, разматра се и следећи израз:

$$\frac{D}{Dt} \iiint_{V_m} f dV = \frac{D}{Dt} \int_M f v dm \stackrel{(4.61)}{=} \iiint_V \frac{D}{Dt} (f v) dm$$

Даље следи

$$\iiint_V \frac{D}{Dt} (f v) dm = \iiint_V \frac{Df}{Dt} dV + \iiint_V f \frac{D(dV)}{Dt} = \iiint_V \left( \frac{Df}{Dt} + f \operatorname{div} \vec{U} \right) dV.$$

Тако се добија још један **битан резултат**

$$\boxed{\frac{D}{Dt} \iiint_{V_m} f dV = \iiint_V \left( \frac{Df}{Dt} + f \operatorname{div} \vec{U} \right) dV} \quad (4.63)$$

који даје везу између промене физичких поља и материјалној ( $V_m$ ) и ( $V$ ) контролној запремини.

Релације (4.62) и (4.63) имају фундаментално физичко и математичко значење!

### Трансформација израза (4.63)

У подпоглављу 4.8.2 једначина континуитета је дата у облику (4.47) која је од изузетне важности за *примену у пракси*! Из тих разлога је корисно извршити трансформацију израз (4.63), да би се довео на аналогни облик облику (4.47), који је повољан за *директну практичну примену*. У том циљу се најпре користи дефиниција материјалног извода тако да (4.63) гласи

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \iiint_{V_m} f dV &= \iiint_V \left[ \frac{\partial f}{\partial t} + \underbrace{\vec{U} \cdot \nabla f + f \nabla \cdot \vec{U}}_{\nabla \cdot (f\vec{U})} \right] dV \\ &= \iiint_V \left[ \frac{\partial f}{\partial t} + \operatorname{div}(f\vec{U}) \right] dV = \iiint_V \left[ \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}(f u_i) \right] dV. \end{aligned} \quad (4.64)$$

Ако је  $f$  произвољно тензорско поље било ког степена, које је у  $V$  заједно са својим парцијалним изводима непрекидно, онда важи *интегрална формула Гаус-Остроградског*

$$\iiint_V \nabla f dV = \oint_A \vec{n} f dA \quad \Leftrightarrow \quad \iiint_V \frac{\partial f}{\partial x_i} dV = \oint_A n_i f dA. \quad (4.65)$$

Површ  $A$  је оријентисана гранична површ запремине  $V$ , а јединични вектор нормале  $\vec{n}$  је позитиван када је усмерен напоље. Трансформацијом интеграла по запремини у интеграл по површи сагласно формули (4.65) релација (4.64) се своди на облик

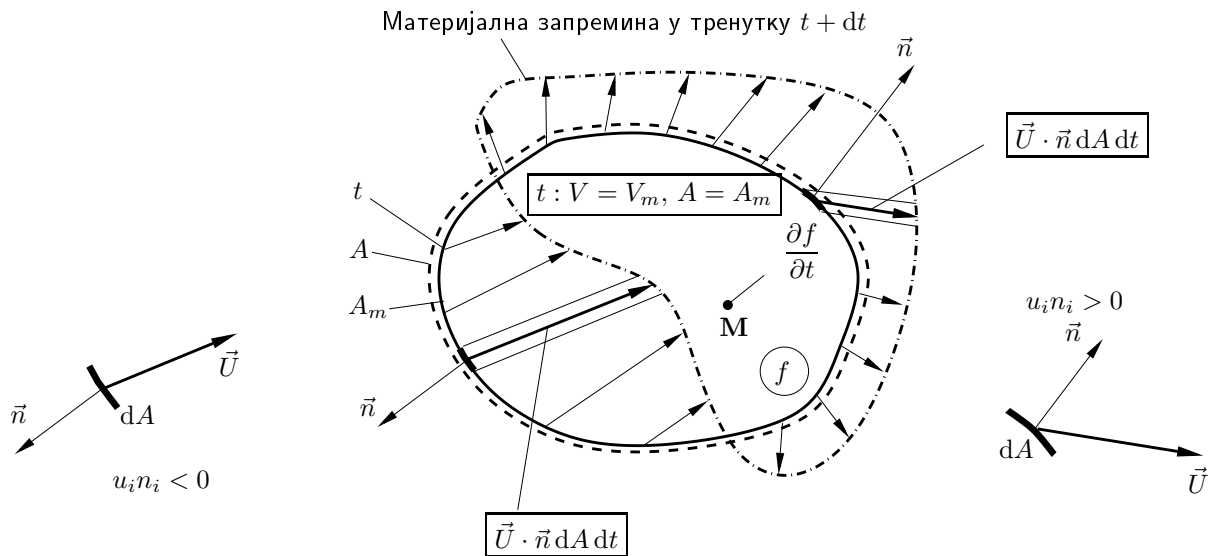
$$\boxed{\frac{D}{Dt} \iiint_{V_m} f dV = \iiint_V \frac{\partial f}{\partial t} dV + \oint_A f \vec{U} \cdot \vec{n} dA} \quad (4.66)$$

Брзина промене укупног $f$ у материјалној запремини	Локална промена укупног $f$ у контролној запремини	Конвективна промена тј. флуks укупног $f$ кроз контролну површ
Лагранж	Ојлер	

На слици 4.18 је дато тумачење и физичко значење појединих чланова који фигуришу у изразу (4.66).

Очигледно је да се сви изведени облици једначине континуитета једноставно добијају из ових израза у које треба уврстити  $f = \rho$  или  $f = 1$  у изразе (4.60)-(4.62)! Изрази (4.66)

и (4.63) су **идентични!** Они представљају први и други облик *Рејнолдс-Лајбницевог теореме преноса!* Једначина (4.66), својим физичким значењем директно повезује *Лагранжеву* и *Ојлерову методу* и даје смисао њихове примене. Ова једначина суштински представља *уопштење једначине (4.32)* којом се дефинише *материјални извод* физичке величине флуидног делића, док (4.66) обухвата све делиће који формирају материјалну запремину!



$$\iiint_V \frac{\partial f}{\partial t} dV \equiv \frac{d}{dt} \iiint_V f dV - \text{локална промена } f \text{ (промена } f \text{ током времена у } V)$$

$$\oiint_A f \vec{U} \cdot \vec{n} dA = \oiint_A f u_i n_i dA - \text{конвективни део промене } f - \text{флукс величине } f \text{ брзином флуида } \vec{U} \text{ кроз контролну површ } A$$

**Слика 4.18.** Физичко тумачење промене укупног поља физичке величине  $f(\vec{r}, t)$  у материјалној ( $V_m$ ) и контролној ( $V$ ) запремини. У тренутку  $t$  контролна запремина је једнака материјалној, а контролна површ  $A$  се поклапа са материјалном површи  $A_m$ .

Облик контролне запремине  $V$ , тј. границе система  $A$  могу да се тако изабере, да најбоље одговарају постављеном проблему и да на тај начин знатно олакшају решавање практичних задатака! Оно што је важно напоменути је да једначина (4.66) не садржи просторне изводе, чиме се њена примена знатно олакшана.

**Физички смисао теореме Гаус-Остроградског** се може добити из теореме преноса (4.63) и (4.66), а сама формула (4.65) следи из (4.63) и (4.66) када се у њих формално уврсти  $f \equiv 1$ . Образац Гауса-Остроградског изражава баланс, тј. уравнотежавање физичког поља у запремини  $V$  и на њеној граничној површи  $A$ . Ако је то поље векторско поље брзином онда формула

$$\oiint_A \vec{U} \cdot \vec{n} dA = \iiint_V \text{div} \vec{U} dV$$

повезује *флукс брзинског поља*, тј. проток флуида кроз површ  $A$  са променама унутар запремине  $V$  повезаним са *стишљивошћу флуида*, одређеној са  $\text{div} \vec{U}$  и са евентуалним постојањем извора и понора масе!

## 4.9 Закон одржања (конзервације) импулса. Једначина количине кретања - Ојлерова једначина

Применом *другог Њутновог закона механике* у механици флуида добија се закон импулса, тј. једначина количине кретања.

- **Дефиниција 1** за материјални систем, тј. масу флуида у материјалној запремини (*Лагранжев метод*)

Промена количине кретања уочене масе флуида једнака је збиру импулса свих сила које делују на ту масу, тј. промена количине кретања у времену једнака је резултујућој сили која ту промену изазива.

- **Дефиниција 2** за фиксни област простора, тј. за контролну запремину (*Ојлеров метод*)

Промена количине кретања у времену у контролној запремини =  
 $\sum$  улазних флуксева количине кретања у запремину –  
 $\sum$  излазних флуксева количине кретања у запремину +  
 $\sum$  сила које делују на масу флуида у запремини.

Еквивалентност ових дефиниција закона количине кретања математички је изражена релацијом (4.66). Промена количине кретања одређене масе флуида у времену математички је дефинисана *изводом количине кретања по времену* како следи

$$\underbrace{\frac{D}{Dt} \iiint_{V_m} \rho \vec{U} dV}_{\frac{D\vec{K}}{Dt} \propto \vec{R}_a} = \underbrace{\iiint_{V_m} \rho \vec{f} dV}_{\vec{R}_m} + \underbrace{\oint_{A_m} -p \vec{n} dA}_{\vec{R}_n \text{ (невискозан флуид)}} \quad (4.67)$$

На основу претходних разматрања могу се на десној страни једначине (4.67) временским променљиви домен интегралења, без икаквог ограничења општости, заменити фиксним (контролним, независним од времена) доменима (областима) интеграције. Применом израза (4.62) на леву страну једначине (4.67) и коришћењем израза (4.65) за трансформацију члана који дефинише површинске силе у (4.67), релација (4.67) добија облик

$$\iiint_{V_m} \left( \rho \frac{D\vec{U}}{Dt} - \rho \vec{f} + \text{grad} p \right) dV = 0 \quad (4.68)$$

Сагласно претпоставци о непрекидности подинтегралне функције (интегранда) као и произвољности области интеграције  $V$ , могуће је из *интегралног облика једначине количине кретања* (4.68) добити њен *диференцијални облик*, тј. *Ојлерову једначину динамике невискозног флуида*

$$\rho \frac{D\vec{U}}{Dt} = \rho \vec{f} - \text{grad} p \quad (4.69)$$

Скаларни облици Ојлерове једначине (4.69) у индексном запису гласе

$$\rho \frac{Du_i}{Dt} = \rho f_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} \quad \longleftrightarrow \quad \boxed{\frac{\partial}{\partial t}(\rho u_i) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_i u_j) = \rho f_i - \frac{\partial p}{\partial x_i}} \quad (4.70)$$

при чему је коришћен израз (4.32) којим се дефинише материјални извод, као и једначина континуитета

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_j)}{\partial x_j} = 0$$

За случај  $\vec{U} = 0$  једначине (4.69) и (4.70) се свде на Ојлерову једначину статике флуида!

Закону количине кретања у интегралном облику припада у техничкој примени посебно значајна улога, ако се напише у облику у коме су интегрални у (4.67) изражени помоћу површинских интеграла! То се постиже на два начина. Први је што је у пракси најчешћи случај, да се једначина количине кретања добије математичком формулацијом дефиниције 2 (Ојлеров метод). Такав приступ доводи директним путем до једначине (4.72)! Други начин је повезан са једначином (4.67), који је математичка интерпретација дефиниције 1. У том циљу се лева страна једначине (4.67) трансформише помоћу релација (4.64)-(4.66) уврштавањем у њих израза са физичку величину  $f$  у облику  $f = \rho \vec{U}$ , тако да једначина количине кретања добија облик

$$\underbrace{\iiint_V \frac{\partial(\rho \vec{U})}{\partial t} dV}_{\textcircled{1}} + \underbrace{\iint_A \rho \vec{U}(\vec{U} \cdot \vec{n}) dA}_{\textcircled{2}} = \underbrace{\iiint_V \rho \vec{f} dV}_{\textcircled{3}} - \underbrace{\iint_A p \vec{n} dA}_{\textcircled{4}} \quad (4.71)$$

① - Локална промена количине кретања - потребно познавање струјних величина у контролној запремини!

② - Конвективна промена  $\equiv$  флукс количине кретања кроз површ - овде се појављују промене само на граници (контролној површи)!

③ - Масена сила која делује на масу у запремини

④ - Површинска сила која своје дејство на масу у запремини остварује преко границе (површи)

Једначина (4.71) представља једначину количине кретања за контролну запремину  $V$  и контролну површ  $A$  и често се пише у облику који даје њено пуно физичко значење, сагласно дефиницији 2 (Ојлерова метода)

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho \vec{U} dV = - \iint_A \rho \vec{U}(\vec{U} \cdot \vec{n}) dA + \iiint_V \rho \vec{f} dV - \iint_A p \vec{n} dA} \quad (4.72)$$

I
II
III
IV

Физичко значење појединих чланова (слика 4.18)

- Ⓘ - укупна промена количине кретања у запремини  $V$
- Ⓢ - флуks (пренос) количине кретања кроз површ  $A \equiv \boxed{\text{(улаз)-(излаз)}}$  количине кретања кроз површ  $A$  у јединици времена
- ⓈⓈ - резултујућа масена сила  $\vec{R}_m$  која делује на масу флуида у запремини  $V$ .
- ⓈⓈⓈ - резултујућа површинска сила  $\vec{R}_n$  која преко површи  $A$  остварује своје дејство на масу флуида у запремини  $V$

Интеграл на левој страни једначине (4.72) не може да се преведе у интеграл по површи! Због тога једначине (4.71) и (4.72) имају поменути значај нарочито при стационарном струјању, када овај интеграл исчезават! Запремински интеграл на десним странама једначина (4.71) и (4.72) може да се изрази помоћу површинског интеграла када масене силе  $\vec{f}$  могу да се прикажу као градијент извесне скаларне функције  $\Phi$ , тј. када је  $\rho\vec{f} = \text{grad}\Phi$ . При томе је услов  $\nabla \times (\rho\vec{f}) = 0$  потребан и довољан услов за егзистенцију потенцијала  $\Phi$  масене силе! У том случају важи релација

$$\iiint_V \rho\vec{f}dV = \iiint_V \text{grad}\Phi dV = \iint_A \Phi\vec{n} dA \quad (4.73)$$

Једначина количине кретања за примену у пракси за случај стационарног струјања и  $\rho\vec{f} = \text{grad}\Phi$  има најчешће коришћен облик

$$\boxed{\iint_A \rho\vec{U}(\vec{U} \cdot \vec{n})dA = \iint_A (\Phi - p)\vec{n} dA} \quad (4.74)$$

У литератури се дефинише импулсна сила  $\vec{R}_i$  изразом

$$\vec{R}_i = - \iint_A \rho\vec{U}(\vec{U} \cdot \vec{n}) dA, \quad (4.75)$$

која је локално паралелна брзини  $\vec{U}$  и увек је усмерена ка унутрашњости контролне запремине! За практичну примену једначина количине кретања се изражава помоћу сила у врло једноставном облику

$$\boxed{\vec{R}_i + \vec{R}_m + \vec{R}_n = 0.} \quad (4.76)$$

Значај закона количине кретања је да се на основу струјних параметара на границама могу израчунати силе, тј. њихово дејство! За примену је битан сврсисходан избор контролне запремине. При томе су потребна многа знања о струјању. Непознате струјне величине у унутрашњости контролне запремине се не појављују у закону импулса, али су појаве и физичке величине на контролној површи врло значајне. Зато ове површи, тј. границе запремине треба тако бирати, да се интегрални што је могуће лакше израчунају! Важно је, да осим стационарности никакве друге претпоставке нису потребне. Нарочито је важно



напоменути, да се у ова разматрања могу укључити и струјања вискозног флуида! Губици се овде обухватају додавањем и прорачуном струјних величина на границама струјног простора, тј. на контролној површи.

За практичну примену погодан је скаларни облик једначине (4.72)

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho u_i dV = - \iint_A \rho u_i u_j n_j dA + \iiint_V \rho f_i dV - \iint_A p n_i dA, \quad (4.77)$$

који се онда лако прилагођава усвојеном Декартовом правоуглом координатном систему у коме се дефинише одговарајући проблем и контролна запремина.

Веома важно је, због разумевања међусобне повезаности диференцијалних и интегралних облика основних једначина, нагласити да се (4.77) добија интегралњем Ојлерове једначине (4.70) по контролној запремини фиксног домена у простору

$$\iiint_V \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} = - \iiint_V \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_i u_j) dV + \iiint_V \left( \rho f_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} \right) dV. \quad (4.78)$$

Применом формуле Гауса-Остроградског (4.65) на два члана десне стране једначине (4.78), једначина (4.78) се трансформише у једначину (4.77).

У Декартовим правоуглим координатама је  $\vec{U} = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k}$  тако да се  $x$  компонента векторске једначине (4.72) добија када се у (4.77) уврсти  $i = 1$  ( $u_1 = u$ ) како следи

$$\iiint_V \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} = - \iint_A \rho u (\vec{U} \cdot \vec{n}) dA + \iiint_V \rho f_x dV - \iint_A p n_x dA.$$

Аналогно се из (4.78) добија скаларни облик једначине у правцу  $x$  осе

$$\iiint_V \left[ \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho u \vec{U}) - \rho f_x + \frac{\partial p}{\partial x} \right] dV = 0$$

који се своди на диференцијалну једначину (4.70) за  $i = 1$ . Компоненте у правцима оса  $y$  и  $z$  следе на исти начин. Скаларни облици векторске једначина (4.74) у случају  $\vec{f} = 0$ , тј.  $\Phi = 0$  гласе

$$\nabla \cdot (\rho u \vec{U}) = -\frac{\partial p}{\partial x}, \quad \nabla \cdot (\rho v \vec{U}) = -\frac{\partial p}{\partial y}, \quad \nabla \cdot (\rho w \vec{U}) = -\frac{\partial p}{\partial z}.$$

## 4.10 Закон момента количине кретања

Овај закон је важан за многобројне примене, посебно у области струјних машина. Заснива се на закону количине кретања, тј. претходно одређеним силама и омогућује одређивање размењене снаге.

**Дефиниција:**

Промена у времену момента количине кретања уочене масе флуида једнака је суми момената масених и површинских сила које делују на ту масу.

Аналогно извођењу и анализи једначине количине кретања добија се израз

$$\iiint_V \frac{\partial \rho(\vec{r} \times \vec{U})}{\partial t} dV + \iint_A \rho(\vec{r} \times \vec{U})(\vec{U} \cdot \vec{n}) dA = \sum \vec{M}_{m,n} \quad (4.79)$$

у коме десна страна означава суму момената свих сила, а  $\vec{r}$  је вектор положаја. Примери најбоље илуструју важну примену једначине (4.79). Дискусија је слична као и у случају закона количине кретања.

#### 4.11 Закон одржања енергије. Једначина енергије

На потпуно аналоган начин као што су претходно разматрани биланси масе и импулса, разматра се и биланс енергије. У овом курсу механике флуида, међутим, анализа струјних проблема са коришћењем једначине енергије је елементарна. Из тих разлога се општи интегрални и диференцијални облици једначине енергије наводе ради затварања система једначина динамике невискозног флуида, а у примерима се ови општи облици своде на доста једноставније. Из закона енергије изводи се једначина енергије у механици флуида.

##### Дефиниција у смислу Лагранжа (материјална запремина - систем)

Промена енергије уочене масе флуида једнака је збиру снага свих сила које делују на ту масу и енергији коју маса размени са околином у јединици времена.

$$\frac{D}{Dt} \int_{V_m} \rho \left( e + \frac{U^2}{2} \right) dV = \iiint_V \rho \vec{f} \cdot \vec{U} dV - \iint_A p \vec{U} \cdot \vec{n} dA + \iiint_V \rho \dot{q} dV, \quad (4.80)$$

где су:  $e$  - унутрашња енергија по јединици масе;  $U^2/2$  - кинетичка енергија по јединици масе;  $\dot{q}$  - размењена енергија у јединици времена по јединици масе са околином ( $\dot{q} > 0$  - довођење,  $\dot{q} < 0$  - одвођење); два облика размене енергије: (а) размена топлоте (провођењем, зрачењем), (б) механички рад у јединици времена (снага) (механичким путем - пумпа, вентилатор, компресор, турбина и друго).

##### Дефиниција у смислу Ојлера (контролна запремина)

Промена енергије флуида у јединици времена у фиксној запремини =  
 $\sum$  флуксева енергије кроз површ (збир енергија које се непосредно преносе у јединици времена масом флуида која протиче кроз површ) +  
 $\sum$  снага свих масених сила које делују на флуид у запремини +  
 $\sum$  снага свих површинских сила које делују на флуид у запремини +  
 $\sum$  размењених енергија (топлотне, механичке)

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho \left( e + \frac{U^2}{2} \right) dV = - \iint_A \rho \left( e + \frac{U^2}{2} \right) \vec{U} \cdot \vec{n} dA + \iiint_V \rho \vec{f} \cdot \vec{U} dV - \iint_A p \vec{U} \cdot \vec{n} + \iiint_V \rho \dot{q} dV \quad (4.81)$$

Једначина (4.81) је једначина енергије у интегралном облику написана за контролну запремину. Овај облик једначине је погодан за примену у пракси. Једначина (4.81) је суштински први закон термодинамике примењен на струјање флуида.

Диференцијални облици једначине енергије изводе се из њених интегралних облика аналогним трансформацијама примењених при анализи једначине континуитета и количине кретања. На пример, превођењем површинских интеграла у запреминске у изразу (4.81) и изједначавањем интегранда са нулом добија се

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \rho \left( e + \frac{U^2}{2} \right) \right] + \nabla \cdot \left[ \rho \left( e + \frac{U^2}{2} \right) \vec{U} \right] = \rho \vec{f} \cdot \vec{U} - \nabla \cdot (p\vec{U}) + \rho \dot{q}. \quad (4.82)$$

Једначина (4.82) је парцијална диференцијална једначина која повезује промењиве величине струјног поља удатој тачки простора!

У примерима при решавању конкретних проблема користе се различити облици ових једначина са различитим претпоставкама. На пример, у пракси се често јавља случај стационарног адијабатског ( $\dot{q} = 0$ ) струјања у коме се утицај масених сила може занемарити ( $\vec{f} = 0$ ).

Диференцијални облик једначине (4.80) је, сагласно дефиницији материјалног извода, еквивалентан изразу (4.82)

$$\rho \frac{D}{Dt} \left( e + \frac{U^2}{2} \right) = \rho \vec{f} \cdot \vec{U} - \text{grad} p \cdot \vec{U} - p \text{div} \vec{U}. \quad (4.83)$$

Са једначином енергије уведена је нова зависно промењива - унутрашња енергија  $e$ !

Сада је потребно одговорити на следећа питања:

- Да ли једначине анализиране у овој глави формирају затворен систем једначина Динамике невискозног флуида?
- Шта је са почетним и граничним условима?

Одговори на та питања се дају у следећем поглављу.

## 4.12 Затворен систем једначина. Једначина стања. Почетни и гранични услови

Сагласно мапи приказаној на слици 4.1 у табели 4.2 се анализира број основних и конститутивних једначина, као и карактер и број непознатих, тј. зависно промењивих величина у циљу сагледавања проблема затварања система једначина у Динамици невискозног флуида. У ту сврху формира се табела 4.2.

У моделу флуида баротропног флуида ( $\rho = \rho(p)$ ) одређивање струјног поља се обавља потпуно одвојено, тј. независно од температурског поља! Поље температуре  $T(\vec{r}, t)$ , ако је потребно, одређује се из једначине енергије или једначине стања. У моделу флуида бароклиног флуида ( $f(p, \rho, T) = 0$ ) су брзинско и температурско поље међусобно спрегнута (куплована) поља и једначине количине кретања и енергије се морају заједно решавати!

Модел флуида	Непознате величине (зависно променљиве)	Основне једначине	Једначина стања. Конститутивне једначине.	Укупан број непознатих	Укупан број једначина
Нестишљив флуид	$\vec{U}, p$	<ul style="list-style-type: none"> <li>• једначина континуитета</li> <li>• једначина количине кретања (Ојлерова једначина)</li> </ul>	$\rho = const$ (неститшљив хомоген или нехомоген флуид)	4	4
Баротропан флуид	$\vec{U}, p, \rho$	<ul style="list-style-type: none"> <li>• једначина континуитета</li> <li>• једначина количине кретања (Ојлерова једначина)</li> </ul>	$\rho = \rho(p)$ $p/\rho = const,$ $p/\rho^\gamma = const,$ $p/\rho^\gamma = const$	5	5
Бароклин флуид	$\vec{U}, p, \rho, T$	<ul style="list-style-type: none"> <li>• једначина континуитета</li> <li>• једначина количине кретања (Ојлерова једначина)</li> <li>• једначина енергије</li> </ul>	једначина стања $f(p, \rho, T)$ за модел идеалног гаса $p = \rho RT$ ; унутрашња енергија флуида $e = c_v T$	5	5

**Табела 4.2.** Формирање затвореног, тј. кружног система једначина у Динамици невискозног флуида

За каснију анализу, биће неопходни диференцијални облик *једначине стања идеалног гаса*, тј. Клапејронове (Слареугон) једначине стања  $p = \rho RT$ , који се добија њеним логаритмовањем и диференцирањем. Она је облика

$$\frac{dp}{p} - \frac{d\rho}{\rho} - \frac{dT}{T} = 0 \quad (4.84)$$

#### 4.12.1 Почетни и гранични услови

*Конвективни део убрзања*, тј. члан  $(\vec{U} \cdot \vec{n})\vec{U}$  са својим компонентама  $u_j \partial u_i / \partial x_j$  је **извор нелинеарности једначине количине кретања**, због чега су Ојлерове једначине веома сложене за интеграцију! Јасно је да при томе морају бити и задати и задовољени одговарајући почетни и гранични услови.

- **Почетни услови:** Потребно је познавати стање кретања материјалног система, тј. поља физичких величина у почетном тренутку  $t = t_0$ , на основу чега се одређују вредности константи и тиме отклања неодређеност решења:

$$t = t_0 : f(\vec{r}, t_0) = f_0(\vec{r}), \quad f = \vec{U}, p, \rho, T, \dots \quad (4.85)$$

- **Гранични услови** су физички услови који морају бити задовољени на границама

флуида, тј. струјног поља. Ови услови су врло различити и зависе од врсте струјања, као и од природе граничних површи са којима је флуид у контакту (међудејству): унутрашња и спољашња струјања, постојање или одсуство слободне површи, стање кретања чврстих или течних (други флуид) граница (граничних површи). При овоме треба водити рачуна да се ради о *невискозном* флуиду.

• **Чврста, покретна и непорозна површ (граница) у контакту са флуидом:**

Дефиниција граничног услова: у свакој тачки границе, у сваком тренутку времена, компонента релативне брзине између флуида и чврсте површи у правцу нормале на површ мора да ишчезне:

$$\vec{U} \cdot \vec{n} = \vec{U}_A \cdot \vec{n} \quad \text{на чврстој површи!} \quad (4.86)$$

Ознаке:  $\vec{U}$  - брзина флуида,  $\vec{U}_A$  - брзина покретне површи  $A$  и  $\vec{n}$  - јединични вектор нормале површи  $A$ . Из једначине (4.86) следи да је у свакој тачки чврсте круте површи у сваком тренутку нормална компонента брзине флуида једнака нормалној компоненти брзине површи! Другим речима, нормалне компоненте брзине флуида и крутог тела, тј. чврсте површи морају имати исти правац, смер и интензитет на граничној површи, иначе би се флуид одвојио од површи  $A$  или протекао кроз њу као да је порозна (промочива, пропусна)! За струјање без одвајања од чврсте *фиксне* непорозне површи важи

$$\vec{U} \cdot \vec{n} = 0 \quad \text{на непокретној (фиксној) чврстој површи!} \quad (4.87)$$

Из (4.87) следи да је нормална компонента брзине  $U_n = \vec{U} \cdot \vec{n}$  на непокретној и непорозној чврстој површи једнака нули.

• **Коришћење појма материјалног извода за дефиницију граничних услова.**

Нека је чврста површ  $A$  у изразу (4.86), која се креће релативно у односу на флуид, задата једначином

$$F(\vec{r}, t) = 0 \quad \longrightarrow \quad \vec{n} = \pm \frac{\text{grad}F}{|\text{grad}F|}$$

где је  $F(\vec{r}, t)$  скаларна функција положаја и времена, а  $\vec{n}$  јединични вектор нормале површи  $A$ . На пример, таква површ може да буде *деформабилна чврста површ* која је фиксна или се креће кроз флуид. То може бити и *крута чврста површ* која се *креће* у флуиду. Сада се гранични услов (4.86) дефинише условом

$$\vec{U} \cdot \text{grad}F = \vec{U}_A \cdot \text{grad}F \quad \text{на површи } F(\vec{r}, t) = 0 \quad (4.88)$$

Фиктивни чврсти делићи непрекидно формирају чврсту површ па својим координатама  $x_i(t)$  (Лагранж!) задовољавају једначину граничне површи  $F[x(t), y(t), z(t), t] = 0$  у сваком тренутку. Пошто је укупна (тотална) промена функције  $F$  једнака нули

( $dF/dt = 0$ ) и како је  $dx_i/dt = u_{A,i}$  добија се ( $\vec{U}_A(u_A, v_A, w_A)$ )

$$\frac{\partial F}{\partial t} + u_A \frac{\partial F}{\partial x} + v_A \frac{\partial F}{\partial y} + w_A \frac{\partial F}{\partial z} = 0 \quad \longleftrightarrow \quad \vec{U}_A \cdot \text{grad}F = -\frac{\partial F}{\partial t}. \quad (4.89)$$

Користећи ову релацију, гранични услов (4.88) изражава се у облику

$$\frac{DF}{Dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \vec{U} \cdot \text{grad}F = 0 \quad \text{на површи } F(\vec{r}, t) = 0. \quad (4.90)$$

Ако је граница формирана *фиксном* крутом чврстом површи задатој једначином  $F(\vec{r}) = 0$  онда се услов (4.90) редукује на

$$\vec{U} \cdot \text{grad}F = 0 \quad \text{на граничној површи } F(\vec{r}) = 0, \quad (4.91)$$

што је еквивалентно граничном услову (4.87). Ови гранични услови су кинематичке природе, па се поставља питање шта је са *тангентном компонентом брзине*? У случају *невискозног* флуида за њу **не постоји** а ригорозни физички услов. За њу се обично претпоставља она вредност која је сагласна са решењем струјања са одговарајућим условима. Наиме, овде нема "лепљења" флуида за зид, па из услова да је нормална компонента једнака нули, следи да је вектор брзине  $\vec{U}$  у правцу тангенте на граничну површ, која се тада може сматрати струјном површи, тј. струјницом. Флуидни делић се клиза и котрља (ако је  $\vec{\omega} = 0$ ) дуж контуре тела, тј. површи  $A$ ! Дакле, *свака струјница може да се замени контуром чврстог тела!* У случају *вискозног* флуида, међутим, вискозност и релативну тангенцијалну брзину између флуида и границе своди на нулу! О томе ће бити речи у Динамици вискозног флуида.

- **Гранични услови на слободној површи.** Сви ови кинематички услови су испуњени ако је гранична површ  $A$  *слободна површ* флуида задата једначином  $F(\vec{r}, t) = 0$  или  $F(\vec{r}) = 0$ . Појављује се, међутим, додатни *динамички услов* који мора да буде задовољен. Наиме, *притисак* у тачкама граничне слободне површи мора бити *једнак атмосферском притиску!* У многим случајевима притисак на граници је или константан, или је функција просторно-временске тачке.

### 4.13 ЗАКЉУЧАК. Основне једначине динамике невискозног стишљивог флуида

Једначина континуитета:

$$\frac{d}{dt} \iiint_V \rho dV + \iint_A \rho \vec{U} \cdot \vec{n} dA = 0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{U}) = 0$$

Једначина количине кретања  $\Leftrightarrow$  Ојлерова једначина:

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho \vec{U} dV = - \iint_A \rho \vec{U} (\vec{U} \cdot \vec{n}) dA + \iiint_V \rho \vec{f} dV - \iint_A p \vec{n} dA$$

$$\rho \frac{Du}{Dt} = \rho F_x - \frac{\partial p}{\partial x}, \quad \rho \frac{Dv}{Dt} = \rho F_y - \frac{\partial p}{\partial y}, \quad \rho \frac{Dw}{Dt} = \rho F_z - \frac{\partial p}{\partial z}$$

Једначина енергије:

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho \left( e + \frac{U^2}{2} \right) dV = - \iint_A \rho \left( e + \frac{U^2}{2} \right) \vec{U} \cdot \vec{n} dA + \iiint_V \rho \vec{f} \cdot \vec{U} dV - \iint_A p \vec{U} \cdot \vec{n} + \iiint_V \rho \dot{q} dV$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \rho \left( e + \frac{U^2}{2} \right) \right] + \nabla \cdot \left[ \rho \left( e + \frac{U^2}{2} \right) \vec{U} \right] = \rho \vec{f} \cdot \vec{U} - \nabla \cdot (p \vec{U}) + \rho \dot{q}$$

Унутрашња енергија (идеални гас):

$$e = c_v T$$

Једначина стања (модел идеалног гаса):

$$p = \rho R T$$

Ако је струјање стационарно ( $\partial()/\partial t = 0$ ) и адијабатско ( $\dot{q} = 0$ ) и ако се утицај масених сила може занемарити ( $\vec{f} = 0$ ) онда се једначине (4.13) и (4.13) могу заменити једначином

$$h_0 = h + \frac{U^2}{2} = const \quad (4.92)$$

при чему су

- $h = e + \frac{p}{\rho}$  (енталпија)
- $h_0$  (тотална енталпија)
- За идеалан гас важе следеће релације:

$$e = c_v T \quad h = c_p T \quad c_v = \frac{R}{\kappa - 1} \quad c_p = \frac{\kappa R}{\kappa - 1} \quad \kappa = \frac{c_p}{c_v}$$

У поглављима која следе, сагласно дидактичко-педагошкој мапи за Динамику невискозног флуида приказаној на слици 4.1 изведене једначине се решавају, упрошћавају и примењују при решавању различитих практичних проблема.

## 4.14 Бернулијева једначина

Ојлерова једначина (4.69) се, под одређеним условима може интегралити. Један од најважнијих интеграла Ојлерево једначине је Бернулијев интеграл. Пре извођења Бернулијевог интеграла, потребно је дефинисати следеће:

- Сила  $\vec{f}$  је конзервативна ако зависи само од положаја -  $\vec{f} = \vec{f}(\vec{r})$  и ако је  $\text{rot } \vec{f} = 0$ . Тада се векторско поље силе може изразити као  $\vec{f} = \text{grad } \Phi_f$  где је  $\Phi_f = \Phi_f(\vec{r})$  функција силе.
- Скаларна функција, тј. скалар  $G = -\Phi_f$  је потенцијал силе или потенцијална енергија. Важе следеће релације:

$$\text{rot } \vec{f} = 0 \quad \rightarrow \quad \vec{f} = \text{grad } \Phi_f = -\text{grad } G \quad \leftrightarrow \quad \text{конзервативна сила}$$

- У случају да је флуид баротропан,  $\rho = \rho(p)$ , може се показати да важи следеће

$$\rho = \rho(p) \quad \rightarrow \quad \frac{1}{\rho} \text{grad } p = \text{grad } \int \frac{dp}{\rho}$$

- За нестишљив и хомоген флуид дефинише се генерализани притисак  $p_G$  како следи

$$p_G = p - \rho \Phi_f \quad \text{за нестишљив хомоген флуид } (\rho = const)$$



Бернулијев трочлани израз  $B$  дефинисан релацијом

$$B \equiv \frac{U^2}{2} - \Phi_f + \int \frac{dp}{\rho(p)} \equiv \frac{U^2}{2} + G + \int \frac{dp}{\rho(p)} \quad (4.93)$$

има смисао **укупне механичке енергије** јединичне масе флуида у датој тачки. Заиста, величина  $U^2/2 \equiv \vec{U} \cdot \vec{U}/2$  представља *кинетичку енергију* срачунату за јединицу масе, а члан  $-\Phi_f = G$  означава *потенцијалну енергију*, где је  $G$  *потенцијал* масене силе  $\vec{f}$ . Величина  $\int (dp/\rho)$ , која представља функцију притиска, има *физички смисао потенцијала* (*потенцијалне енергије*) *запреминског дејства сила притиска*, тј. *дејства сила притиска на јединицу масе флуида*. Заиста, члан  $\rho^{-1} \text{grad} p$  изражава главни (резултујући) вектор сила притиска у датој тачки за јединичну масу флуида или вектор *запреминског дејства тих сила*, тако да у изразу  $\text{grad}[\int (dp/\rho)]$  величина под знаком градијента  $\int (dp/\rho)$  представља *потенцијал тог дејства*. Овде је, због правилног физичком тумачења, потребно рећи да појам потенцијала или потенцијалне енергије **не постоји** за скаларна поља, којима припада и поље притиска.

#### 4.14.1 Бернулијев интеграл Ојлерове једначине

Ојлерова диференцијална једначина (4.69) се може коришћењем израза (4.38) за трансформацију конвективног члана убрзања, као и дефиниције вртлозности (4.23) написати у такозваном *Громеко-Ламбовом облику* као

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \frac{1}{2} \text{grad} U^2 - 2\vec{U} \times \vec{\omega} = \rho \vec{f} - \frac{1}{\rho} \text{grad} p \quad (4.94)$$

У трансформисани облик Ојлерове једначине (4.94) уврштавају се следеће, Бернулијеве претпоставке

- струјање је стационарно,  $\partial/\partial t = 0$
- флуид је баротропан,  $\rho = \rho(p)$
- поље масених сила је конзервативно,  $\vec{f} = \text{grad} \Phi_f$

Увођењем ових претпоставки добија се трансформисани облик Ојлерове једначине

$$\text{grad} \left( \frac{U^2}{2} - \Phi_f + \int \frac{dp}{\rho} \right) = 2\vec{U} \times \vec{\omega}. \quad (4.95)$$

Множењем једначине (4.95) са јединичним вектором  $\vec{s}$  који је усмерен дуж струјнице у свакој тачки струјног поља, уз дефиницију (4.93), израз (4.95) се даље трансформише

$$\text{grad} B \cdot \vec{s} = 2\vec{s} \cdot (\vec{U} \times \vec{\omega}) \Leftrightarrow \text{grad} B \cdot \vec{s} = 2\vec{\omega} \cdot (\vec{U} \times \vec{s}) \Leftrightarrow \text{grad} B \cdot \vec{s} = 0, \quad (4.96)$$

јер су вектори  $\vec{U}$  и  $\vec{s} = \vec{U}/|\vec{U}|$  колинеарни, па је њихов векторски производ је једнак нули.

Скаларни производ  $\text{grad} B \cdot \vec{s}$  представља пројекцију вектора градијента Бернулијевог трочлана (скаларне функције) на правац струјнице, и физички тај скаларни производ пред-

ставља промену функције  $B$  у правцу струјнице!

$$\text{grad}B \cdot \vec{s} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial B}{\partial x}s_x + \frac{\partial B}{\partial y}s_y + \frac{\partial B}{\partial z}s_z = 0 \Leftrightarrow d_s B = 0 \quad (4.97)$$

Како је тај скаларни производ једнак нули, значи да се вредност Бернулијевог трочлана не мења дуж струјнице, тј.

$$B \equiv \frac{U^2}{2} + G + \int \frac{dp}{\rho(p)} = C_B(\psi) \quad (\text{const дуж струјнице } \psi = \text{const}) \quad (4.98)$$

Константа  $C_B(\psi)$  има исту вредност дуж једне струјнице ( $\psi = \text{const}$ ), али та вредност може, а и не мора да се мења од струјнице до струјнице. Такође, важно је напоменути да је Бернулијевом интегралу (4.98) задржана вртложност, тј. да он важи и за вртложна струјања ( $\vec{\omega} \neq 0$ )!

#### Бернулијева теорема:

При стационарном струјању невискозног баротропног флуида у пољу конзервативних масених сила **збир** кинетичке енергије флуида по јединици масе, потенцијала масених сила по јединици масе и функције притиска, тј. потенцијала запреминског дејства површинских сила се **не мења**, тј. има сталну вредност дуж струјнице, а са тим и у свим тачкама трајекторије флуидног делића, јер се у стационарном струјању трајекторије и струјнице поклапају.

#### 4.14.2 Анализа Бернулијеве теореме у случајевима једноставнијих баротропних процеса

##### Случај нестишљивог флуида у пољу силе Земљине теже

У случају нестишљивог флуида који се креће у пољу силе Земљине теже, ако је вертикална оса  $z$  усмерена навише, тако да је  $\vec{g} = -g\vec{k}$ , онда је  $\Phi_f = -gz$ , односно  $G = gz$ . У том случају Бернулијева једначина се своди на

$$\frac{U^2}{2} + gz + \frac{p}{\rho} = C_B(\psi) \quad (4.99)$$

Израз (4.99) написан у облику

$$\frac{U^2}{2g} + z + \frac{p}{\rho g} = \text{const. дуж струјнице,}$$

где први члан на левој страни једначине представља брзинску, други геодезијску, а трећи пијезометарску висину представља основну једначину у класичној хидраулици. У том смислу, класична формулација теореме Бернулија гласи:

У стационарном струјању невискозне нестишљиве течности у пољу силе Земљине теже хидрауличка висина која је једнака суми брзинске, геодезијске и пијезометријске висине, има сталну вредност дуж струјнице, трајекторије или вртложне линије.

Даље се може закључити и следеће: у стационарном струјању је сагласно (4.95), такође

$$\vec{\omega} \cdot \text{grad} B \equiv \omega \left( \frac{\vec{\omega}}{\omega} \cdot \nabla \right) B = \omega \frac{dB}{dl} = 0,$$

где  $d()/dl$  означава диференцирање дуж лука криве вртложне линије ( $\vec{\omega} \times \vec{dl} = 0$ ), тако да важи  $B = \text{const}$  дуж вртложне линије. Дакле, у стационарном струјању вектор  $\vec{\omega} \times \vec{U}$  формира потенцијално векторско поље са потенцијалом  $B$ !

Коначно, облик Бернулијеве једначине

$$p + \rho \frac{U^2}{2} = \text{const} \quad (4.100)$$

који следи из (4.99) када је  $z = \text{const}$ , или када утицај масених сила може да се занемари у поређењу са површинским силама, односно притиском, биће анализиран у поглављима која следе у вези са појмом притиска.

**Случај када је у свим тачкама струјног простора задовољен услов  $\vec{U} \times \vec{\omega} = 0$ .**

У стационарном струјању, сагласно једначинама (4.98) и (4.99) је  $\nabla B = 0$ , одакле следи једначина (4.101)

$$\left. \begin{array}{l} \text{(а) } \vec{\omega} = 0 \\ \text{(б) } \vec{\omega} \parallel \vec{U} \end{array} \right\} \rightarrow \frac{U^2}{2} + G + \int \frac{dp}{\rho} = C_B^* = \text{const} \text{ у свом простору испуњеном флуидом} \quad (4.101)$$

Услов паралелности  $\vec{U} \parallel \vec{\omega} \rightarrow$  вртложне линије се поклапају са струјницама  $\rightarrow$  спирално кретање  $\rightarrow$  струјање у пољу слободних вртлога који се одвајају на површима крила коначних димензија.

**Облици Бернулијевог интеграла за изотермска и адијабатска струјања**

У случају струјања стишљивог флуида (углавном гасова), изузимајући струјања у атмосфери, може да се занемари утицај масених сила па се из једначине (4.98) добија облик Бернулијеве једначине за ту класу струјања:

$$\boxed{\frac{U^2}{2} + \int \frac{dp}{\rho} = C_B(\psi)} \quad (4.102)$$

Једначина (4.102) ће сада бити анализирана за два случаја струјања идеалног гаса: изотермског и адијабатског случаја.

(а) Изотермско струјање ( $T = const$ ,  $p/\rho = const$ ,  $p/p_1 = \rho/\rho_1$ ) (сл. 4.20)

$$\frac{U^2}{2} + \frac{p_1}{\rho_1} \ln \frac{p}{p_1} = \frac{U^2}{2} + \frac{p_1}{\rho_1} \ln \frac{\rho}{\rho_1} = const \quad (4.103)$$

(б) Адијабатско струјање [ $p/p_1 = (\rho/\rho_1)^\kappa$ ,  $\rho/\rho_1 = (p/p_1)^{1/\kappa}$ ] (сл. 4.20)

$$\begin{aligned} \frac{U^2}{2} - \frac{\kappa}{\kappa-1} \frac{p_1}{\rho_1} \left[ 1 - \left( \frac{p}{p_1} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \right] &= const; \\ \frac{U^2}{2} - \frac{\kappa}{\kappa-1} \frac{p_1}{\rho_1} \left[ 1 - \left( \frac{\rho}{\rho_1} \right)^{\kappa-1} \right] &= const; \\ \frac{U^2 - U_1^2}{2} + \frac{\kappa}{\kappa-1} \left( \frac{p}{\rho} - \frac{p_1}{\rho_1} \right) &= 0. \end{aligned} \quad (4.104)$$

Индекс 1 се односи на било коју произвољно изабрану тачку на струјници, трајекторији или вртложној линији.

## 4.15 Примене Бернулијеве једначине

### 4.15.1 Извођење Бернулијеве једначине помоћу израза (4.41) за убрзање у природним координатама ( $s, n$ )

Ојлерова једначина је дата изразом (4.69). Уврштавањем релације (4.41) у (4.69) и скаларним множењем са вектором брзине  $\vec{U} = U\vec{s}$  добијају се релације како следи

$$\begin{aligned} \frac{D\vec{U}}{Dt} = \vec{f} - \frac{1}{\rho} \text{grad} p \rightarrow \frac{DU}{Dt} \vec{s} + \frac{U^2}{R} \vec{n} &= \text{grad} \left( \Phi_F - \int \frac{dp}{\rho} \right) / \cdot \vec{U} = U\vec{s} \\ U \frac{DU}{Dt} &= \vec{U} \cdot \text{grad} \left( \Phi_F - \int \frac{dp}{\rho} \right). \end{aligned}$$

Десна страна једначине се изражава помоћу материјалног извода

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \left( \frac{\vec{U} \cdot \vec{U}}{2} \right) &= \frac{D}{Dt} \left( \Phi_F - \int \frac{dp}{\rho} \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left( \Phi_F - \int \frac{dp}{\rho} \right) \\ \frac{D}{Dt} \left( \frac{U^2}{2} - \Phi_F + \int \frac{dp}{\rho} \right) &= - \frac{\partial}{\partial t} \left( \Phi_F - \int \frac{dp}{\rho} \right) \end{aligned} \quad (4.105)$$

Ако је струјање стационарно, онда следи

$$\frac{\partial(\ )}{\partial t} = 0 \rightarrow \frac{D}{Dt} \left( \frac{U^2}{2} - \Phi_F + \int \frac{dp}{\rho} \right) = 0$$

$$\boxed{\frac{U^2}{2} - \Phi_F + \int \frac{dp}{\rho} = const \text{ дуж трајекторије и струјнице}} \quad (4.106)$$

### 4.15.2 Бернулијева једначина за нестационарно струјање. Промена притиска у правцу управном на струјнице

Сврхисходно је Ојлерове једначине написати у природним координатама  $(s, n)$ . У том циљу се израз за убрзање (4.41) уврштава у Ојлерову једначину (4.69) тако да се сагласно ознакама на слици 4.14, добијају после скаларног множења са јединичним векторима  $\vec{s}$  и  $\vec{n}$  следеће једначине

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial s} = F_s - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} \quad (4.107)$$

$$\frac{U^2}{R} = f_n - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial n} \quad (4.108)$$

у којима су:  $f_s = -g \partial z / \partial s$  и  $f_n = -g \partial z / \partial n$ , за  $f = \vec{g}$  и осу  $z$  усмерену вертикално навише. Једначина (4.107) може да се интегрални дуж струјнице при чему константа зависи од координате  $n$  у правцу нормале на струјницу, тј. мења се, у општем случају, од струјнице до струјнице. Разумљиво је да је резултат те интеграције, за случај *стационарног* струјања Бернулијев интеграл (4.106) у коме је  $\Phi_f = -gz$ .

За нестационарно струјање нестишљивог флуида интеграње једначине (4.107) дуж струјнице од тачке 1 до тачке 2 даје израз

$$\rho \int_1^2 \frac{\partial U(s, t)}{\partial t} ds + p_2 + \frac{1}{2} \rho U_2^2 + \rho g z_2 = p_1 + \frac{1}{2} \rho U_1^2 + \rho g z_1 \quad (4.109)$$

који приказује Бернулијеву једначину нестационарног струјања нестишљивог флуида. За техничку праксу су интересантни случајеви када је  $U = U(t)$ , тј. када брзина не зависи од  $s$ . Тада је  $U_1 = U_2$  и  $\rho \int_1^2 (\partial U / \partial t) ds = \rho l dU / dt$ , где је  $l = s_2 - s_1$ .

Једначина (4.108) одређује промену притиска у правцу управном на струјнице. Ова једначина може да се интегрални ако су познате зависности величина  $U$  и  $R$  од променљиве  $n$ . Када се занемари утицај масених сила једначина добија облик:

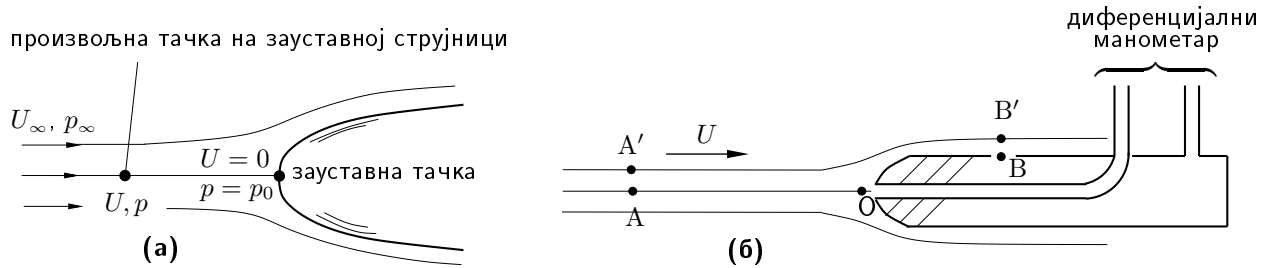
$$\left[ \frac{\partial p}{\partial n} = -\rho \frac{U^2}{R} \right], \quad (4.110)$$

где је  $R$  полупречник кривине струјнице (сл. 4.14). Из (4.110) следи да **притисак расте у радијалном правцу** од центра кривине напоље, тј. супротно смеру нормале  $\vec{n}$  (сл. 4.14). Овај пораст притиска је у равнотежи са центрифугалном силом, тј. постоји равнотежа сила у правцу управном на струјницу! Из (4.110) следи да **притисак расте у радијалном правцу** од центра кривине напоље, тј. супротно смеру нормале  $\vec{n}$  (сл. 4.14). Овај пораст притиска је у равнотежи са центрифугалном силом, тј. постоји равнотежа сила у правцу управном на струјницу! Код *праволинијских* струјница је  $R = \infty$  и из (4.110) следи  $\partial p / \partial n = 0$ , тј. **притисак се не мења** у правцу управном на струјнице. Дакле, у једном паралелном струјању, тј. у праволинијској паралелној струји свуда влада **исти притисак**. Ако при томе брзина на различитим струјницама имају различите вредности, онда је очигледно да и константа  $C_B$  мора да има различите вредности на тим струјницама, јер је на свима њима притисак исти!

### 4.15.3 Динамички и тотални притисак. Мерење притиска. Питове и Пито-Прантлове сонде

Бернулијева једначина за струјање *нестипљивог* флуида у пољу силе Земљине теже дата је изразом (4.99), односно записана у јединицама притиска

$$\rho \frac{U^2}{2} + \rho g z + p = C_B(\psi)$$



**Слика 4.19.** (а) Опструјавање тела. Појам притиска. (б) Принцип Пито-Прантлове сонде (динамички притисак) (H. Pitot, 1695-1771; L. Prantl, 1875-1953). Бернулијева једначина је примењена дуж струјнице А'В'.

У многим струјањима у техничкој пракси је или  $z = const$  или висинске разлике у струјном пољу не играју неку већу улогу. Тада је разлика притисака у различитим тачкама једне струјнице одређена разликама брзина у тим тачкама. У том случају може да се користи једноставан облик *Бернулијеве једначине*

$$\boxed{p + \rho \frac{U^2}{2} = C_B} \quad (4.111)$$

која повезује притисак и брзину у свакој тачки струјног поља. Константа  $C_B$  се одређује помоћу погодних референтних вредности на свакој струјници. Дуж струјнице која пролази кроз *зауоставну тачку* ( $U = 0$ ) важи Бернулијева једначина (сл. 4.19а)

$$p_\infty + \frac{1}{2}\rho U_\infty^2 = p + \frac{1}{2}\rho U^2 = p_0 \quad (4.112)$$

где су:

- $p$  - струјни (статички) притисак ( $p = p_s$ )
- $\frac{1}{2}\rho U^2$  - динамички притисак ( $p_{dyn} = p_d$ )
- $p_0$  - тотални (укупни, зауоставни) притисак ( $p_0 = p_{tot} = p_{zaust}$ )

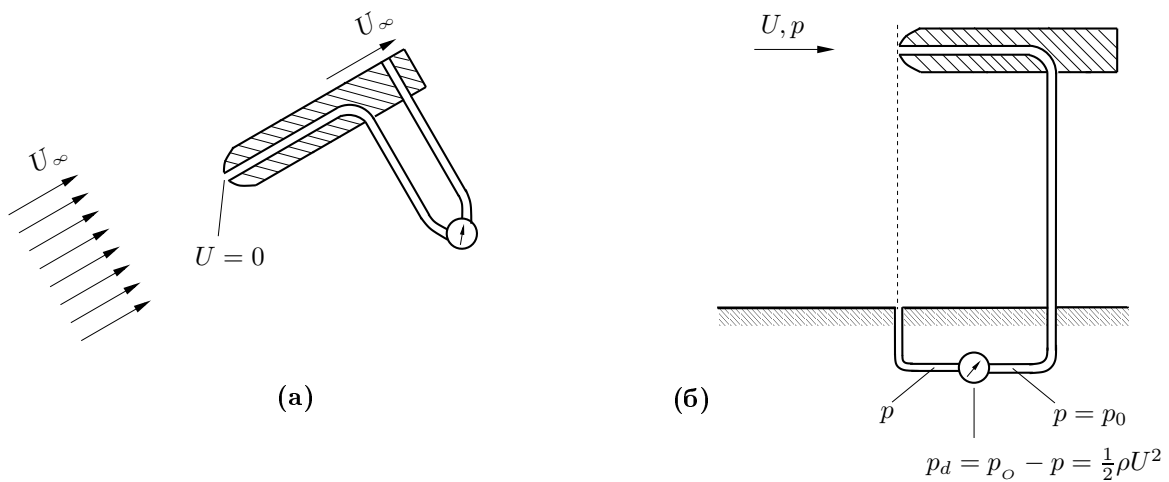
Примене *Бернулијеве једначине* дуж одговарајућих струјница дају следеће релације (сл. 4.19(б)):

$$\begin{aligned} \text{Струјница АО :} & \quad p_A + \frac{1}{2}\rho U^2 = p_0 \\ \text{Струјница А'В' :} & \quad p_{A'} + \frac{1}{2}\rho U^2 = p_{B'} + \frac{1}{2}\rho U_{B'}^2 = p_B + \frac{1}{2}\rho U^2 \end{aligned}$$

Тачка  $B'$  је тачно на вертикали у односу на тачку  $B$  и обично ван граничног слоја. У њему се притисак у правцу управном на правац струјања практично не мења па је  $p_B = p_{B'}$ . Тачке  $A$  и  $A'$  су врло блиске, а тачка  $O$  је зауставна тачка (Питова сонда), тако да се из горњих једначина добија

$$\underbrace{p_0 - p_B}_{p_{dyn}} = \frac{\rho}{2} U^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{U = \sqrt{\frac{2p_{dyn}}{\rho}}} \quad (4.113)$$

Са Пито-Прантловом сондом може да се одреди брзина  $U$  мерењем динамичког притиска  $p_{dyn}$ . У изразу (4.113) треба уочити да постоји **нелинеарна** зависност између  $p_{dyn}$  и  $U$ !



**Слика 4.20.** (а) Мерење брзине  $U_\infty$  хомогеном паралелног струјања Пито-Прантловом цеви; (б) Отвор у зиду показује статички (струјни) притисак. Из показивања диференцијалног манометра одређује се брзина струјања  $U$ .

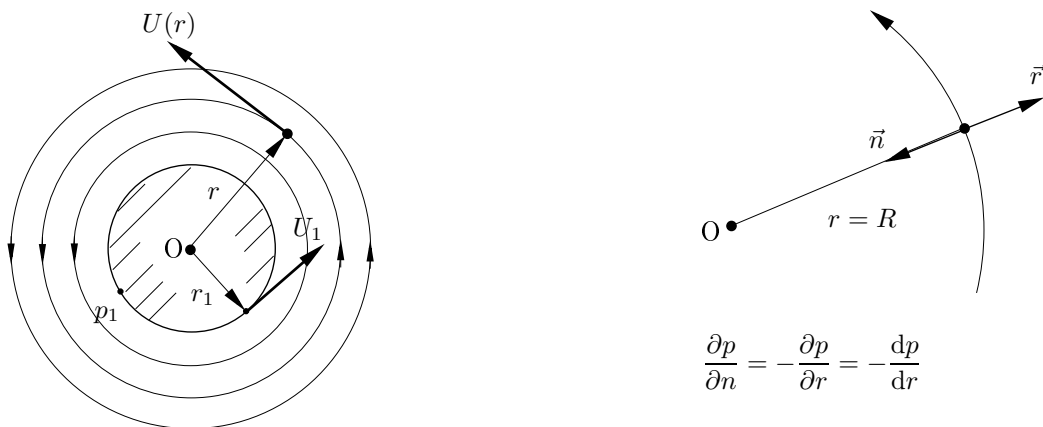
### Кавитација

Из Бернулијеве једначине следи да је притисак у флуиду најмањи када је брзина струјања највећа. Из (4.112) следи:  $p = 0 \rightarrow U = U_{max} = (U_\infty + 2p_\infty/\rho)^{1/2}$ .

У цеви промењивог попречног пресека, на пример у *Вентуријевој цеви*, је могуће да се у најужем пресеку где је брзина струјања највећа, сагласно једначини континуитета, притисак толико смањи (Бернулијева једначина), да на температури која влада настане кључање течности уз настајање и издвајање мехурова паре. Ова појава доводи до *кавитације* и *двофазног струјања*! До исте појаве може да дође и на површи брзо ротирајућих лопатица хидрауличних машина. Мехурови паре ношени струјом флуида доспевају у област повећаног притиска који изазива њихово кондензовање. Ово доводи до интензивне ерозије материјала, вибрације постројења и буке. Кавитација је, дакле, непожељна појава, коју је потребно избећи и спречити! О овоме ће бити више говора у глави 5 у оквиру прорачуна цевовода спрегнутог са пумпом.

#### 4.15.4 Кретање флуидног делића по концентричним кружним трајекторијама (вртлог). Расподеле брзине и притиска у вртлогу

У природи и техници велики значај има проучавање *вихорног струјања*. Теоријски модел се формира када се аксијалном струјању суперпонира Ранкинов вртлог, тј. принудно-поренцијални вртлог (сл. 4.11). У овом проблему разматра се раванско струјање флуида густине  $\rho$  са струјницама у облику концентричних кружница (сл. 4.21).



Слика 4.21. Расподеле брзине и притиска у вртлогу.

Утицај масених сила се занемарује и пошто је струјање осносиметрично (ротационосиметрично) онда све величине зависе само од радијалне координате  $r$ , а не и од поларне координате  $\varphi$ . Независност од координате  $z$  је последица раванског струјања. Обимна брзина је укупна резултујућа брзина  $U$  чија се расподела у општем случају задаје степеном функцијом

$$U(r) = k r^m = U_1 \left( \frac{r}{r_1} \right)^m \quad (4.114)$$

у којој  $r$  означава радијалну координату. Величине  $U_1$  и  $r_1$  и експонент  $m$  су константе (сл. 4.21), при чему је  $U_1$  брзина на растојању  $r_1$  од центра. Дакле, величине  $U_1$ ,  $p_1$ ,  $r_1$ ,  $\rho$  и  $m$  су у овом проблему познате. Анализираће се скуп решења која дефинишу расподелу брзине и притиска за различите **вредности параметра  $m$** , које одређују **тип вртлога!**

Применом једначине (4.110) следе релације (сл. 4.21)

$$\frac{\partial p}{\partial n} = -\rho \frac{U^2}{R} \quad \rightarrow \quad \frac{dp}{dr} = \rho \frac{U^2}{r}. \quad (4.115)$$

Интеграљењем израза (4.115) помоћу (4.114) и коришћењем граничног услова  $p(r_1) = p_1$  добија се:

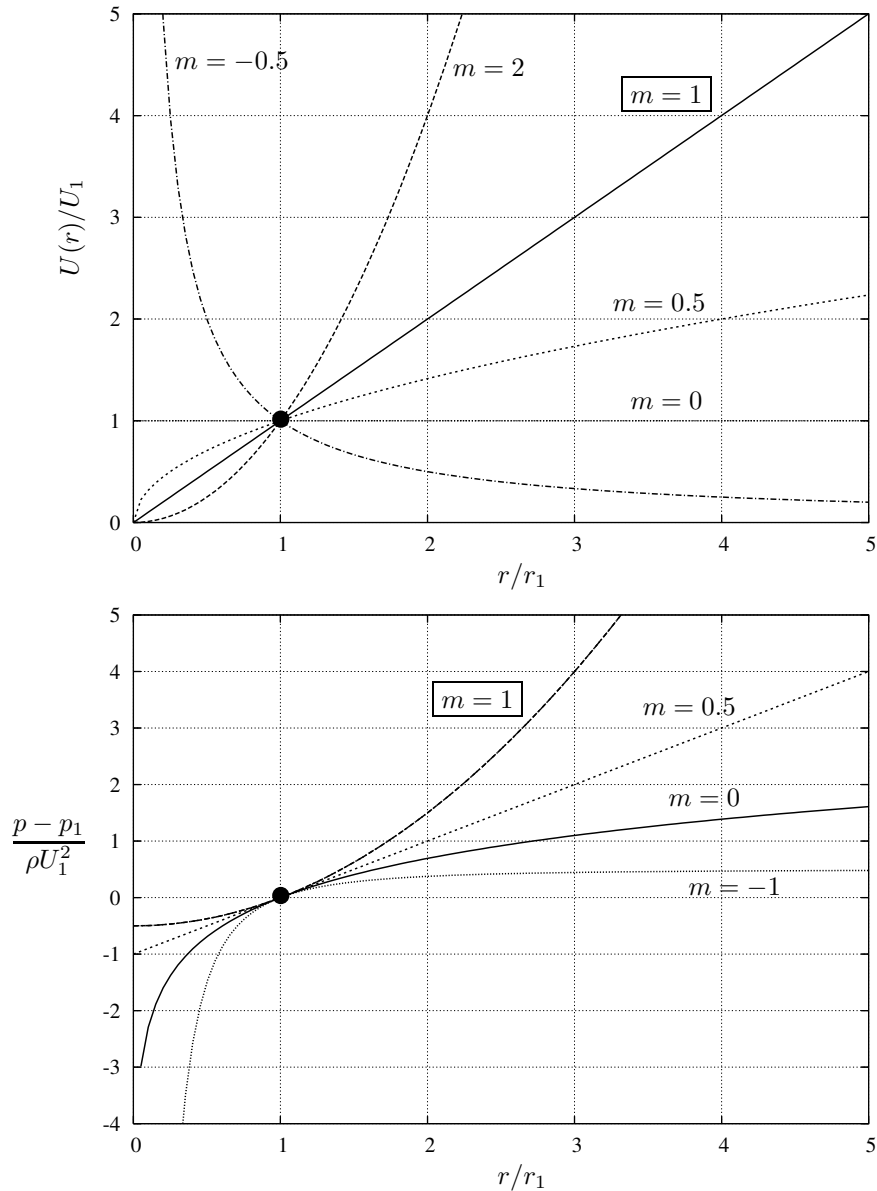
$$p - p_1 = \frac{\rho U_1^2}{2m} \left[ \left( \frac{r}{r_1} \right)^{2m} - 1 \right], \quad \text{за } m \neq 0 \quad (4.116)$$

$$p - p_1 = \rho U_1^2 \ln \left( \frac{r}{r_1} \right), \quad \text{за } m = 0 \quad (4.117)$$

На слици 4.22 су за различите вредности експонента  $m$  приказане расподеле брзине и



притиска у зависности од расподеле брзине и притиска у зависности од растојање  $r$  од осе. Посебно физичко значење имају вредности експонента  $m = 1$  ( $U \propto R$ : ротација крутог тела - принудни вртлог) и  $m = -1$  ( $U \propto 1/r$ : потенцијални вртлог).



**Слика 4.22.** Расподеле брзине и притиска у принудно-потенцијалном и другим вртлозима. Нарочито важе вредности експонента  $m$  су:  $m = 1$ : принудни вртлог (ротација крутог тела);  $m = -1$ : потенцијални (слободни) вртлог.

Оба вртлога као и њихова комбинација, тј. Ранкинов вртлог (сл. 4.11) се више или мање добро реализују и настају у многобројним струјањима, тзв. *вихорним струјањима* присутним у природи и техници. У техничкој пракси се различитим уређајима (аксијалним вентилаторима, лопатицама радијалног спроводног апарата и слично) остварују различите вредности експонента  $m$ , којима одговарају разни профили брзине и притиска (сл. 4.22).

Очигледно је из претходне анализе на који начин *Бернулијева једначина* међусобно повезује стање струјања на различитим струјницама. Уочава се да се *брзина* и *притисак* у

потенцијалном вртлогу ( $r \geq r_1$ ) понашају различито, тј. имају различит карактер промене. То је типичан исказ Бернулијеве једначине (сл. 4.22). У близини осе, тј. за  $r \rightarrow 0$  ове величине теже бесконачно великим вредностима ( $r = 0$  је *сингуларитет* за потенцијални вртлог!), што је последица свих учињених претпоставки, нарочито претпоставке модела **невискозног** флуида, тј. непостојање трења! Наиме, у *вискозном* флуиду трење има одлучујућу улогу у близини осе за  $r = 0$ . *Смицајни напони* би у тој области произвољно нарасли за случај расподеле брзине која би одговарала потенцијалном вртлогу. Вискозност и природа све то регулишу и уместо тога флуид ротира као **круто тело** (угаона брзина  $\omega = const$ , смичући напон  $\tau(r) \equiv 0$ , сл. 4.11). Из (4.114) и (4.116) следи ( $m = 1$ ):

$$U = \omega r = \frac{U_1}{r_1} r, \quad p = p_1 + \frac{1}{2} \rho \frac{U_1^2}{r_1^2} (r^2 - r_1^2) \quad \xrightarrow{r \rightarrow 0} \quad p_1 - \frac{1}{2} \rho U_1^2, \quad r \leq r_1 \quad (4.118)$$

За  $r < r_1$  (принудни вртлог) брзина и притисак се мењају на *исти начин*, тј. имају исти карактер зависности од  $r$ .

Расподела притиска (4.118) при  $r = r_1$  непрекидно (заједничка тангента) прелази у расподелу притиска у *потенцијалном* вртлогу ( $m = -1$  у изразу (4.116))

$$p = p_1 + \frac{\rho}{2} U_1^2 r_1^2 \left( \frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r^2} \right) \quad \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \quad p_1 + \frac{1}{2} \rho U_1^2, \quad r \geq r_1 \quad (4.119)$$

Утицај *вискозности* у слоју флуида  $r = r_1$  (или  $r = R$ , сл. 4.11) доводи до заобљавања профила брзине, непрекидног (континуалног) прелаза једног профила у други и до формирања *смичућег вртложног слоја* са врло сложене структуром и физичким карактеристикама. Посебно треба истаћи да у *вртложном језгру*, у коме флуид ротира као круто тело ( $r \leq r_1$ ), може да настане **знатан потпритисак!** И ова појава чини вихорна струјања врло сложеним за истраживање. Одређивање величине полупречника језгра  $r_1$  вртлога, у општем случају, **није могућа без** узимања у обзир **вискозности** флуида!

#### 4.15.5 Бернулијева једначина у ротирајућем систему. Примена закона момента количине кретања. Ојлерова једначина турбомашина

Једначина количине кретања даје исказ о силама. Аналогно, једначина момента количине кретања даје одговарајући исказ о моментима тих сила. То је значајно за многобројне примене, нарочито у области турбомашина. Очигледно је да се при струјању флуида кроз обртно коло хидрауличних и топлотних машина снага или доводи или одводи. При струјању у *ротирајућем систему* уводе се појмови апсолутног, преносног и релативног кретања, брзина и убрзања. На флуид у ротирајућим системима, поред силе земљине теже, делују још две масене силе, а то су *центрифугална* и *Кориолисова сила*, тј. *тангентно* и *нормално убрзање преносног ротационог кретања* и *Кориолисово убрзање*. Ако систем ротира константном брзином  $\vec{\omega}$  ( $\vec{\omega} \neq \vec{\omega}(t)$ ), онда не постоји тангентно убрзање преносног ротационог кретања, па су *центрифугална сила*  $\vec{f}_\omega$  и њен *потенцијал*  $\Phi_\omega$  дефинисани релацијама

$$\vec{f}_\omega = -\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \quad \rightarrow \quad \vec{f}_\omega = \nabla \Phi_\omega \quad \rightarrow \quad \Phi_\omega = \frac{1}{2} (\vec{\omega} \times \vec{r}) \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}). \quad (4.120)$$

За случај ротације око фиксне осе  $z$ ,  $[\vec{\omega}(0, 0, \omega), \vec{r}(x, y, 0)]$  из (4.120) следи

$$\Phi_{\omega} = \frac{1}{2}\omega^2 r^2. \quad (4.121)$$

Кориолисова сила, тј. Кориолисово убрзање  $\vec{a}_c = 2(\vec{\omega} \times \vec{U})$  је управно на брзину, па према томе и на струјницу, тако да Кориолисова сила **нема** компоненту у правцу струјнице. Дакле, Бернулијева једначина за **релативно стационарно струјање** у систему који **ротира** око фиксне осе  $z$  константном угаоном брзином  $\omega$  има облик

$$\boxed{p + \frac{U^2}{2} + \rho g z - \frac{1}{2}\rho\omega^2 r^2 = C_{\omega}} \quad (4.122)$$

Ова једначина важи дуж сваке струјнице, а константа  $C_{\omega}$  може, а не мора, да има различите вредности од струјнице до струјнице. У случају да не постоји релативно струјање ( $U = 0$ ) онда израз (4.122) дефинише поље притиска при *релативном мировању* флуида у систему који ротира константном угаоном брзином  $\omega$  (види потпоглавље 3.3.1).

**Нестационарно релативно струјање.** Помоћу једначина (4.109) и (4.122) добија се израз за Бернулијеву једначину *нестационарног релативног* струјања у равномерно (једнолико) *ротирајућем* систему око фиксне осе

$$\rho \int_1^2 \frac{\partial U}{\partial s} ds + p_2 + \frac{\rho}{2}U^2 + \rho g z_2 - \frac{\rho}{2}\omega^2 r_2^2 = p_1 + \frac{\rho}{2}U_1^2 + \rho g z_1 - \frac{\rho}{2}\omega^2 r_1^2 \quad (4.123)$$

**Ојлерова једначина турбомашина - примена једначине момента количине кретања.** Једначина (4.79) се примењује на турбинско коло (угаона брзина  $\omega$ ) кроз чији лопатични канал флуид струји *радијално* из спољашњости ( $r_1$ ) ка унутрашњости ( $r_2 < r_1$ ) канала. Избором *контролне запремине* у међулопатичном простору, разматрањем апсолутних и релативних брзина струјања у *ротирајућем* систему и коришћењем једначине (4.79) за стационарно струјање добијају се изрази за корисни момент  $M_T$  турбине и корисну снагу кола  $P_k$  како следи

$$M_T = \dot{m}(r_1 U_{\varphi 1} - r_2 U_{\varphi 2}), \quad P_k = M_T \omega = \dot{m}(w_1 U_{\varphi 1} - w_2 U_{\varphi 2}) \quad (4.124)$$

где су

- $\dot{m}$  - масени проток флуида кроз турбинско коло;
- $U_{\varphi 1}$  - обимска компонентна апсолутне брзине  $\vec{U}_1(U_{r1}, U_{\varphi 1})$  са којом флуид при  $r = r_1$  улази у лопатични канал
- $U_{\varphi 2}$  - обимска компонента брзине  $\vec{U}_2(U_{r2}, U_{\varphi 2})$  којом флуид при  $r = r_2$  напушта канал
- $w_1 = r_1 \omega$  и  $w_2 = r_2 \omega$

Једначина (4.124) је у литератури позната као *Ојлерова једначина турбине*. Ова једначина, међутим, важи не само за турбине, већ она важи и за *пумпе, вентилаторе и компресоре*. Због тога она носи назив *Ојлерова једначина турбомашина*. На пример, ако се ради о

пумпи, тј. о колу пумпе, важи иста једначина (4.124) уз промену знака на десној страни. Оба случаја се разликују само у смеру размену енергије између флуида и ротирајућег дела (радног кола) машине кроз коју флуид струји. Пумпа се због тога назива *радном машином*, јер флуиду предаје (саопштава) енергију. Корисна снага пумпе  $P_k$  је дефинисана изразом

$$P_k = \dot{V} \left[ \left( p_2 + \rho g z_2 + \rho \frac{U_2^2}{2} \right) - \left( p_1 + \rho g z_1 + \rho \frac{U_1^2}{2} \right) \right] \quad (4.125)$$

где је  $\dot{V}$  - запремински проток флуида који остварује пумпа која је уграђена између пресека 1-1 и низструјног (низводног) пресека 2-2 који се налазе на међусобној висинској разлици  $z_2 - z_1$ . Ознаке за друге величине су уобичајене. Ако се замисли да се пумпа удаљи из струјног тока, онда се у једначину (4.124) мора ставити  $P_k = 0$ , тако да се она своди на Бернулијеву једначину (4.99). Дакле, на основу закона одржања механичке енергије, Бернулијева једначина има значење једначине енергије за струјање *невискозног* флуида. Овде још треба напоменути да Ојлерова једначина турбомашина важи не само за *радијалне*, већ такође и за *аксијалне* турбомашине у којима флуид углавном струји у аксијалном правцу.

**Специјални случај - слободни вртлог.** Ако се разматра прва једначина система (4.124) у случају радног кола на које се при струјању флуида не преноси никакав момент ( $M_T = 0$ ), онда очигледно важи или  $\dot{m} = 0$  или  $rU_\varphi = \text{const}$ . У другом случају обимска компонента је *потенцијални вртлог*. Израз  $\Gamma = rU_\varphi$  дефинише *циркулацију*  $\Gamma$ , па се у турбомашинама користи термин закон *константне циркулације* ( $\Gamma = rU_\varphi = \text{const}$ ). Струјање се уз присуство и радијалне компоненте брзине обавља се по *спиралним* путањама. Такво струјање настаје у пољу потенцијалног вртлога здруженог са извором или понором. У техничкој пракси је ова класа струјања врло присутна, на пример, у различитим врстама *циклонских* апарата и уређаја.

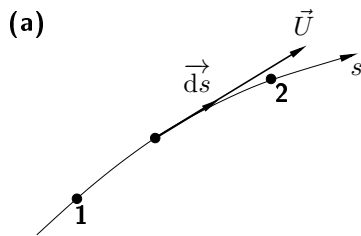
## 4.16 Примена основних једначина механике флуида при решавању квази-једнодимензијских струјања флуида

### 4.16.1 Модели једнодимензијских и квази-једнодимензијских струјања

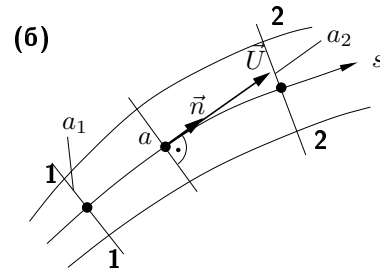
#### Модели струјнице (MS) и струјног влакна (MSV)

Најпре се уочава струјница  $S$  од тачке 1 ка тачки 2. Потом се у тачки 1 посматра инфинитезимална површ  $a_1$  **ортогонална** на струјници  $S$ . Ако се кроз сваку граничну тачку површине  $a_1$  повуку остале струјнице, онда оне формирају **омотач струјног влакна**  $SV$ . Пошто је овај простору непосредној околини струјнице  $S_{1-2}$ , промене величина стања  $f$  и тачкама попречног пресека  $a_1$  су *знатно мање* од промена у подужном правцу  $s$  и могу се и односу на њих *занемарити*, тако да важи  $f = f(s, t)$ . Дакле, све величине су *константне* у пресеку  $a$  струјног влакна и зависе само од **једне** праволинијске или криволинијске *координате*  $s$  управне на пресек  $a$ , као и од времена  $t$  ако је струјање *нестационарно*! Постоји само једна пројекција брзине  $\vec{U}$  која је управна на попречни пресек  $SV$  и која је задата

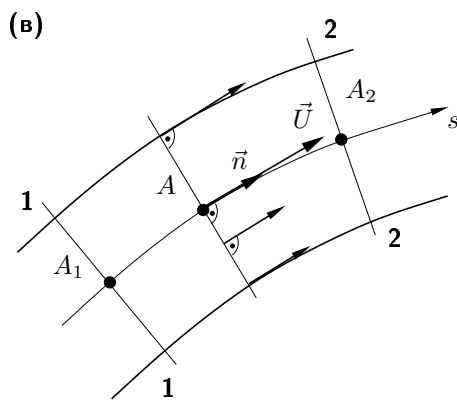
са  $\vec{U} = \vec{U}(s, t)$ . Овде се ради о **једнодимензијском струјању!** Иако MSV представља једну апстракцију, он је важно помоћно средство у науци о струјању. Велики значај има у практичној примени и чини основ *хидраулике*.



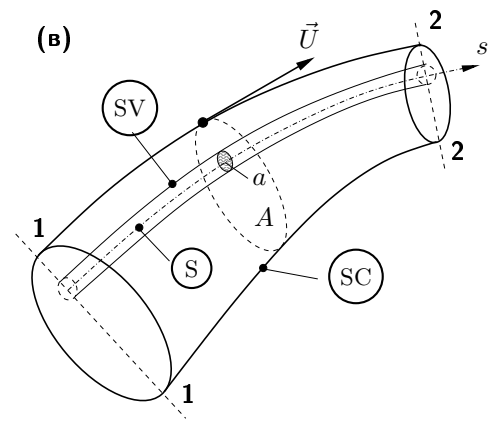
Модел струјнице  $\equiv$  (MS)



Модел струјног влакна  $\equiv$  (MSV)



Модел струјне цеви  $\equiv$  (MSC)



$A$  - нормални пресек струјне цеви

**Слика 4.23.** Једнодимензијско и квази-једнодимензијско струјање: **(а)** струјница (S); **(б)** струјно влакно (SV):  $a$  - површ инфинитезималног попречног пресека SV;  $\vec{U} = \vec{U}(s, t)$  - брзина ортогонална на површ пресека  $a$ ;  $\vec{n}$  - јединични вектор површине  $a$  у правцу тангенте на струјницу; **струјна цев** (SC):  $A$  - површина попречног пресека SC који је ортогоналан на струјницама (нормални пресек SC);  $\vec{U}$  - брзина управна на ортогонални (нормални) пресек  $A$  струјне цеви (SC), која се у општем случају мења од тачке до тачке унутар пресека  $A$ , или је константна по пресеку; **(г)** просторни приказ струјнице (S), струјног влакна (SV) и струјне цеви SC.

**Струјање у каналима и цевима.** Струјање у каналима и цевима различитих попречних пресека, који су константни или промењиви у простору и времену, је у општем случају *вишедимензијско* и због тога значајно компликованије за изучавање од једнодимензијског струјања! То нарочито долази до изражаја у случају *стационарног* струјања кроз струјно влакно када се основне једначине механике флуида у интегралном и диференцијалном облику свде на своје веома једноставне *алгебарске облике*.

**Основно питање.** Природно се у овом тренутку поставља основно питање: Да ли је могуће овај нови сложенији случај струјања свести на претходни једноставнији? Под којим условима се једно *струјање кроз цев* са све три пројекције брзине које зависе од све три просторне координате и времена може анализирати *применом модела једнодимензијског струјања MSV*? Одговор се добија увођењем појма струјне цеви SC, тј. MSC!

### Модел струјне цеви MSC - модел квази-једнодимензијског струјања

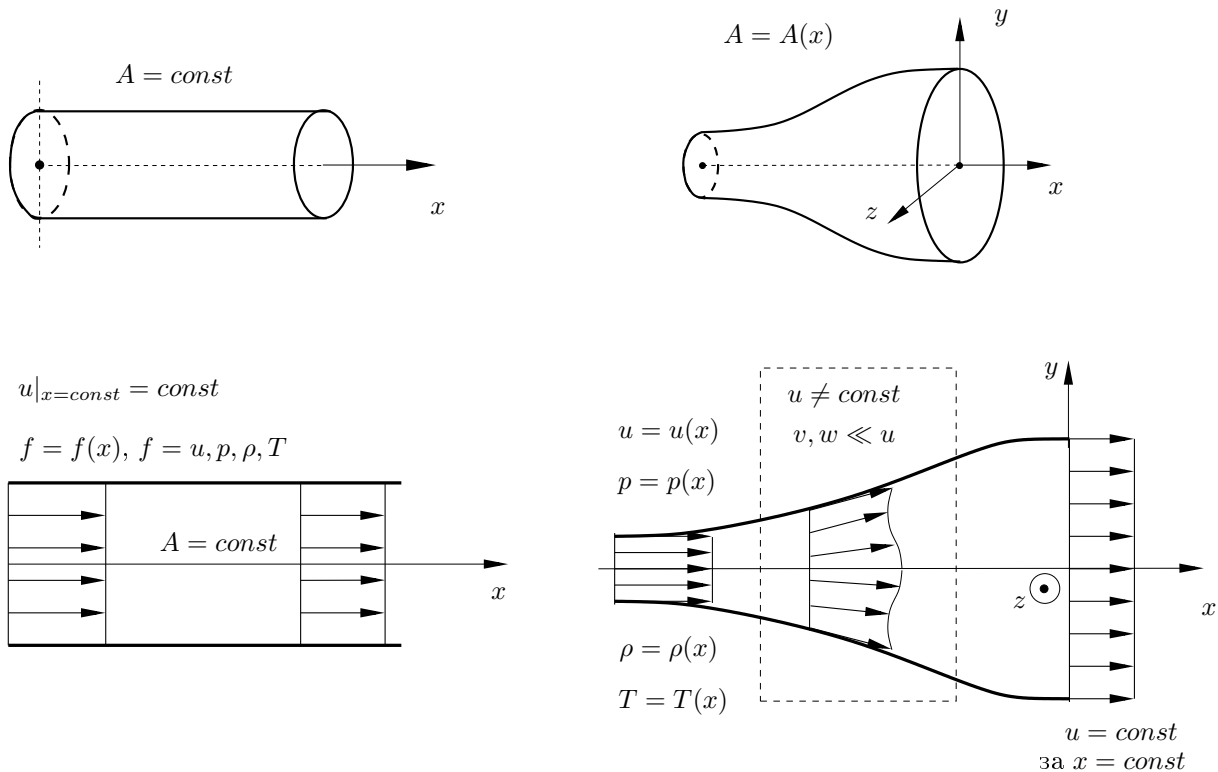
Струјна цев је векторска цев поља брзине. Формира се аналогно као и струјно влакно. Њен омотач чине струјнице, а њени попречни пресеци ( $A_1, A_2, A, \dots$ ) су *коначни*. Због тога се, за разлику од струјног влакна, код струјне цеви **не могу** занемарити промене физичких величина  $f$  по пресеку у односу на њихове промене у подужном правцу! Да би се један овакав модел MSC свео на претходни једноставнији MSV очигледно је да треба разматрати брзинско поље и у струјној цеви пронаћи оне попречне пресеке  $A$  на које су струјнице ортогоналне. У том случају, као и код струјног влакна, постоји само **једна** пројекција брзине  $\vec{U}$  **ортогонална** на површ пресека  $A$ , тј. у правцу нормале  $\vec{n}$  на тај пресек (сл. 4.23(в)(г))! Пошто струјна цев SC *коначног* пресека  $A$ , за разлику од SV инфинитезималног пресека  $a$  обухвата знатно већу област (домен) око струјнице S1-2, онда се брзина  $\vec{U}$  у општем случају, **мења** од тачке до тачке унутар пресека и формира *неравномеран* (неуниформни) профил брзине. Дакле, струјања *није једнодимензијско*, али има *једнодимензијски карактер*!

Није, међутим, ни једноставно, а ни могуће формирати *нормални пресек  $A$* ! То зависи како од геометрије струјног простора, тако и од струјног поља, јер при томе мора да буде задовољен услов  $\vec{U} \cdot \text{rot} \vec{U} = 0$ . Ако нормални пресек *постоји*, онда *брзина* по том пресеку може да буде *константна* (равномерна) или *промењива* (неравномерна) (сл. 4.24). У овом другом случају, који се односи на неравномерну расподелу брзине изразито присутну при струјању вискозног флуида, могу се одредити **средње константне вредности** физичких величина, о чему ће бити више речи у Динамици вискозног флуида.

### Примена концепта квази-једнодимензијског струјања на проблеме струјања флуида кроз цеви, канале и млазнике.

Модел **невискозног** флуида омогућује примену концепта како *једнодимензијског*, тако и *квази-једнодимензијског* струјања флуида при анализи основних једначина механике флуида, тј. закона одржања масе, импулса и енергије у њиховим интегралним облицима. Иако прихватање константних вредности у попречном пресеку цеви подразумева да се тицаји вискозности занемарљиво мали, концепт теорије једнодимензијског струјања може да се пренесе и примени на струјање *вискозног* флуида увођењем *средњих вредности* физичких величина.

Струјање приказано на слици 4.24(б) је суштински тродимензијско и зависно *промењиве* су функције од  $x, y$  и  $z$ . Заиста, брзина на граници (омотачу) струјне цеви мора да има правац тангенте на ту границу (контур), због чега настају и њене компоненте у  $y$  и  $z$  правцу. Међутим, ако је промена пресека континуална и спора (умерена), онда су и компоненте у  $y$  и  $z$  правцима **мале** у поређењу са компонентом у  $x$  правцу. У том случају може се *претпоставити* да су *промењиве* струјног поља *функције само од  $x$*  координате, тј. да имају униформну (равномерну) расподелу у било ком *попречном пресеку* одређеном са координатом  $x$ ! Такво струјање, у коме је осим  $f = f(x)$  и  $A = A(x)$ , где је  $f \equiv u, p, \rho, T, \dots$ , дефинисано је као *квази-једнодимензијско*!



**Слика 4.24.** (а) Једнодимензијско струјање: струјна цев је константног попречног пресека  $A = const$  и све физичке величине зависе само од подужне координате  $x$ ; (б) Квази-једнодимензијско струјање: струјна цев је промењивог попречног пресека  $A = A(x)$ ; строго говорећи, струјање је тродимензијско али се на извесним дужинама (деловима) цеви може претпоставити да су физичке величине функције само од  $x$  и да су задовољени услови (4.126).

Примена концепта **квази-једнодимензијског струјања** подразумева (сл. 4.24)

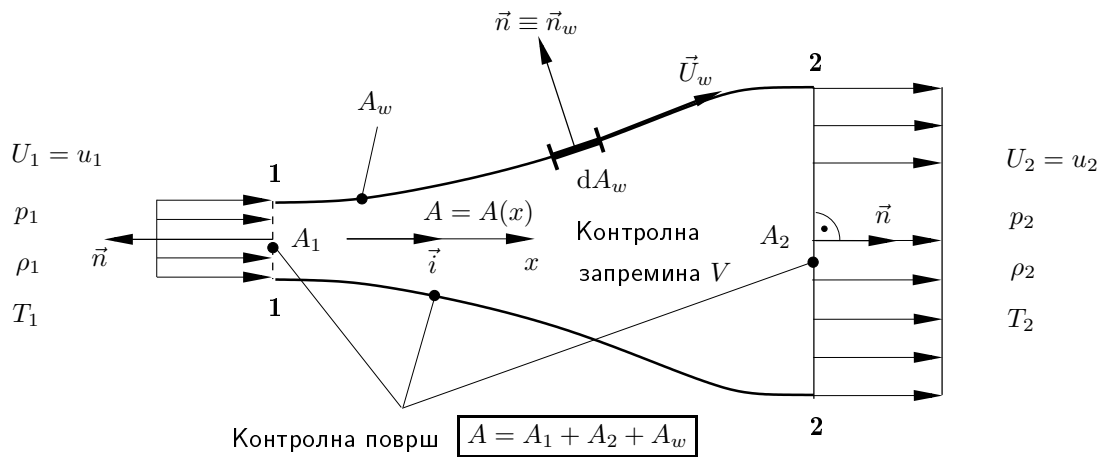
$$1. f(x)|_{x=const} = const \quad 2. A = A(x) \quad 3. f = f(x) \quad f = u, \rho, p, T, \dots \quad (4.126)$$

1. Претпоставка да су физичке величине  $f$  константне у тачкама попречног пресека  $A$  струјне цеви. Ова претпоставка не мора да буде испуњена за читаву струјну цев, већ само на оним њеним деловима на које се при прорачуну примењује модел квази-једнодимензијског струјања. Дакле, струјање мора бар на појединим дужинама (деловима) цеви да буде уједначено (равномерно), тј. практично константно по попречном пресеку и да се споро мења у подужном правцу.
2. Потребна спора промена профила брзине у подужном (аксијалном) правцу подразумева да је површ попречног пресека  $A = A(x)$  цеви лагана, **споро промењива** функција од независно промењиве  $x$ .
3. У струјању са задовољеним условима 1 и 2, тј. са испуњеним тачкама 1 и 2 закључка (4.126) физичке величине  $f$  су функције **само** од подужне координате  $x$ , тј.  $f = f(x)$ . Између деоница струјне цеви у којима су испуњени услови (4.126) струјање може да

има тродимензијски карактер, али се оно **не може** прорачунавати применом метода и модела једнодимензијског и квази-једнодимензијског струјања.

### 4.16.2 Основне једначине квази-једнодимензијског струјања у алгебарском облику

Иако је претпоставка о квази-једнодимензијском струјању извесна апроксимација реалних струјања у каналима, цевима и млазницима промењивог попречног пресека, могуће је користити *интегралне облике* једначина одржања, тј. једначине континуитета (4.13), једначине количине кретања (4.13) и једначине енергије (4.13) у циљу извођења одговарајућих облика ових једначина за квази-једнодимензијско струјање. Тако изведене једначине су физички конзистентне, описују физику одговарајућих процеса и дају решење за проблеме у техничкој пракси.



**Слика 4.25.** Коначна контролна запремина  $V$  и контролна површ  $A$  за модел квази-једнодимензијског струјања у струјној цеви. Физичко-математички концепт овог модела и значење појединих ознака дати су у тексту.

#### Једначина континуитета

Применом концепта квази-једнодимензијског струјања на општи интегрални облик једначине континуитета (4.13) за случај *стационарног* струјања добија се

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho dV + \iint_A \rho \vec{U} \cdot \vec{n} dA = 0 \quad \longrightarrow \quad \boxed{\iint_A \rho \vec{U} \cdot \vec{n} dA = 0} \quad (4.127)$$

Примена једначине (4.127) на коначну контролну запремину  $V$  за струјну цев ограничену контролном површи  $A = A_1 + A_2 + A_w$  (слика 4.25) даје

$$\iint_{A_1} \rho \vec{U} \cdot \vec{n} dA + \iint_{A_2} \rho \vec{U} \cdot \vec{n} dA + \iint_{A_w} \rho \vec{U} \cdot \vec{n} dA = 0. \quad (4.128)$$

У попречним пресецима  $A_1$  и  $A_2$  профили брзина су равномерни (униформни). Јединични вектори  $\vec{n}$  спољасних нормала одговарајућих контролних површи су, по дефиницији, увек усмерени од површи ка околини (окружењу). Дуж омотача струјне цеви (зида канала у



општем случају) брзина струјања је у правцу тангенте на површ омотача. Све величине су означене индексима оних делова контролне површи којима припадају, тако да важе релације (сл. 4.25)

$$\iint_{A_1} \rho \vec{U} \cdot \vec{n} dA = -\rho_1 U_1 A_1, \quad \iint_{A_2} \rho \vec{U} \cdot \vec{n} dA = \rho_2 U_2 A_2, \quad \vec{U}_w \cdot \vec{n}_w = 0 \quad \Rightarrow \quad \iint_{A_w} \rho \vec{U} \cdot \vec{n} dA = 0. \quad (4.129)$$

Уврштавањем израза (4.129) у (4.128) добија се

$$-\rho_1 U_1 A_1 + \rho_2 U_2 A_2 + 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\rho_1 U_1 A_1 = \rho_2 U_2 A_2} \quad (4.130)$$

За *нестисљив* и *хомоген* флуид  $\rho_1 = \rho_2 = \rho = const$  израз (4.130) се поједностављује

$$\boxed{U_1 A_1 = U_2 A_2.} \quad (4.131)$$

Уместо *нормалних пресека* 1-1 и 2-2, чије су површине  $A_1$  и  $A_2$ , могу да се изаберу било која друга два пресека у којима је задовољен услов (4.126). Другим речима, ако се у једначинама (4.130) и (4.131) низструјни пресек (крајње стање) посматра као промењив, тј. као изабран било где дуж  $x$ -осе, али тако да буду задовољени услови модела (4.126), онда претходне једначине гласе

$$\boxed{\rho U A = const} \quad (4.132)$$

$$\boxed{U A = const} \quad (4.133)$$

Једначина (4.132) је једначина континуитета квази-једнодимензијског струјања флуида. Она важи и за *нестисљив* и за *стишљив* флуид. Њено физичко значење је да се *масени проток  $\dot{m}$  дуж цеви не мења* (улазни масени флуks једнак излазном). Упоредити овај закључак са дефиницијом масеног протока (4.10). Величина  $\dot{m} = \rho U A$  је масени проток кроз произвољни пресек струјне цеви у коме је испуњен услов једнодимензијског модела.

Једначина (4.133) је *квази-једнодимензијски* облик једначине континуитета за *нестисљив* хомоген флуид. Из ње следи *непромењивост* (константност) *запреминског протока  $\dot{V}$*  (видети израз (4.9)) *дуж струјне цеви*, јер израз  $\dot{V} = U A$  означава *запремински проток* кроз произвољни пресек струјне цеви у коме је остварен карактер *једнодимензијског* струјања ( $U = const$  у свим тачкама површи пресека  $A$  и  $\vec{U} = U \vec{n}$ ).

Из (4.132) и (4.133) се изводе два важна закључка:

- (1) При струјању **нестисљивог** флуида *брзина* струјања се повећава са смањењем *попречног пресека* струјне цеви и обратно ( $A \downarrow \rightarrow U \uparrow$  и обрнуто  $A \uparrow \rightarrow U \downarrow$ ). Овај закључак при струјању *стишљивог* флуида ( $\rho \neq const$ ) неће увек да важи! Наиме, могуће је да се услед великог пораста густине истовремено смањују и брзина струјања у попречни пресек струјне цеви ( $\rho \uparrow \rightarrow U \downarrow A \downarrow$ ).
- (2) Једначина континуитета за *нестисљив* флуид, (4.133) **важи** не само за *стационарна*, већ и за **нестационарна** струјања! Закључак се једноставно изводи из израза (4.13) у коме *запремински интеграл* изчезава за случај струјања *нестисљивог* флуида. То је последица закона одржања масе. Наиме, код *нестисљивог* флуида **маса** флуида

у контролној запремини  $V$  се **не мења током времена**, иако је струјање *нестационарно*! Видети слику 4.16 и једначине (4.42)-(4.55).

Поље брзине  $U = u$  (једнодимензијски модел). Детаљна анализа свих појмова и ознака за једнодимензијско и квази-једнодимензијско струјање, која је дата у поглављу 4.16.1 и у анализи једначине континуитета, директно се користи при извођењу једначине количине кретања и једначине енергије. Пошто ће у даљем тексту, како је приказано на слици 4.25, струјање бити усмерено у правцу  $x$ -осе, онда је сврсисходно да се брзина  $|\vec{U}| = U$  означи са  $u$ , јер је то компонента брзине  $\vec{U} = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k}$  у правцу  $x$ -осе. Другим речима, величина  $U$  означава брзину у произвољној тачки струјнице у тродимензијском струјању, тако да, сагласно томе, величина  $u$  представља брзину у моделу *једнодимензијског* или *квази-једнодимензијског* струјања дуж  $x$ -осе! Ознаке  $u_1$  и  $u_2$ , пошто је меродовна само компонента брзине  $u$ , дефинишу униформно (равномерно) поље брзине у попречним пресецима 1-1 и 2-2 чије су површине  $A_1$  и  $A_2$ . Дакле, доњи индекси 1 и 2 брзине  $u$  не значе индексну нотацију, већ **означавају пресек** струјне цеви. Сагласно овоме и ознакама на слици 4.25, **једначине континуитета** (4.130)-(4.133) гласе

$$\begin{array}{ccc} \rho_1 u_1 A_1 = \rho_2 u_2 A_2 & \longrightarrow & u_1 A_1 = u_2 A_2 \\ & \boxed{\rho = const} & \\ \rho u A = const & \longrightarrow & u A = const \end{array} \quad (4.134)$$

Још једном се наглашава да *изрази без индекса* важе за било који пресек струјне цеви, који заједно са физичким величинама које му припадају, задовољава модел квази-једнодимензијског струјања (4.126).

### Једначина количине кретања

Разматра се једначина импулса у интегралном облику, (4.13). Њен облик за *стационарно* струјање у коме се утицај масених сила може занемарити ( $\vec{F} = 0$ ) гласи

$$\iint_A \rho \vec{U} (\vec{U} \cdot \vec{n}) dA = - \iint_A p \vec{n} dA \quad (4.135)$$

Компонента ове векторске једначине у правцу  $x$ -осе је

$$\iint_A \rho u (\vec{U} \cdot \vec{n}) dA = - \iint_A p n_x dA. \quad (4.136)$$

Једначина (4.136) је упрошћен облик једначине (4.72) у којој  $p n_x dA$  означава  $x$ -компоненту елементарне *силе притиска*. Израчунавање интеграла по контролној површи  $A$  на левој страни једначине (4.136) детаљно је анализирано при извођењу једначине континуитета. Пошто је једначина (4.136) скаларна једначина, потребно је водити рачуна о знаку  $x$ -компоненте при разматрању интеграла по *контролној* површи  $A$ . Поново се наглашава да контролну површ  $A_w$  омотача контролне запремене  $V$  формирају струјнице, па је у тачкама ове површи  $\vec{U} \cdot \vec{n} dA \equiv \vec{U}_w \cdot \vec{n}_w dA = 0$  (сл. 4.25). Тако интеграл на левој страни једначине (4.136) има вредност  $-\rho_1 u_1^2 A_1 + \rho_2 u_2^2 A_2$ . Интеграл поља притиска  $p$  по површима пресека

$A_1$  и  $A_2$  износи  $-(-p_1 A_1 + p_2 A_2)$ . Интеграљење поља притиска по површи  $A_w$  (сл. 4.25) даје

$$-\iint_{A_w} p n_x dA = -\iint_{(A_w)_x} p (dA_w)_x = -\int_{A_1}^{A_2} -p dA = \iint_{A_1}^{A_2} p dA \quad (4.137)$$

где је  $dA$   $x$ -компонента вектора  $\vec{n} dA|_{A_w} = \vec{n}_w dA_w$ , тј.  $dA = \vec{n}_w \cdot \vec{i} dA_w = (n_w)_x dA_w = (dA_w)_x$ . Дакле,  $dA$  је пројекција области површи  $dA_w$  на раван управну на  $x$ -осу! Уврштавањем добијених израза, заједно са (4.137) у једначину (4.136) следи

$$-\rho_1 u_1^2 A_1 + \rho_2 u_2^2 A_2 = -(-p_1 A_1 + p_2 A_2) + \int_{A_1}^{A_2} p dA$$

односно у сређеном облику

$$\boxed{p_1 A_1 + \rho_1 u_1^2 A_1 + \int_{A_1}^{A_2} p dA = p_2 A_2 + \rho_2 u_2^2 A_2.} \quad (4.138)$$

Једначина (4.138) представља једначину количине кретања за стационарно квази-једнодимензијско струјање флуида. Очигледно да интеграл на левој страни једначине дефинише силу притиска у правцу  $x$ -осе којом окружење, тј. околни флуид делује на омотач струјне цеви, а преко њега на укупну масу флуида у контролној запремини. У практичним проблемима, међутим, обично се тражи **сила** којом маса флуида делује на своју околину преко омотача струјне цеви, тј. преко површи  $A_w$ . Зато, сагласно, трећем Њутновом закону акције и реакције, негативну вредност интеграла у једначини (4.138) треба схватити као *силу реакције* којом флуид у контролној запремини  $V$  делује на границе (зидове) свог струјног простора, које се бирају као *контролна површ*  $A_w$  за омотач струјне цеви! У примерима то посебно долази до изражаја!

### Једначина енергије

Интегрални облици (4.81) и (4.13) једначине енергије омогућују директно добијање њених **алгебарских** облика. Модел стационарног ( $\partial()/\partial t$ ) адијабатског ( $\dot{q} = 0$ ) струјања у коме је занемарен утицај масених сила ( $\vec{F} = 0$ ) добија се из једначине (4.13) у коју се уврштавају претпоставке  $\partial()/\partial t = 0$ ,  $\dot{q} = 0$  и  $\vec{F} = 0$ :

$$\oiint_A \rho \left( e + \frac{U^2}{2} \right) (\vec{U} \cdot \vec{n}) dA = -\oiint_A p \vec{U} \cdot \vec{n} dA. \quad (4.139)$$

Примена *контролне запремине* са сл. 4.25 омогућује да се, на основу рачуна објашњеног при извођењу једначине континуитета и количине кретања, из једначине (4.139) добије резултат

$$\rho_1 \left( e_1 + \frac{1}{2} u_1^2 \right) (-u_1 A_1) + \rho_2 \left( e_2 + \frac{1}{2} u_2^2 \right) (-u_2 A_2) = -(-p_1 u_1 A_1 + p_2 u_2 A_2)$$

или после извесног груписања чланова

$$p_1 u_1 A_1 + \rho_1 u_1 A_1 \left( e_1 + \frac{1}{2} u_1^2 \right) = p_2 u_2 A_2 + \rho_2 u_2 A_2 \left( e_2 + \frac{1}{2} u_2^2 \right). \quad (4.140)$$

Дељењем једначине (4.140) са масеним протоком  $\dot{m} = \rho_1 u_1 A_1 = \rho_2 u_2 A_2$ , следи израз

$$e_1 + \frac{p_1}{\rho_1} + \frac{u_1^2}{2} = e_2 + \frac{p_2}{\rho_2} + \frac{u_2^2}{2} \quad (4.141)$$

који се после увођења појма **енталпије**  $h$  као у термодинамици

$$h = e + \frac{p}{\rho} \quad (4.142)$$

своди на израз

$$\boxed{h_2 + \frac{1}{2}u_2^2 = h_1 + \frac{1}{2}u_1^2} \quad (4.143)$$

Ако се, опет као код једначина континуитета и количине кретања, крајње стање (пресек 2-2 узме промењиво, тј. било који низструјни пресек који испуњава услове (4.126), онда *једначина енергије* постаје

$$\boxed{h + \frac{u^2}{2} = const} \quad (4.144)$$

Једначина (4.143), тј. (4.144) је **најпростији** облик једначине енергије за **стационарно адијабатско квази-једнодимензијско** струјање **невискозног** флуида. Ова једначина има значајно и вредно помињања сродство са *Бернулијевом једначином*, са којом се, међутим, усаглашава и идентификује само у специјалним (посебним) случајевима. То ће бити детаљно анализирано у поглављима који следе.

### Затвореност система једначина

Једначине (4.134), (4.138) и (4.144) су једначине континуитета, количине кретања о енергије **квази-једнодимензијског** струјања флуида. Оне су **алгебарске једначине**, са изузетком интегралног члана у (4.138). Претпоставља се да су улазни параметри  $\rho_1$ ,  $u_1$ ,  $p_1$ ,  $T_1$  и  $h_1$  задати и да је закон промене површи попречног пресека  $A = A(x)$  познат. Поменути једначинама придружује се још и једначина стања идеалног гаса

$$p_2 = \rho_2 R T_2 \quad (4.145)$$

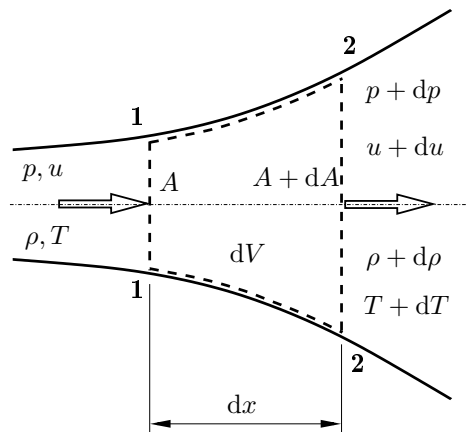
као и израз за *енталпију идеалног гаса*

$$h_2 = c_v T_2 + R T_2 = c_p T_2 \quad (4.146)$$

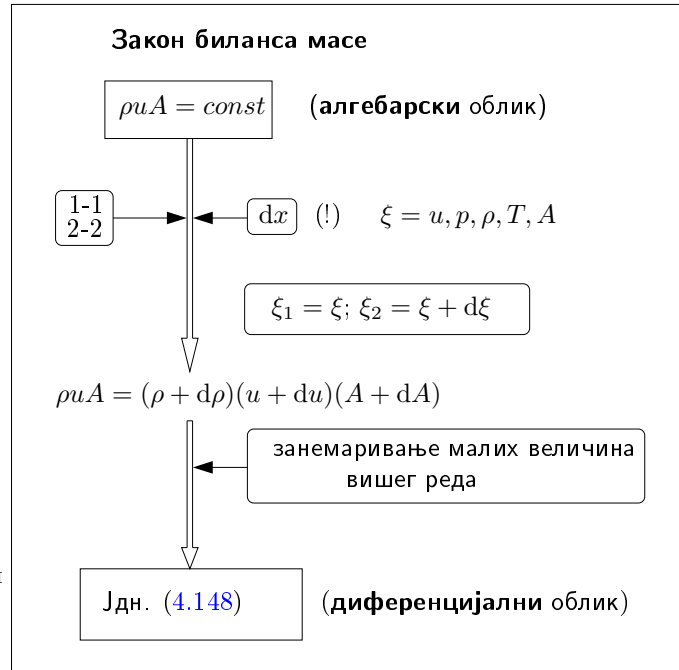
Једначине (4.134), (4.138), (4.144), (4.145), (4.146) формирају пет једначина са пет непознатих  $\rho_2$ ,  $u_2$ ,  $p_2$ ,  $T_2$  и  $h_2$ . Систем једначина је **затворен** и решава се одговарајућим алгебарским поступцима. Међутим, могуће је истражити неке од физичких карактеристика квази-једнодимензијског струјања без комплетног решавања ових једначина. Велику помоћ у тој анализи пружају неки **диференцијални облици** једначина континуитета, импулса и енергије.

**4.16.3 Основне једначине квази-једнодимензијског струјања у диференцијалном облику**

У општем тродимензијском нестационарном струјању диференцијалне једначине континуитета, количине кретања и енергије изведене су из интегралних облика ових једначина. За случај квази-једнодимензијског струјања су из интегралних облика добијени алгебарски облици основних једначина, па је природно и физички конзистентно да се из ових једначина изведу диференцијални облици једначина континуитета, импулса и енергије.



$dV$  - инфинитезимална контролна запремина за два бесконачно блиска пресека струјне цеви - диференцијални облик једначине



**Слика 4.26.** Инфинитезимална контролна запремина  $dV$  за модел квази-једнодимензијског струјања

То математички значи да ће пресеци 1-1 и 2-2 на сл. 4.25 бити на бесконачно блиском растојању  $dx$ ! Другим речима, не ради се више о коначној контролној запремини  $V$ , већ о *бесконачно малој контролној запремини*  $dV$ , као инфинитезималном делу коначне контролне запремине формиране за модел квази-једнодимензијског струјања (сл. 4.26).

**Једначина континуитета**

Диференцирањем једначине континуитета (4.134)  $\rho u A = const$  следи њен диференцијални облик

$$d_x(\rho u A) = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dx} + \frac{1}{u} \frac{du}{dx} + \frac{1}{A} \frac{dA}{dx} = 0 \tag{4.147}$$

Ако се израз (4.134) логаритмује, па диференцира, добија се једначина

$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{du}{u} + \frac{dA}{A} = 0$

(4.148)

у којој су величине  $d\rho$ ,  $du$  и  $dA$  инфинитезималне промене густине  $\rho$ , брзине  $u$  и пресека  $A$  између блиских пресека  $A$  и  $A + dA$  струјне цеви на међусобном растојању  $dx$  (сл. 4.26).

На слици 4.26 је приказана примена закона баланса масе на *инфинитезималну контролну запремину*  $dV$  струјне цеви у случају стационарног квази-једнодимензијског струјања.

Једначине (4.147) и (4.148) представљају *диференцијалне облике* једначине континуитета за квази-једнодимензијско струјање.

### Једначина количине кретања

*Диференцијални облик* једначине количине кретања добија се из једначине (4.138) за случај инфинитезималне контролне запремине  $dV$  приказане на слици 4.26 заменити својим интеграндом, добија облик

$$pA + \rho u^2 A + p dA = (p + dp)(A + dA) + (\rho + d\rho)(u + du)^2(A + dA) \quad (4.149)$$

Занемаривањем малих величина вишег реда, на пример,  $dp dA$ ,  $d\rho(du)^2$  и слично, у једначини (4.149) добија се

$$A dp + Au^2 d\rho + \rho u^2 dA + 2\rho u A du = 0. \quad (4.150)$$

Коришћењем једначине континуитета (4.148) у облику

$$Au^2 d\rho + \rho u A du + \rho u^2 dA = 0 \quad (4.151)$$

и њеним одузимањем од једначине (4.150) следи једначина

$$\boxed{\rho u du = -dp} \quad (4.152)$$

Једначина (4.152) је *диференцијални облик* једначине количине кретања за стационарно квази-једнодимензијско струјање. Она је у ствари **Ојлерова једначина**, која је раније изведена за општи случај нестационарног и тродимензијског струјања (једначина (4.69)), и из које се може добити једначина (4.152). Овај облик Ојлерове једначине, иако је изведен за струјну цев, **не садржи** нормални попречни пресек струјне цеви који је у општем случају *промењив!* Ојлерова једначина (4.152) може да се интегрални како за нестишљив тако и за баротропан флуид, тј. за адијабатско струјање које је овде и претпостављено. При томе се добијају *Бернулијеви интегрални* (4.111) за  $\rho = const$

$$\frac{u^2}{2} + \frac{p}{\rho} = const \quad (4.153)$$

који за  $p/\rho^\kappa = const$  добија облик (4.104)

$$\boxed{\frac{u^2}{2} + \frac{\kappa}{\kappa - 1} \frac{p}{\rho} = const.} \quad (4.154)$$

Бернулијева једначина (4.153) и (4.154) биле су изведене за струјницу. Међутим, резултати добијени у овом поглављу показују да **Бернулијева једначина важи** не само за струјницу, већ и за **струјну цев промењивог попречног пресека!**

**Закључак - Бернулијева једначина**

Бернулијева једначина важи за струјницу, за струјно влакно сталног и променљивог попречног пресека (једнодимензијско струјање) и за струјну цев чији је попречни пресек у општем случају променљив (квази-једнодимензијско струјање).

**Једначина енергије**

Диференцијални облик једначине енергије за квази-једнодимензијско следи директно из алгебарског облика (4.144)

$$h + \frac{u^2}{2} = \text{const}$$

чијим се диференцирањем добија

$$\boxed{dh + u du = 0.} \quad (4.155)$$

Једначине (4.148), (4.152) и (4.155) представљају диференцијалне облике једначина континуитета, количине кретања и енергије за *стационарно, адијабатско, квази-једнодимензијско* струјање *невискозног* флуида када су *масене силе занемарене*. Комбиновањем једначина количине кретања (4.152) и енергије (4.155) добија се

$$dh - \frac{dp}{\rho} = 0 \quad (4.156)$$

Закључује се да је у овом случају једначина (4.154) **идентична** једначини (4.144), тј.

$$\frac{u^2}{2} + \frac{\kappa}{\kappa - 1} \frac{p}{\rho} = \frac{u^2}{2} + \frac{\kappa}{\kappa - 1} RT = \frac{u^2}{2} + c_p T \equiv h + \frac{u^2}{2}.$$

То је важан специјални случај адијабатског струјања, у коме се Бернулијева једначина *подудар* са једначином енергије! Разлика ове две једначине постаје битна тек онда, када се појављују у струјним процесима они облици енергије који нису садржани у једначини количине кретања! Примери за то су довођење или одвођење топлоте, појаве провођења топлоте, учешће зрачења и друго.

*Бернулијева једначина* може да се изведе и из опште једначине енергије, (4.13). Ова чињеница да се Бернулијева једначина може интерпретирати као једначина количине кретања (други Њутнов закон) или као једначина енергије показује да је енергијска једначина сувишна (непотребна) при анализи невискозног нестишљивог струјања. За такво струјање су довољне једначина континуитета и количине кретања!

#### 4.17 ЗАКЉУЧАК. Основне једначине невискозног флуида за квази-једнодимензијски модел

##### Једначина континуитета:

- алгебарски облик

$$\rho_1 u_1 A_1 = \rho_2 u_2 A_2 \quad \leftrightarrow \quad \rho u A = \text{const} \quad (4.157)$$

- диференцијални облик

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{du}{u} + \frac{dA}{A} = 0 \quad (4.158)$$

##### Једначина количине кретања:

- алгебарски облик

$$p_1 A_1 + \rho_1 u_1^2 A_1 + \int_{A_1}^{A_2} p \, dA = p_2 A_2 + \rho_2 u_2^2 A_2 \quad (4.159)$$

- диференцијални облик

$$\rho u \, du = -dp \quad (4.160)$$

##### Једначина енергије:

- алгебарски облик

$$h_1 + \frac{u_1^2}{2} = h_2 + \frac{u_2^2}{2} \quad \leftrightarrow \quad h + \frac{u^2}{2} = \text{const} \quad (4.161)$$

- диференцијални облик

$$dh + u \, du = 0 \quad (4.159)$$



## 4.18 Једнодимензијска стационарна струјања гасова

У оквиру овог поглавља се проучавају једнодимензијска, стационарна струјања гасова у којима се промене густине гаса не могу занемарити. У овој књизи ће бити разматрани

- прав ударни талас и
- изентропска струјања гасова кроз конвергентне и конвергентно-дивергентне млазнике

### 4.18.1 Брзина звука и Махов број

Док ово читате, застаните на тренутак и размислите о ваздуху који вас окружује. Ваздух се састоји од огромног броја молекула који се крећу хаотично, различитим тренутним брзинама и поседују различиту енергију у различитим временским тренуцима. Наравно, готово је немогуће пратити кретања сваког од молекула, па се зато у кинетичкој теорији гасова временским осредњавањем дефинише средња брзина кретања молекула. Код идеалних гасова та брзина зависи само од температуре. Замислите сада да недалеко од вас експлодира мала петарда. Експлозијом се ослобађа одређена енергија коју апсорбују околни молекули ваздуха, што доводи до повећања брзине којом се они крећу. Ти молекули се сударају са околним молекулима, предајући им енергију коју поседују. На тај начин, међусобном интеракцијом молекула се енергија ослобођена детонацијом преноси кроз ваздух. Дакле, можемо сматрати да кроз околни ваздух путује "енергетски талас" неком брзином која на неки начин мора бити повезана са средњом брзином кретања молекула, јер међусобна интеракција молекула у ствари преноси ту енергију. Проласком кроз талас, повећање енергије молекула се макроскопски манифестује и малим променама притиска (самим тим и густине и температуре). Када талас прође поред вас, ту малу промену притиска региструје ваша бубна опна, та информација се преноси до вашег мозга као звук. Зато се брзина распростирања малих поремећаја назива *брзина звука*. Брзина звука је важна величина у проучавању стишљивих струјања флуида, и код идеалних гасова она се рачуна по обрасцу:

$$c = \sqrt{\gamma RT} \quad (4.162)$$

Као што можемо видети, она је пропорционална температури, и зависи од врсте гаса. Ту је у складу са претходном дискусијом, јер се средња брзина кретања молекула у кинетичкој теорији гасова одређена изразом  $\sqrt{8RT/\pi}$ . За ваздух на стандардним условима, брзина звука износи  $c_s = 340.9 \text{ m/s}$ .

Махов број у некој тачки струјног простора се дефинише као однос локалне брзине струјања и вредности брзине звука у тој тачки:

$$M = \frac{v}{c} \quad (4.163)$$

На основу вредности Маховог броја, струјања се могу поделити на:

$M < 1$	дозвучна струјања
$M = 1$	критичан режим струјања
$M > 1$	надзвучна струјања

Махов број има и одређено физичко значење. Замислимо флуидни делић који се креће неком брзином  $v$ . Кинетичка и унутрашња енергија по јединици масе флуидног делића су  $v^2/2$  и  $e$ . Однос ове две енергије је:

$$\frac{v^2/2}{e} = \frac{v^2/2}{c_v T} = \frac{v^2/2}{RT/(\kappa - 1)} = \frac{(\kappa/2) v^2}{c^2/(\kappa - 1)} = \frac{\kappa(\kappa - 1)}{2} M^2$$

Дакле, квадрат Маховог броја је пропорционалан односу кинетичке и унутрашње енергије - он је мера макроскопског кретања гаса у односу на хаотична кретања његових молекула.

#### 4.18.2 Тоталне и критичне величине стања

Посматрајмо неку произвољну тачку у струјном пољу, у којој се тренутно налази флуидни делић који се креће неком брзином  $v$ , и нека су вредности притиска, температуре и Маховог броја у тој тачки редом  $p$ ,  $T$  и  $M$ . Замислимо да тај флуидни делић **изентропски** успоримо до брзине  $v = 0$ . Вредности притиска, температуре и густине се у том случају означавају редом са  $p_0$ ,  $T_0$  и  $\rho_0$  и називају се тотални притисак, тотална температура и тотална густина. Дакле, у оним тачкама струјног простора у којима је  $v = 0$  владају тоталне вредности физичких величина. Такође, у свакој тачки у којој  $v \neq 0$  могу се на основу вредности струјних (статичких) величина  $(p, T, \rho)$  одредити одговарајуће тоталне вредности. Тотална брзина звука  $c_0$  је одређена изразом:

$$c_0 = \sqrt{\kappa R T_0}$$

Такође, тотална густина је повезана са тоталним притиском преко једначине стања:

$$\rho_0 = \frac{p_0}{R T_0}$$

Посматрајмо поново флуидни делић са почетка овог дела увода, и замислимо сада да флуидни делић **адијабатски** успоримо или убрзамо (у зависности од тога да ли се он креће дозвучно или надзвучно) до вредности  $M = 1$ . Вредности притиска, температуре и густине се у том случају означавају редом са  $p_k$ ,  $T_k$  и  $\rho_k$  и називају се критични притисак, критична температура и критична густина. Дакле, у оним тачкама струјног простора у којима је  $M = 1$  владају критичне вредности физичких величина. Такође, у свакој тачки у којој је  $M \neq 1$  се на основу вредности тоталних физичких величина у тој тачки могу одредити критичне вредности притиска, температуре и густине. Критична брзина звука се дефинише као:

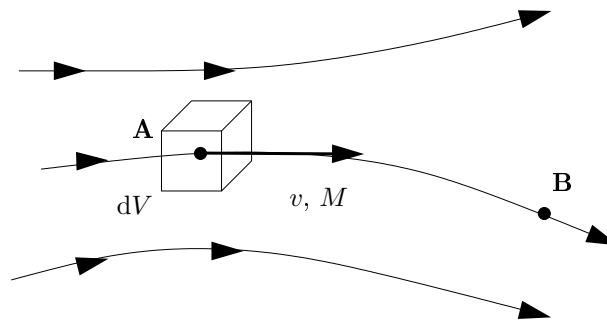
$$c_k = \sqrt{\kappa R T_k}$$

У неким ситуацијама је погодно користити **карактеристични Махов број**, који се дефинише на следећи начин:

$$M^* = \frac{v}{c_k}$$

### 4.18.3 Основне једначине у случају једнодимензијског стационарног струјања гаса

Основне једначине механике флуида (континуитет, количина кретања и енергија) се у случају стационарног једнодимензијског струјања гаса свде на алгебарске једначине које повезују вредности физичких величина у две различите тачке у струјном простору (тачније те тачке одговарају регионима - нпр. при струјању у цеви у сматрамо да у свакој тачки једног попречног пресека владају исте вредности физичких величина). Такође, те једначине описују и кретање флуидног делића, повезујући два стања у којима се он налази при свом кретању (слика 4.27 - стања у тачки А и тачки В).



**Слика 4.27.** Флуидни делић се креће дуж струјнице брзином  $\vec{v}$  која је једнака локалној вредности брзине у тачки у којој се у том тренутку времена налази флуидни делић.

До тих алгебарских једначина се може доћи на више начина (видети претходно поглавље), а један од њих је директно из интегралног облика основних једначина за одговарајући облик контролне запремине. У зависности од конкретног проблема који се посматра (да ли се ради о ударном таласу, струјању са разменом топлоте, итд.) те једначине ће се разликовати у појединим члановима, али ће њихова форма остати иста. Ми ћемо се овде задржати на једначини енергије, да би смо из ње добили релације између струјних, тоталних и критичних вредности физичких величина.

Једначина енергије, у случају када нема предаје топлоте (адијабатско струјање) је облика:

$$h_1 + \frac{v_1^2}{2} = h_2 + \frac{v_2^2}{2} \quad (4.164)$$

Пошто посматрамо струјања идеалних гасова, за које важи релација  $h = c_p T$ , једначина (4.164) се може написати и у облику:

$$c_p T_1 + \frac{v_1^2}{2} = c_p T_2 + \frac{v_2^2}{2} \quad (4.165)$$

Даље, имајући у виду да је  $c_p = \frac{\kappa R}{\kappa - 1}$  и  $c = \sqrt{\kappa R T}$ , долазимо до следећег облика једначине

енергије:

$$\frac{c_1^2}{\kappa - 1} + \frac{v_1^2}{2} = \frac{c_2^2}{\kappa - 1} + \frac{v_2^2}{2} \quad (4.166)$$

Пошто једначина (4.165) важи за адијабатско струјање, и ако имамо у виду дефиницију критичних вредности онда можемо доћи до везе између критичне брзине звука и брзине звука. У тачки 1 ћемо имати вредности  $c_1 = c$  и  $v_1 = v$ , а у тачки 2 је  $c_2 = c_k$  и  $v_2 = c_k$ .

$$\frac{c^2}{\kappa - 1} + \frac{v^2}{2} = \frac{c_k^2}{\kappa - 1} + \frac{c_k^2}{2}$$

$$\boxed{\frac{c^2}{\kappa - 1} + \frac{v^2}{2} = \frac{\kappa + 1}{2(\kappa - 1)} c_k^2} \quad (4.167)$$

Једначина (4.167) нам омогућава да на основу познатих вредности  $c$  и  $v$  у појединим тачкама струјног простора израчунамо вредности критичне брзине звука  $c_k$  у тим тачкама. Овде још једном треба напоменути да смо ми имагинарно убрзали или успорили флуидни делић до вредности  $M = 1$ ; другим речима, струјање које посматрамо не мора бити адијабатско рецимо од неке тачке А до тачке В (од пресека А до пресека В). У једначини (4.167) адијабатски процес се одвија у нашим мислима као део **дефиниције** критичне брзине звука. Примењено на тачку А то даје вредност  $c_{kA}$ , а на тачку В то даје вредност  $c_{kB}$ . Ако струјање није адијабатско онда је  $c_{kA} \neq c_{kB}$ . С друге стране, ако је струјање адијабатско онда критична брзина звука  $c_k$  има исту вредност у свакој тачки поља.

Вратимо се сада на дефиницију тоталних вредности физичких величина. Флуидни делић у нашим мислима изентропски успоравамо до вредности  $v = 0$ , па је  $T_1 = T$  и  $v_1 = v$ , док је  $T_2 = T_0$  и  $v_2 = 0$ :

$$\boxed{c_p T + \frac{v^2}{2} = c_p T_0} \quad (4.168)$$

Једначина (4.168) омогућује израчување тоталне температуре  $T_0$  у било којој тачки на основу вредности струјне температуре  $T$  и брзине струјања  $v$  у тој истој тачки. Овде треба напоменути да је дефиницији тоталне температуре коришћена једначина енергије за адијабатско струјање - у случају изентропског струјања једначина енергије има исти облик као за адијабатско. Дакле, можемо рећи такође да при дефинисању тоталне температуре флуидни делић адијабатски заустављамо. Међутим, за дефиницију тоталног притиска и тоталне густине ћемо сматрати да се ради о изентропском процесу.

Неколико веома корисних једначина за тоталне вредности се могу добити из једначине (4.168):

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{v^2}{2c_p T} = 1 + \frac{u^2}{2\kappa RT/(\kappa - 1)} = 1 + \frac{\kappa - 1}{2} \left(\frac{v}{c}\right)^2$$

$$\boxed{\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{\kappa - 1}{2} M^2} \quad (4.169)$$

Једначина (4.169) даје однос тоталне и струјне температуре у некој тачки струјног простора

у функцији Маховог броја  $M$  у тој тачки. За изентропски процес важе следеће релације:

$$\frac{p_0}{p} = \left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^\kappa = \left(\frac{T_0}{T}\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} \quad (4.170)$$

па се из једначина (4.169) и (4.170) добијају следеће релације:

$$\frac{p_0}{p} = \left(1 + \frac{\kappa-1}{2} M^2\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} \quad (4.171)$$

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \left(1 + \frac{\kappa-1}{2} M^2\right)^{\frac{1}{\kappa-1}} \quad (4.172)$$

Једначине (4.169), (4.171) и (4.172) омогућавају израчунавање тоталних вредности физичких величина ако су познати Махов број, температура, притисак и густина у некој задајој тачки струјног поља. При томе струјање не мора бити адијабатско или изентропско од једне то друге тачке - у свакој тачки се могу одредити и одговарајуће тоталне вредности. Нека је на пример струјање између тачака А и В неадијабатско (самим тим оно није ни изентропско) - онда је  $T_{0A} \neq T_{0B}$ ,  $p_{0A} \neq p_{0B}$  и  $\rho_{0A} \neq \rho_{0B}$ . С друге стране, ако је струјање адијабатско, онда је  $T_{0A} = T_{0B}$ , али је  $p_{0A} \neq p_{0B}$  и  $\rho_{0A} \neq \rho_{0B}$ . Коначно, ако имамо **изентропско струјање** онда **тоталне величине стања имају исте вредности у свакој тачки у струјном пољу**.

И на крају можемо повезати критичне и тоталне вредности. Имајући у виду да су критичне вредности дефинисане за  $M = 1$ , онда се из једначине (4.169) добија:

$$\frac{T_0}{T_k} = 1 + \frac{\kappa-1}{2} \implies \frac{T_k}{T_0} = \frac{2}{\kappa+1} \quad (4.173)$$

Из једначина (4.171) и (4.172) се на исти начин добија:

$$\frac{p_k}{p_0} = \left(\frac{2}{\kappa+1}\right)^{\kappa/(\kappa-1)} \quad (4.174)$$

$$\frac{\rho_k}{\rho_0} = \left(\frac{2}{\kappa+1}\right)^{1/(\kappa-1)} \quad (4.175)$$

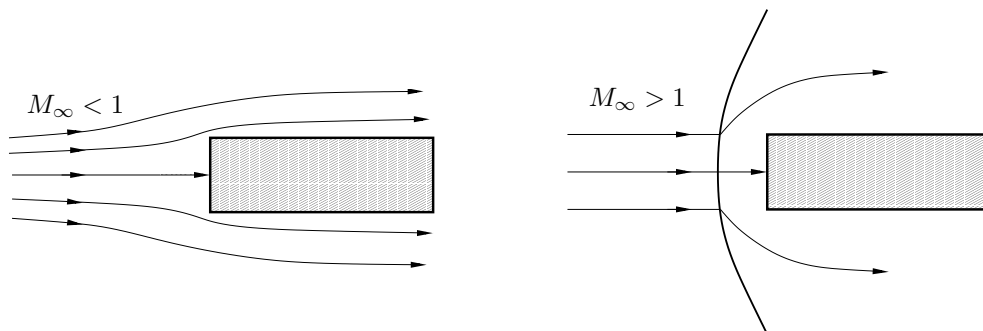
Пошто ћемо се углавном бавити струјањима ваздуха, за који је  $\kappa = 1.4$ , ови односи износе:

$$\frac{T_k}{T_0} = 0.833, \quad \frac{p_k}{p_0} = 0.528, \quad \frac{\rho_k}{\rho_0} = 0.634 \quad (4.176)$$

#### 4.18.4 Прав ударни талас

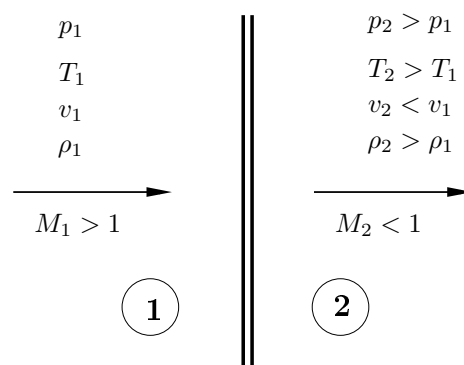
Прав ударни талас се јавља у надзвучној струји гаса ( $M > 1$ ). Ударни талас је веома мале ширине (реда величине  $10^{-5}$  mm за ваздух на стандардним условима), и у разматрањима он представља једну површ дисконтинуитета на којој долази до скоковитих промена притиска густине и температуре. **Струјање испред таласа је надзвучно ( $M > 1$ ), а иза таласа је подзвучно ( $M < 1$ ).** Формирање ударних таласа је повезано са брзином којом се поремећаји простиру кроз гас, а то је брзина звука.

То ћемо објаснити на следећем примеру. Посматрајмо цилиндар који се опструјава (а) подзвучно и (б) надзвучно (слика 4.28).



Слика 4.28. Изглед струјница у случају (а) дозвучног и (б) надзвучног опструјавања цилиндра

Пређимо за тренутак са макроскопског посматрања проблема на микроскопски - гас који струји се састоји од молекула, и поједини молекули ударају у и одбијају се од цилиндра. При томе долази до промене количине кретања молекула и њихове молекуларне енергије, и у свом хаотичном кретању, они преносе информацију осталим молекулима о присуству цилиндра. Та информација се преноси у свим правцима, па и у правцу супротном смеру опструјавања, брзином звука. Ако је опструјавање дозвучно, информација о присуству тела се преноси далеко уз струју гаса, тако да се струјнице прилагођавају телу на релативно великом растојању од тела. Насупрот томе, ако имамо надзвучно опструјавање (брзина струјања је већа од брзине којом се распростиру поремећаји), информација о присуству тела више не може да "путује" узструјно, и на веома малом растојању од тела се формира ударни талас. Тек проласком кроз ударни талас, долази до прилагођавања струјница облику тела.



Слика 4.29. Скица ударног таласа

Као што је већ речено, основне једначине у случају једнодимензијског, стационарног струјања гаса су алгебарске једначине које повезују вредности притиска, густине, брзине и температуре у два тачкама струјног простора. Код ударног таласа, обично су познате вредности испред таласа, а траже се вредности иза ударног таласа. Основне једначине при проучавању проблема ударног таласа су:

Једначина континуитета:

$$\rho_1 v_1 = \rho_2 v_2 \quad (4.177)$$

Једначина количине кретања:

$$p_1 + \rho_1 v_1^2 = p_2 + \rho_2 v_2^2 \quad (4.178)$$

Једначина енергије:

$$h_1 + \frac{v_1^2}{2} = h_2 + \frac{v_2^2}{2} \quad (4.179)$$

Овим релацијама се придодају и две конститутивне релације:

$$p = \rho R T \quad \text{и} \quad h = c_p T \quad (4.180)$$

Из једначина (4.177)-(4.180) се могу добити односи величина иза и испред таласа у функцији Маховог броја испред таласа  $M_1$ . Такође, вредност Маховог броја  $M_2$  иза таласа се може одредити на основу  $M_1$ . Сви ови односи за ваздух ( $\kappa = 1.4$ ) се обично дају табеларно - у приручнику је то табела Т-3. Такође, су пре почетка те табеле дати и одговарајући односи који се овде неће понављати.

**Важне ствари које треба запамтити:**

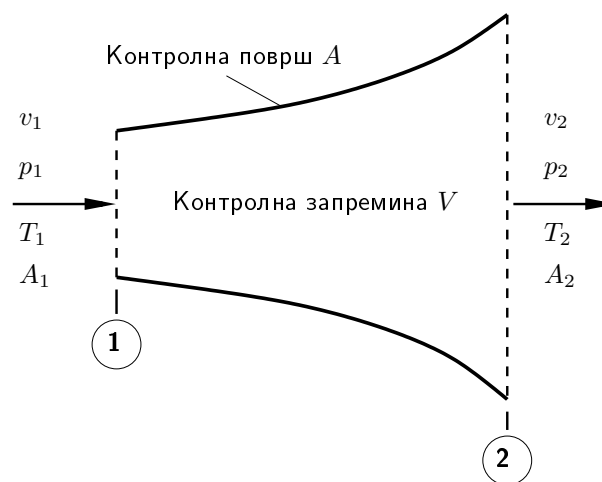
- Струјање испред таласа увек надзвучно,  $M_1 > 1$ , док је иза таласа увек  $M_2 < 1$ , тј. ударни талас може настати само у надзвучној струји гаса.
- Тотална температура је константна, тј.  $T_{01} = T_{02}$  јер је реч о адијабатском процесу.
- Струјање кроз ударни талас је праћено порастом ентропије - струјање **није** изентропско, па је  $p_{01} \neq p_{02}$  и  $\rho_{01} \neq \rho_{02}$ .

## 4.19 Изентропска струјања гасова кроз конвергентно-дивергентне млазнике

Млазници су релативно кратке цеви промењивог попречног пресека у којима се захваљујући управо промени пресека постижу и жељене промене физичких величина. Пошто су млазници кратке цеви при прорачуну се занемарују утицај трења и размене топлоте са околином, тако да се струјања кроз млазнике могу сматрати изентропским.

### 4.19.1 Основне једначине. Примена конвергентно-дивергентних млазника

Уз већ споменуте претпоставке на почетку овог поглавља, из основних једначина у интегралном облику се њиховом применом на контролну запремину са слике 4.30 добијају следеће једначине:



Слика 4.30. Контролна запремина у случају струјања кроз млазнике

1. Једначина континуитета

$$\rho_1 v_1 A_1 = \rho_2 v_2 A_2 \quad (4.181)$$

2. Једначина количине кретања

$$p_1 A_1 + \rho_1 u_1^2 A_1 + \int_{A_1}^{A_2} p \, dA = p_2 A_2 + \rho_2 u_2^2 A_2 \quad (4.182)$$

3. Једначина енергије

$$h_1 + \frac{v_1^2}{2} = h_2 + \frac{v_2^2}{2} \quad (4.183)$$

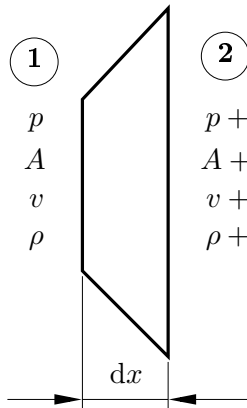
Из једначина (4.181)-(4.183) се могу добити и диференцијални облици основних једначина из којих се могу извући важни закључци везани за изентропско струјање кроз млазнике. Диференцијални облик једначине континуитета се може директно добити из једначина



хине (4.181):

$$\rho v A = \text{const} \implies \ln \rho + \ln v + \ln A = \text{const} \implies \boxed{\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dv}{v} + \frac{dA}{A} = 0} \quad (4.184)$$

Диференцијални облик једначине количине кретања ћемо добити применом једначине (4.182) на инфинитезималну контролну запремину.



$$p A + \rho v^2 A + p dA = (p + dp)(A + dA) + (\rho + d\rho)(v + dv)^2 (A + dA)$$

Занемарујући диференцијалне чланове другог и вишег реда, добија се:

$$A dp + A v^2 d\rho + \rho v^2 dA + 2\rho v dA = 0 \quad (4.185)$$

Ако развијемо једначину континуитета, тј.  $d(\rho v A) = 0$  и помножимо са  $v$ , добићемо следећу једначину:

$$\rho v^2 dA + \rho v A dv + A v^2 d\rho = 0 \quad (4.186)$$

Одузимањем једначине (4.186) од једначине (4.185) добија се следећа једначина:

$$\boxed{dp = -\rho v dv} \quad (4.187)$$

Једначина (4.187) се назива још и Ојлерова (Euler) једначина.

До диференцијалног облика једначине енергије можемо доћи на основу једначине (4.183), тј. из чињенице да је  $h + v^2/2 = \text{const}$ , одакле следи да је:

$$\boxed{dh + v dv = 0} \quad (4.188)$$

Користећи диференцијалне облике једначине континуитета и количине кретања може се доћи до важне релације која повезује промену брзине струјања са променом попречног пресека млазника. Једначину (4.188) можемо написати и као:

$$\frac{dp}{\rho} = \frac{dp}{d\rho} \frac{d\rho}{\rho} = -v dv \quad (4.189)$$

Подсетимо се, разматрамо изентропско струјање - тј. адијабатско, невискозно струјање (нема размене топлоте између флуида и околине, као ни дисипативних ефеката као што су утицај трења). Дакле, било која промена притиска,  $dp$  при струјању ја праћена одговарајућом изентропском променом густине,  $d\rho$ . Стога, можемо писати:

$$\frac{dp}{d\rho} = \left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s = c^2 \quad (4.190)$$

Из једначина (4.187) и (4.190) се добија:

$$c^2 \frac{d\rho}{\rho} = -v dv \implies \frac{d\rho}{\rho} = -\frac{v dv}{c^2} = -\frac{v^2 dv}{c^2 v} = -M^2 \frac{dv}{v} \quad (4.191)$$

Коначно, замењујући једначину (4.191) у једначину (4.184) добијамо:

$$\boxed{\frac{dA}{A} = (M^2 - 1) \frac{dv}{v}} \quad (4.192)$$

Из једначине (4.192) можемо извести веома важне закључке:

1. Нестипљиво струјање:  $M \rightarrow 0$

- Следи да је  $Av = \text{const}$  - добро позната једначина континуитета  $\dot{V} = \text{const}$  за нестипљиво струјање.

2. Дозвучно струјање:  $0 \leq M < 1$

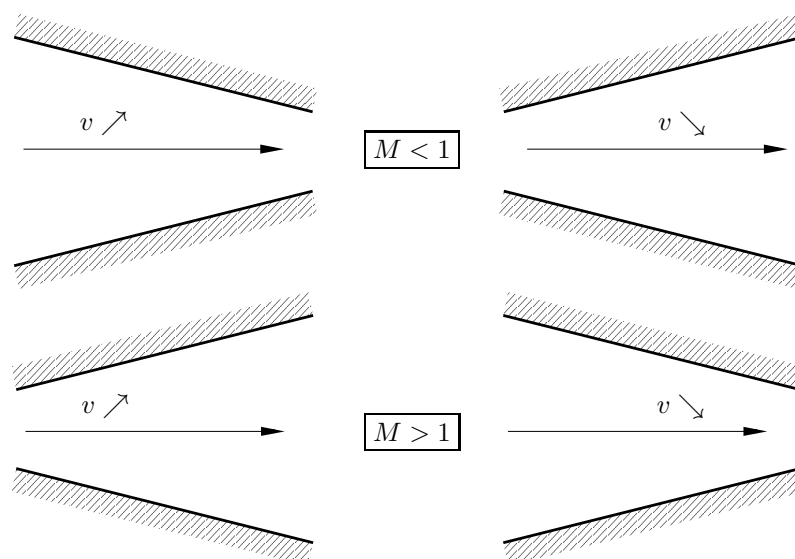
- Следи да је повећање брзине (позитивно  $du$ ) је повезано са смањењем попречног пресека (негативно  $dA$ ), и обрнуто. Као што можемо видети у овом случају имамо потпуно аналогичу са нестипљивим струјањем.

3. Надзвучно струјање:  $M > 1$

- Повећање брзине је повезано са повећањем попречног пресека, и обрнуто. Дакле, имамо суштинску разлику у поређењу са дозвучним струјањем;

4. Критично струјање:  $M = 1$

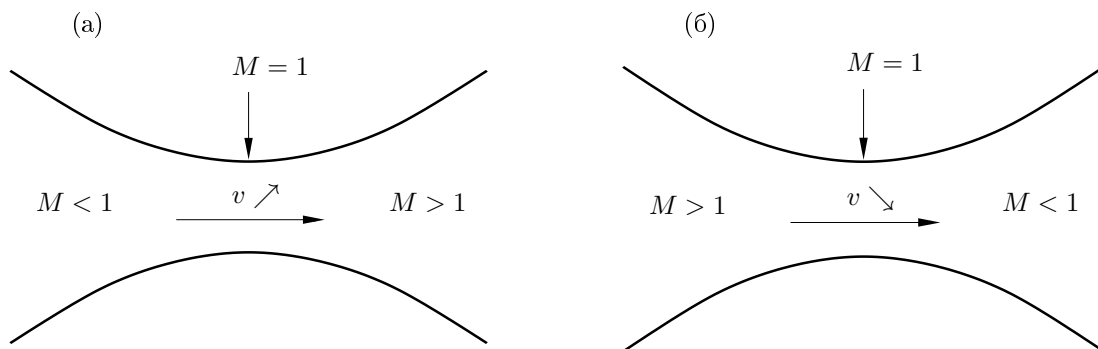
- Из једначине се добија да је  $dA/A = 0$ , што физички одговара минимуму или максимуму површине попречног пресека. Наравно, једино физички реално решење је минимална површина попречног пресека



Слика 4.31. Струјања у конвергентним и дивергентним струјним просторима

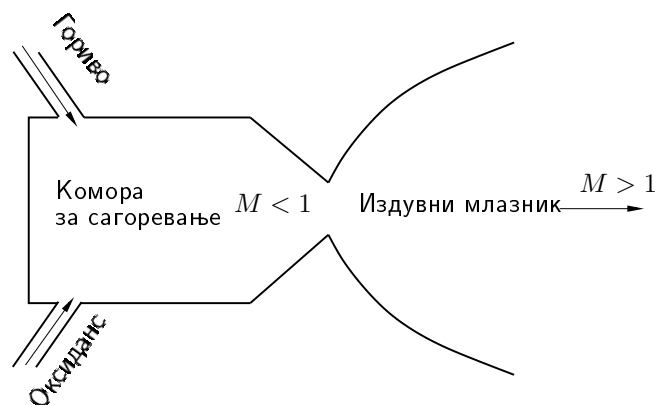
Претходна разматрања јасно показују следеће:

- Да би се извршила изентропска експанзија гаса од дозвучних до надзвучних брзина, он мора струјати кроз конвергентно-дивергентни струјни простор (**конвергентно-дивергентни млазник**), слика 4.32а. Такође, на основу закључка из тачке 4, у најужем пресеку који раздваја конвергентни и дивергентни део морамо имати вредност  $M = 1$  - у том случају је најужи пресек уједно и критични пресек. Најужи пресек се назива још и **грло млазника**.
- Да би се извршила изентропска компресија гаса од надзвучних до дозвучних брзина, гас такође мора струјати кроз конвергентно-дивергентни струјни простор (**надзвучни дифузор**). И у овом случају у грлу млазника мора бити  $M = 1$  (слика 4.32б).



Слика 4.32. Струјање у (а) конвергентно-дивергентном млазнику и (б) надзвучном дифузору

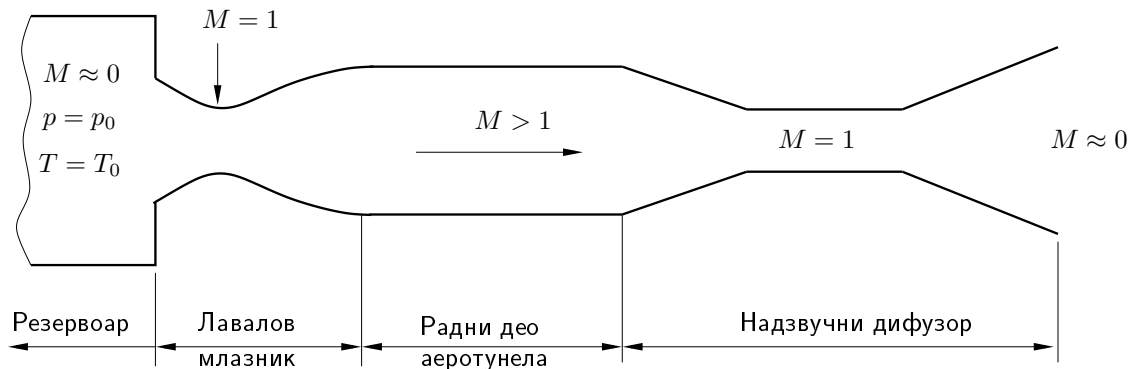
На основу свега реченог, јасно је захто ракетни мотори имају велике млазнике облика звона (слика 4.33) - издувни гасови врше експанзију до великих надзвучних брзина, повећавајући на тај начин потисак ракете.



Слика 4.33. Шематски приказ ракетног мотора

Принцип рада надзвучног аеротунела (слика 4.34) је такође заснован на претходним закључцима - код аеротунела гас који се налази у резервоару у стању мировања врши експанзију кроз Лавалов млазник<sup>2</sup> до надзвучних брзина у радном делу аеротунела, где се обављају испитивања на моделима, затим обавља компресију то малих дозвучних брзина, и потом излази у атмосферу.

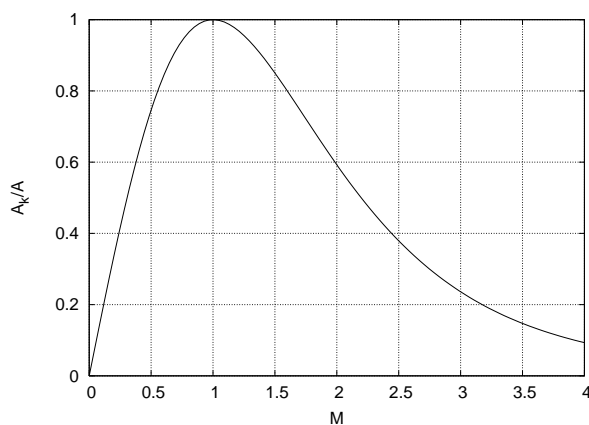
<sup>2</sup>Конвергентно-дивергентни млазник се назива још и Лавалов млазник по шведском научнику Карлу де Лавалу ( Carl G.P. de Laval). Он га је први користио приликом конструкције парне турбине крајем XIX века.



Слика 4.34. Шематски приказ надзвучног аеротунела

Када је у грлу Лаваловог млазника  $M = 1$  (грло млазника је уједно и критични пресек) онда кажемо да Млазник ради у **прорачунском режиму**. У задацима ћемо се бавити само прорачунским режимима, тј. у грлу млазника ће увек бити  $M = 1$ . При томе ћемо и претпоставити да је геометрија млазника позната. Генерално, намена Лаваловог млазника је да дозвучно струјање преведе у жељено надзвучно струјање - то је могуће само када је грло млазника уједно и критични пресек (види слику 4.32). Када млазник ради у прорачунском режиму постоји веза између површине критичног пресека (грла млазника) и површине неког произвољног пресека млазника, у функцији Маховог броја у произвољном пресеку. Та једначина гласи:

$$\left(\frac{A}{A_K}\right)^2 = \frac{1}{M^2} \left[ \frac{2}{\kappa + 1} \left( 1 + \frac{\kappa - 1}{2} M^2 \right) \right]^{(\kappa + 1)/(\kappa - 1)} \quad (4.193)$$

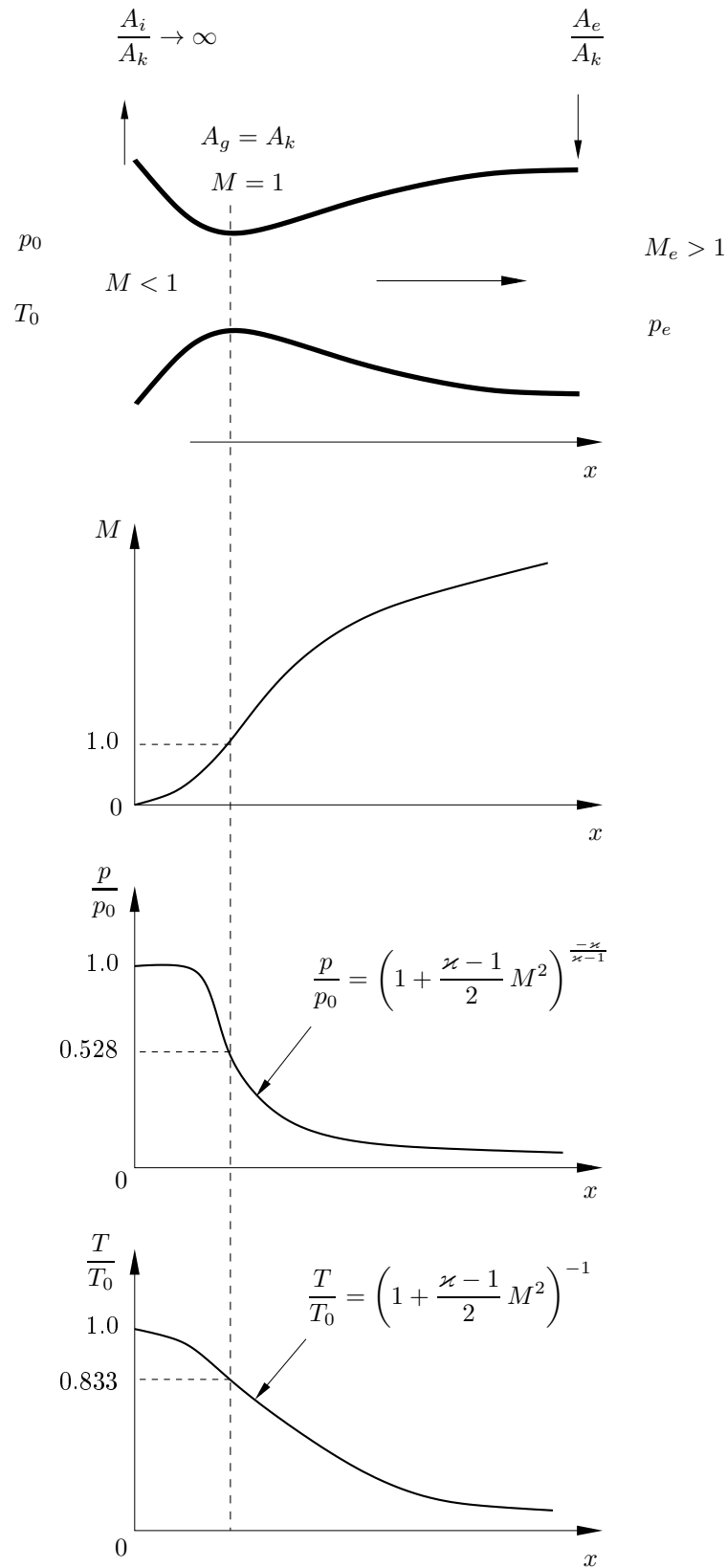
Слика 4.35. Веза између Маховог броја и односа  $A_k/A$  код Лаваловог млазника

Једначину можемо тумачити и на обрнут начин, тј. можемо изразити  $M = f(A/A_K)$ , или пак  $M = f(A_K/A)$  - Махов број на било ком месту у Млазнику је одређен односом површина попречног пресека на том месту и површине попречног пресека грла млазника у коме је  $M = 1$ . За један однос површина  $A_k/A$  постоје две вредности Маховог броја - једна је мања од јединице, док је друга вредност већа од јединице. Вредност  $M < 1$  одговара пресеку који се налази у конвергентном делу, док вредност  $M > 1$  одговара вредности у дивергентном делу. То се лепо може видети на дијаграму

на слици 4.35 на коме је приказана зависност  $A_k/A - M$  за  $\kappa = 1.4$ .

Дакле, у прорачунском режиму струјања се само на основу односа  $A/A_K$  могу одредити све физичке величине у било ком пресеку у млазнику. Прорачунски режим струјања је једино могуће изентропско надзвучно струјање које може настати у Лавалом млазнику (слика 4.36)! Да би се он остварио за неки одређени млазник, вредност притиска на излазу

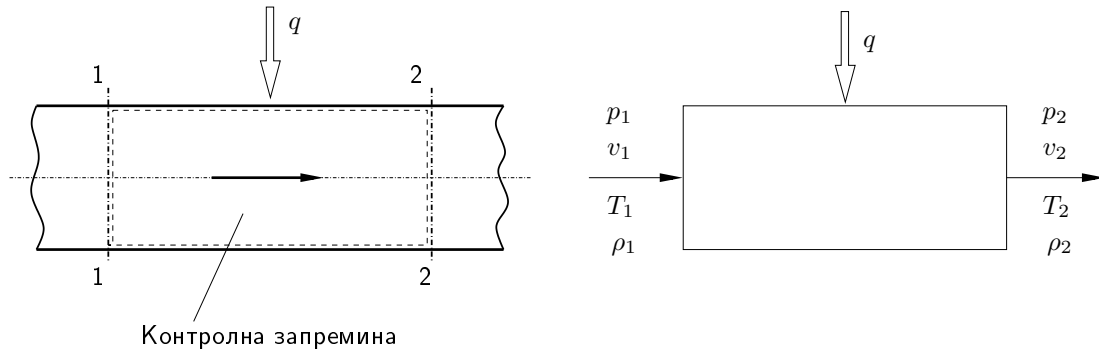
из млазника  $p_e$  мора имати вредност која је у потпуности одређена притиском у резервоару  $p_0$  и обликом млазника (односом  $A_e/A_k$ ).



**Слика 4.36.** Прорачунски режим струјања у Лавалом млазнику. Ово је једино изентропско надзвучно струјање које може настати у Лаваловом млазнику

## 4.20 Струјање невискозног гаса са довођењем топлоте

Посматра се стационарно струјање невискозног гаса кроз цев (слика 4.37) од пресека 1-1 до пресека 2-2. При томе се гасу доводи количина топлоте по јединици масе  $q$ .



**Слика 4.37.** Струјање гас кроз цев и одговарајућа контролна запремина. Гасу се предаје топлота од стране околине преко зида цеви.

Применом интегралних облика основних јдначина на контролну запремину са слике, добијају се следеће јдначине:

1. Јдначина континуитета

$$\rho_1 v_1 = \rho_2 v_2 \quad (4.194)$$

2. Јдначина количине кретања

$$p_1 + \rho_1 v_1^2 = p_2 + \rho v_2^2 \quad (4.195)$$

3. Јдначина енергије

$$h_1 + \frac{v_1^2}{2} + q = h_2 + \frac{v_2^2}{2} \quad (4.196)$$

У случају идеалног гаса ( $h = c_p T$ ), на основу познатих вредности физичких величина у пресеку 1-1, као и доведене количине топлоте  $q$ , могу се из јдначина (4.194)-(4.196), одредити вредности свих величина у пресеку 2-2. Из јдначине енергије, добијамо важну релацију која показује како довођење топлоте утиче на тоталну температуру гаса.

$$q = \left( c_p T_2 + \frac{v_2^2}{2} \right) - \left( c_p T_1 + \frac{v_1^2}{2} \right)$$

На основу дефиниције тоталне температуре, јдначина (4.169) долазимо до релације која повезује количину топлоте која се предаје (доводи) гасу и одговарајуће промене тоталне температуре при томе:

$$q = c_p T_{02} - c_p T_{01} = c_p (T_{02} - T_{01}) \quad (4.197)$$

Из последње јдначине можемо закључити следеће:

- Довођење топлоте ( $q > 0$ ) доводи до повећања тоталне температуре гаса ( $T_{02} > T_{01}$ )

- **Одвођење топлоте** од гаса ( $q < 0$ ) доводи до **смањења тоталне температуре гаса** ( $T_{02} < T_{01}$ ).

Из једначина (4.194)-(4.196) се могу добити односи између одговарајућих физичких величина у пресецима 1-1 и 2-2 ( $p_2/p_1$ ,  $T_2/T_1 \dots$ ) у функцији Махових бројева у тим пресецима. На пример, за однос температура се добија следећа једначина:

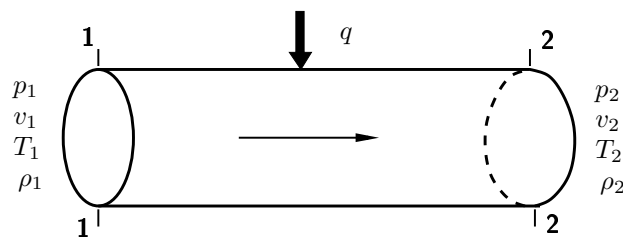
$$\frac{T_2}{T_1} = \left( \frac{1 + \kappa M_1^2}{1 + \kappa M_2^2} \right)^2 \left( \frac{M_2}{M_1} \right)^2 \quad (4.198)$$

Ради једноставније методологије прорачуна, користе се критичне вредности физичких величина као референтне. Нека је  $M_1 = 1$ ; одговарајуће величине у том случају у пресеку 1-1 имају критичне вредности:  $p_1 = p_k$ ,  $T_1 = T_k$ ,  $\rho_{01} = \rho_{0k} \dots$  Имајући ово у виду једначина (4.198) се своди на:

$$\frac{T}{T_k} = M^2 \left( \frac{1 + \kappa}{1 + \kappa M^2} \right)^2 \quad (4.199)$$

Слично се формирају и остали односи. За ваздух ( $\kappa = 1.4$ ), у зависности од Маховог броја одговарајуће вредности су дате у табели за *Струјање са разменом топлоте*, Приручник за прорачун струјања стишљивог флуида, стр. 29.

**ПРИМЕР 4.6:** Ваздух улази у цев константног попречног пресека, и при томе је  $M_1 = 0.2$ ,  $p_1 = 1 \text{ bar}$  и  $T_1 = 273 \text{ K}$ . Приликом струјања, гасу се доводи топлота по јединици масе  $q = 10^6 \text{ J/kg}$ . Израчунати  $M_2$ ,  $v_2$ ,  $p_2$ ,  $T_2$ ,  $\rho_2$ ,  $T_{02}$  и  $p_{02}$  на излазу из цеви.



На основу задатих вредности у пресеку 1-1, можемо одредити тотални притисак и тоталну температуру  $p_{01}$  и  $T_{01}$ . Користимо вредности из табеле за изентропско струјање (струјање није изентропско, али користимо табелу за изентропско струјање због дефиниције тоталних вредности.

$$M_1 = 0.2 \quad \Rightarrow \quad \frac{T_{01}}{T_1} = 1.008; \quad \frac{p_{01}}{p_1} = 1.0283$$

$$T_{01} = 1.008 T_1 = 1.008 \cdot 273 = 275.2 \text{ K}$$

$$p_{01} = 1.028 p_1 = 1.028 \cdot 1 = 1.028 \text{ bar}$$

$$c_p = \frac{\kappa R}{\kappa - 1} = \frac{1.4 \cdot 287}{1.4 - 1} = 1005 \text{ J/(kg} \cdot \text{K)}$$

На основу једначине (4.197) можемо израчунати тоталну температуру у излазном пресеку:

$$\boxed{T_{02}} = \frac{q}{c_p} + T_{01} = \frac{10^6}{1005} + 275.2 = \boxed{1270 \text{ K}}$$

Сада ћемо из табеле за *Струјање са разменом топлоте* (Приручник, стр. 30), за вредност  $M_1 = 0.2$  наћи следеће односе:

$$M_1 = 0.2 \implies \frac{T_1}{T_k} = 0.2066; \quad \frac{p_1}{p_k} = 2.2727; \quad \frac{p_{01}}{p_{0k}} = 1.2346; \quad \text{и} \quad \frac{T_{01}}{T_{0k}} = 0.1736$$

Махов број у пресеку 2 ћемо одредити на основу вредности тоталне температуре  $T_{02}$  на следећи начин:

$$\frac{T_{02}}{T_{0k}} = \frac{T_{02}}{T_{01}} \frac{T_{01}}{T_{0k}} = \frac{1270}{275.2} \cdot 0.1736 = 0.8013$$

На основу ове вредности у табели за *Струјање са разменом топлоте*, налазимо и вредност Маховог броја у пресеку 2-2:

$$\frac{T_{02}}{T_{0k}} = 0.8013 \implies \boxed{M_2 = 0.58}$$

Такође, из исте табеле налазимо и следеће односе:

$$M_2 = 0.58 \implies \frac{T_2}{T_k} = 0.8955; \quad \frac{p_2}{p_k} = 1.6316; \quad \frac{p_{02}}{p_{0k}} = 1.0826$$

На основу ових односа, добијамо вредности физичких величина у пресеку 2-2:

$$\boxed{T_2} = \frac{T_2}{T_k} \frac{T_k}{T_1} T_1 = 0.8955 \cdot \frac{1}{0.2066} \cdot 273 = \boxed{1183 \text{ K}}$$

$$\boxed{p_2} = \frac{p_2}{p_k} \frac{p_k}{p_1} p_1 = 1.6316 \cdot \frac{1}{2.2727} \cdot 1 = \boxed{0.718 \text{ bar}}$$

$$\boxed{p_{02}} = \frac{p_{02}}{p_{0k}} \frac{p_{0k}}{p_{01}} p_{01} = 1.0826 \cdot \frac{1}{1.2346} \cdot 1.028 = \boxed{0.902 \text{ bar}}$$

До ових вредности се може доћи и на другачији начин. У пресеку 2-2 знамо Махов број и тоталну температуру - на основу те две вредности можемо одредити струјну температуру у пресеку 2-2, коришћењем табеле за *Изентропско струјање*, Приручник, стр. 11:

$$M_2 = 0.58 \implies \frac{T_{02}}{T_2} = 1.0673 \quad T_2 = \frac{T_{02}}{1.0673} = \frac{1270}{1.0673} = 1190 \text{ K}$$

Као што можемо видети, нисмо добили исте бројне вредности (разлика је 7 K) - та разлика потиче услед заокруживања бројних вредности које смо добили, а такође и услед заокружених вредности које су дате у таблицама. На исти начин се може одредити и тотални притисак, за основу  $M_2$  и  $p_2$  у пресеку 2-2, или статички притисак на основу вредности  $M_2$  и  $p_{02}$  (коришћењем табеле за *Изентропско струјање*).

Гуштину у пресеку 2-2 ћемо одредити на основу једначине стања:

$$\boxed{\rho_2} = \frac{p_2}{R T_2} = \frac{0.718 \cdot 10^5}{287 \cdot 1183} = \boxed{0.2115 \text{ kg/m}^3}$$

Брзину струјања у пресеку 2-2 рачунамо на следећи начин:

$$\boxed{v_2} = M_2 c_2 = M_2 \sqrt{\kappa R T_2} = \boxed{400 \text{ m/s}}$$

На основу ових бројних вредности можемо доћи до следећих закључака:



1. За **надзвучно струјање** у пресеку 1-1, тј.  $M_1 > 1$ , у случају **довођења топлоте**:

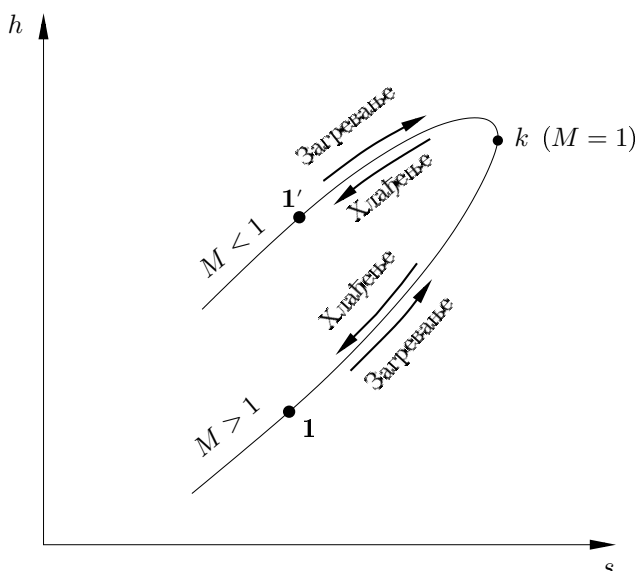
- Махов број опада,  $M_2 < M_1$
- Притисак расте,  $p_2 > p_1$
- Температура расте  $T_2 > T_1$
- Тотална температура расте,  $T_{02} > T_{01}$
- Тотални притисак опада,  $p_{02} < p_{01}$
- Брзина опада,  $v_2 < v_1$

2. За **дозвучно струјање** у пресеку 1-1, тј.  $M_1 < 1$ , у случају **довођења топлоте**

- Махов број расте,  $M_2 > M_1$
- Притисак опада,  $p_2 < p_1$
- Температура расте  $M_1 < 1/\sqrt{\kappa}$ , а опада за  $M_1 > 1/\sqrt{\kappa}$
- Тотална температура расте  $T_{02} > T_{01}$
- Тотални притисак опада,  $p_{02} < p_{01}$
- Брзина расте,  $v_2 > v_1$

У случају кад се одводи топлота, сви горе наведени трендови су супротни.

Важно је запамтити да довођење топлоте **увек** тежи да Махов број доведе до 1, тј. успорава надзвучно струјање, а убрзава дозвучно струјање. Погодно је приказати ову тенденцију у Молијеровом дијаграму ( $h - s$  дијаграм) - слика 4.11.



Слика 4.38. Рејлијева (Rayleigh) крива

Крива на слици се назива Рејлијева крива, и она се добија на основу задатих вредности у неком пресеку - ако су у пресеку 1-1 познате све физичке величине, онда Рејлијева крива која пролази кроз тачку 1 представља геометријски скуп тачака свих могућих стања у пресеку 2 у случају када се при струјању доводи или одводи топлота. Где ће се налазити тачка на кривој зависи од количине топлоте која се одводи или доводи. У тачки  $k$  имамо максимум ентропије, и то је критични пресек ( $M = 1$ ). Горња грана (у односу на  $k$ ) одговара дозвучном струјању, док доња грана одговара надзвучном струјању.

Нека је струјање у пресеку 1-1 надзвучно, са вредностима које одговарају тачки 1 на дијаграму. Загревање гаса ће довести до тога да се услови који владају у тачки 2 приближавају тачки  $k$ , уз смањење Маховог броја ка 1. Што је  $q$  веће, тачка 2 ће се налазити ближе тачки  $k$ . Коначно, постојаће нека

вредност  $q$ , за које ће се тачка 2 и  $k$  поклопити - у пресеку 2 је  $M = 1$ . Даље повећање доведене количине топлоте ће довести до промене вредности физичких величина у тачки 1.

Сада размотримо случај када је струјање у пресеку 1-1 дозвучно, што одговара тачки 1'. Ако се доводи топлота, тачка 2 ће се приближавати тачки  $k$ . Даље повећање  $q$  ће утицати на приближавање тачке 2 тачки  $k$ . За одређену вредност  $q$  тачка 2 ће се поклопити са тачком  $k$ . Такође, даље повећање  $q$  ће довести до промена у тачки 1'.

Имајући ово у виду, могуће је дозвучно струјање превести у надзвучно довођењем топлоте све док се у не достигне  $M = 1$ , а затим од тог пресека (критични пресек) треба одводити топлоту да би се Махов број повећавао до жељене вредности. Овакав начин је технички врло компликован, па се за превођење дозвучне струје у надзвучну углавном користи Лавалов млазник.

---

## 5 Динамика вискозног флуида

---

### 5.1 Стање напона и вискозне силе

- Модел напона вискозног флуида (глава 2)

$$\vec{p}_n = -p\vec{n} + \vec{p}_n^\eta \quad \vec{p}_n = P \cdot \vec{n} \quad \vec{p}_n^\eta = T \cdot \vec{n} \quad (5.1)$$

- Резултујућа површинска сила  $\vec{R}_n$  и сила услед вискозности  $\vec{R}_n^\eta$

$$\vec{R}_n = \iint_A \vec{p}_n \, dA = \iint_A -p\vec{n} \, dA + \iint_A \vec{p}_n^\eta \, dA = - \iint_A p\vec{n} \, dA + \vec{R}_n^\eta \quad (5.2)$$

$$\vec{R}_n^\eta = \iint_A \vec{p}_n^\eta \, dA = \iint_A T \cdot \vec{n} \, dA \quad (5.3)$$

#### Основна питања

- На који начин се испољава *утицај вискозности* у струјном пољу?
- Шта се суштиски мења у основним једначинама *динамике вискозног флуида* у односу на одговарајуће једначине струјања невискозног флуида?

#### Одговори

- Сва досадашња разматрања представљају како целине, тако и неопходне основе и припрему за анализирање струјања са *губицима*.
- *Квалитативни* аспекти вискозног струјања: појава и утицај *смицајних* (тангенцијалних) напона; одвајање струјања условљено градијентом притиска; провођење топлоте; ламинарно и турбулентно струјање.
- *Квантитавни* аспекти вискозног струјања: ефекти вискозности, провођења топлоте и дифузије масе; Навије-Стоксове (Navier-Stokes) једначине; једначине кретања неутновских флуида; једначина енергије вискозног нестишљивог и стишљивог флуида; теорија сличности и димензијска анализа; нумеричка решења и експерименти.
- *Једначина континуитета* има исти облика и невискозан и вискозан флуид.

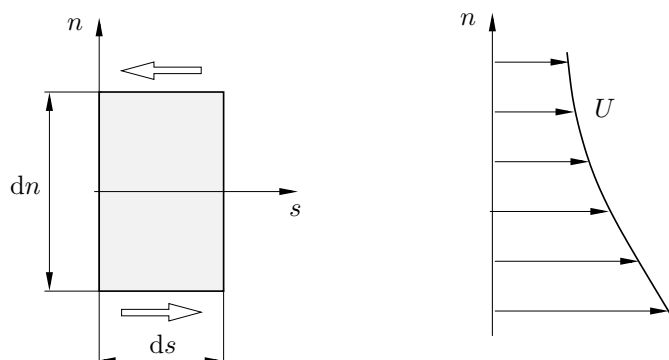
- *Једначина количине кретања*, на пример једначина (4.13) садржи нову силу, тј. силу услед вискозности (5.3), која допуњава десну страну једначине (4.13)
- *Једначина енергије*, на пример (4.13), допуњава се новим члановима који описују снагу вискозних сила.
- *Гранични услови* разматрани у потпоглављу 4.12.1 се због утицаја вискозности своде на услов **не клизања, лепљења** флуида на чврстој површи! Тако се услов (4.87) проширује и на тангентну компоненту брзине, тј. за  $n = 0$  је  $\vec{U} = 0!$  На непокретној чврстој контури ( $n = 0$ ) брзина флуидног делића једнака је нули ( $\vec{U} = 0$ ). Дакле, ако је  $U = U(n)$ , онда је  $U(n = 0) = 0!$

## 5.2 Начелно о утицају трења - вискозна сила

У глави 4 већ је напоменуто како се помоћу закона импулса тј. једначине количине кретања узимају у обзир губици услед трења. Они се појављују преко задатих вредности на граници контролне запремине, који се добијају мерењем или прорачуном. Овде се на једноставном примеру одређује утицај трења.

### 5.2.1 Квалитативна анализа утицаја трења и смицајни напон $\tau$

У циљу квантитативног одређивања утицаја трења суштински се прохирује теорија струјног влакна, тј. једнодимензијског струјања флуида на проблем вискозног флуида. Нека при томе тачке  $s$  и  $n$  означавају координате у правцу струјања и управно на тај правац (5.1). Овде је потребно одредити само утицај смицајног напона  $\tau$  који делује тангентно на правац струјања. Напомиње се да се у случају потпуне анализе појављује *тензор вискозних напона  $T$* ! О томе ће касније бити речи. Смицајни напон  $\tau$  изражава међусобни утицај појединих слојева и често настаје мала тешкоћа у тачном избору његовог предзнака. Анализа се даје за случај приказ на слици 5.1. Издвојена је произвољна елементарна маса флуида у произвољном профилу брзине у  $n$  правцу.



Слика 5.1. Анализа утицаја трења у моделу струјног влакна, које се налази у струјном пољу са произвољним профилем брзине  $U = U(s, n)$

Стрелице означавају смерове сила трења, којом *околни флуид*, дакле споља, делује на посматрану елементарну запремину флуида. Очигледно је да ови смерови зависе од

изабраног профила брзине. За случај приказан на слици 5.1 важи за силу трења  $dR_n^\eta \equiv dR_\tau$

$$\frac{\text{сила трења}}{\text{маса}} = \frac{dR_\tau}{dm} = \frac{[-(|\tau| + d|\tau|) + |\tau|]dsdb}{\rho dsdn db} = -\frac{1}{\rho} \frac{d|\tau|}{dn}, \quad (5.4)$$

где је  $db$  ивица елемента масе  $dm$  управна на раван цртежа. Интензитет напона смицања  $|\tau|$  задат је Њутновом хипотезом

$$|\tau| = \begin{cases} \eta \frac{\partial U}{\partial n}, & \text{за } \frac{\partial U}{\partial n} > 0 \\ -\eta \frac{\partial U}{\partial n}, & \text{за } \frac{\partial U}{\partial n} < 0. \end{cases} \quad (5.5)$$

За случај приказан на слици 5.1 је  $|\tau| = -\eta \frac{\partial U}{\partial n}$ , јер је  $\frac{\partial U}{\partial n} < 0$ , па се уврштавањем (5.5) у (5.4) добија

$$\boxed{\frac{dR_\tau}{dm} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial n} \left( \eta \frac{\partial U}{\partial n} \right)} \quad (R_n^\eta \equiv R_\tau - \text{сила трења}) \quad (5.6)$$

Очигледно је да се и за други профил брзине, на пример, за  $\partial U / \partial n < 0$ , опет добија исти израз (5.6).

У специјалном случају када је динамичка вискозност константна, тј. када је  $\boxed{\eta = const}$  релација (5.6) се поједностављује

$$\boxed{\frac{dR_\tau}{dm} = \frac{\eta}{\rho} \frac{\partial^2 U}{\partial n^2} = \nu \frac{\partial^2 U}{\partial n^2}} \quad (5.7)$$

**Сила трења зависи од другог извода брзине!** Разлог је очигледно у томе, што трење зависи од промене смицајног напона у правцу управном на правац струјања, тј. на струјно влакно.

### 5.2.2 Вискозне силе. Анализа сила у динамици вискозног флуида

- Масене (запреминске) силе: инерцијалне (локалне, конвективне); сила Земљине теже

- Површинске силе: силе притиска; *вискозне силе*.

Израз (5.7) за силу трења, тј. силу услед вискозности флуида показује да *вискозност повећава* ред диференцијалне једначине кретања! Једначина количине кретања *невискозног* флуида (Ојлерова једначина) је диференцијална једначина *првог реда*, док је у случају *вискозног* Њутновског флуида она *другог реда* (Навије-Стоксова једначина). Зато је у првом случају довољан један гранични услов за одређивање једне интегралске константе, док се у другом случају (вискозан флуид!) две константе интеграљења одређују из два гранична услова (услов пријањања, лепљења).

- **Силе** које делују на јединицу масе флуида приказане су у табели 5.1

У последњој врсти табеле 5.1 су појединачни чланови, који у другој врсти дефинишу различите силе, приказани помоћу изабраних карактеристичних референтних величина (размера) за време ( $t$ ), дужину ( $l$ ), брзину ( $U$ ), густину ( $\rho$ ) и притисак ( $p$ ) датог струјног поља.

Физички ефекат	Инерција		Земљина тежа	Притисак	Трење
	локална	конвективна			
$\frac{\text{сила}}{\text{маса}}$	$\frac{\partial U}{\partial t}$	$U \frac{\partial U}{\partial s}$	$g \frac{\partial z}{\partial s}$	$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s}$	$\nu \frac{\partial^2 U}{\partial n^2}$
Карактеристичне величине	$\frac{U}{t}$	$\frac{U^2}{l}$	$g$	$\frac{p}{\rho l}$	$\frac{\nu U}{l^2}$

**Табела 5.1.** Силе као типични представници одговарајућих утицаја и физичких ефеката у струјном пољу

Потребно је напоменути да се овде у правцима обе осе природног координатног система  $s$  и  $n$  користи иста размера за дужину ( $l$ ).

### 5.3 Карактеристични бездимензијски бројеви - међусобни односи сила у струјном пољу - закони сличности

Једначина (4.107) се за случај струјања вискозног флуида проширује, сагласно табели 5.1, и добија облик

$$\underbrace{\frac{\partial U}{\partial t}}_{\textcircled{1}} + U \underbrace{\frac{\partial U}{\partial s}}_{\textcircled{2}} + g \underbrace{\frac{\partial z}{\partial s}}_{\textcircled{3}} + \underbrace{\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s}}_{\textcircled{4}} - \nu \underbrace{\frac{\partial^2 U}{\partial n^2}}_{\textcircled{5}} = 0. \quad (5.8)$$

① - локална инерцијална сила

④ - сила притиска

② - конвективна инерцијална сила

⑤ - вискозна сила (сила трења)

③ - сила Земљине теже

#### 5.3.1 Закони сличности

Закони сличности дају одговор на питање под којим условима две физичке појаве дешавају на исти начин. У механици флуида је ово врло значајно, с обзиром на велику заступљеност моделских испитивања. Прорачунавање података са модела на објекат врши се применом теорије сличности и димензијске анализе. При томе се тежи динамичкој сличности, тј. једнакости односа сила у одговарајућим просторно-временским тачакама два струјна поља. Претпоставке за то су задовољене геометријске и кинематичке сличности. Потпуну сличност је, међутим, практично немогуће задовољити, па се при моделирању појава на моделу и објекту прибегава делимичној сличности. Дакле, закони сличности не могу

истовремено да буду примењени на све врсте сила. Због тога је сврсисходно ограничење на односе оних сила које су најважније у разматраном струјном процесу. Тако формиран односи карактеришу *сличност* појава и формирају параметре сличности, тј. *бездимензијске карактеристичне бројеве сличности*. Метода диференцијалних једначина је једна од метода, која је заснована на коришћењу бездимензијских облика диференцијалних једначина и граничних услова, и која доводи до закона сличности и услова моделирања струјања флуида. Једначина (5.8) се помоћу изабраних карактеристичних величина (размера) једноставним алгебарским операцијама доводи на *бездимензијски* облик. Однос коефицијената уз поједине чланове дефинише односе одговарајућих сила изражене помоћу карактеристичних бездимензијских бројева. Једнакост ових бројева у две појаве одређује њихову сличност, под условом да се почетни и гранични услови међусобно поклапају.

### 5.3.2 Формирање карактеристичних бездимензијских бројева и њихов физички смисао

Из пет типичних израза за силе приказане у табели (5.1) могу се формирати четири независна бездимензијска односа сила, тј. четири карактеристична броја. Ови *карактеристични бројеви* одређују карактер струјног поља и описују битне физичке ефекте. Из једначине (5.8) следи

#### 1. Струхалов број

$$\frac{\text{Локална инерцијална сила}}{\text{Конвективна инерцијална сила}} \propto \frac{U/t}{U^2/l} = \frac{l}{tU} \equiv \text{Sh} \quad (5.9)$$

Струхалов број Sh карактерише *нестационарне* струјне појаве, као на пример оне које се јављају у погонским и радним машинама са периодичим радним процесом. Струхалов број се појављује када се нестационарни члан  $\int_1^2 [\partial U(s, t) / \partial t] ds$  у *Бернулијевој* једначини (4.109) упоређује са стационарним члановима. Често је неопходно утврдити да ли једно струјање може да се посматра као стационарно! При томе мора бити задовољено  $\text{Sh} \ll 1$ .

#### 2. Фрудов број

За случај доминантног утицаја инерцијалних и гравитационих сила у стационарном струјању меродована критеријум сличности је Фрудов број.

$$\frac{\text{Конвективна инерцијална сила}}{\text{Сила Земљине теже}} \propto \frac{U^2/l}{g} = \frac{U^2}{gl} \equiv \text{Fr} \quad (5.10)$$

Делимична сличност у односу на Фрудов број је важна у свим оним случајевима у којима је битан утицај силе Земљине теже, на пример, за струјања у отвореним (са слободном површи) токовима.

#### 3. Ојлеров број

$$\frac{\text{Сила притиска}}{\text{Конвективна инерцијална сила}} \propto \frac{p/\rho l}{U^2/l} = \frac{p}{\rho U^2} \equiv \text{Eu} \quad (5.11)$$

У литератури се често уместо назива Ојлеров број користи и Њутнов број  $Ne$ , тј.  $Ne \equiv Eu$ . За случај струјања *стишљивог* флуида следи релација

$$Eu = \frac{p}{\rho U^2} = \frac{\kappa p}{\rho} \frac{1}{U^2} \frac{1}{\kappa} = \frac{1}{\kappa} \frac{c^2}{U^2} = \frac{1}{\kappa M^2} \quad (5.12)$$

која повезује Ојлеров број са *Маховим* (Mach, 1838-1916) бројем  $M = \frac{U}{c}$ .

#### 4. Рејнолдсов број

$$\frac{\text{Конвективна инерцијална сила}}{\text{Вискозна сила}} \propto \frac{U^2/l}{\nu U/l^2} = \frac{Ul}{\nu} \equiv Re \quad (5.13)$$

Рејнолдсов број је *важан* бездимензијски број који обухвата **утицај вискозности**! Он представља однос конвективних инерцијалних сила и вискозних сила. Он је основни критеријум сличности при струјању вискозног флуида. Ако је

$$\boxed{Re = \frac{Ul}{\nu} \gg 1 \quad (\text{Гранични слој - Прантл})!} \quad (5.14)$$

тј. ако је нелинеарна, конвективна инерцијална сила знатно већа од вискозне силе, онда треће (вискозност) *унутар* струјног поља има мали утицај. Вискозност игра битну улогу само у непосредној близини зида (услов лепљивости), тј. у граничном слоју. То је основна хипотеза Прантлове (Prandtl, 1857-1953) теорије граничног слоја (1904)! Ако је, међутим

$$Re = \frac{Ul}{\nu} \begin{cases} \sim 1 \\ < 1 \\ \ll 1 \end{cases} \quad (\text{Стоксова (Stokes, 1819-1903) струјања}) \quad (5.15)$$

онда је треће у целом струјном пољу значајно, тј. утицај вискозности се осећа у свој области струјања. Са вредностима  $Re < 1$  и  $Re \ll 1$  су обухваћена веома спора (лагана), тзв. Стоксова струјања. У таквим случајевима се чести могу у потпуности *занемарити* нелинеарни инерцијални чланови (конвективни део убрзања). Тада се силе притиска уравнотежавају са вискозним силама. Примери за то су лагана струјања веома вискозних уља. Треба напоменути да је релација (5.15) такође важна за струјање флуида екстремно мале густине, јер је тада и Рејнолдсов број  $Re = \rho Ul/\eta$  мали. Ово су случајеви кретања сателита на граници атмосфере, као и у лабораторији, на пример, код вакуум пумпи.

Најважнија *примена* карактеристичних бројева сличности је, као што је напоменуто, у *експерименталним истраживањима*. Резултати мерења и прорачуна на геометријски сличном умањеном моделу у аеротунелу или воденом каналу могу се прерачунати на главно извођење (*објекат*). Карактеристични и важни примери су моделска испитивања турбина и других турбомашина, као и различитих машинских и грађевинских уређаја и објеката.



## 5.4 Модел вискозног флуида. Општи изрази за површинске силе

### 5.4.1 Анализа површинских сила у вискозном флуиду

После детаљних разматрања основних једначина и њихових примена у глава 2 и 4, сврсисходно је извести опште математичке изразе за површинску силу у вискозном флуиду. Тако се, ако се посматра произвољно изабрана запремина  $V$  ограничена са површи  $A$ , израз за резултујућу површинску силу своди на:

$$\begin{aligned}\vec{R}_n &= \iint_A \vec{p}_n dA = \iint_A (\vec{p}_x n_x + \vec{p}_y n_y + \vec{p}_z n_z) dA = \iiint_V \left( \frac{\partial \vec{p}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{p}_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{p}_z}{\partial z} \right) dV \\ &= \iiint_V \left[ \left( \frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zx}}{\partial z} \right) \vec{i} + \left( \frac{\partial p_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zy}}{\partial z} \right) \vec{j} + \left( \frac{\partial p_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zz}}{\partial z} \right) \vec{k} \right] dV\end{aligned}\quad (5.16)$$

Из релације (5.16) следи да је елементарна површинска сила у правцу  $x$ -осе  $dR_{n,x}$  која делује на јединичну масу флуида унутар запремине  $V$  ограничене са површи  $A$  одређена изразом

$$\boxed{\frac{dR_{n,x}}{dm} = \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zx}}{\partial z} \right)}\quad (5.17)$$

Аналогно следе релације и за компоненте у  $y$  и  $z$  правцу елементарне површинске силе  $\vec{dR}_n(dR_{n,x}; dR_{n,y}; dR_{n,z})$ . Сагласно релацијама (2.18), (2.28), (2.29)

$$p_{xx} = \sigma_{xx} = -p + \sigma_{xx}^\eta, \quad p_{yx} = \tau_{yx}, \quad p_{zx} = \tau_{zx}, \quad p = -\frac{p_{xx} + p_{yy} + p_{zz}}{3}\quad (5.18)$$

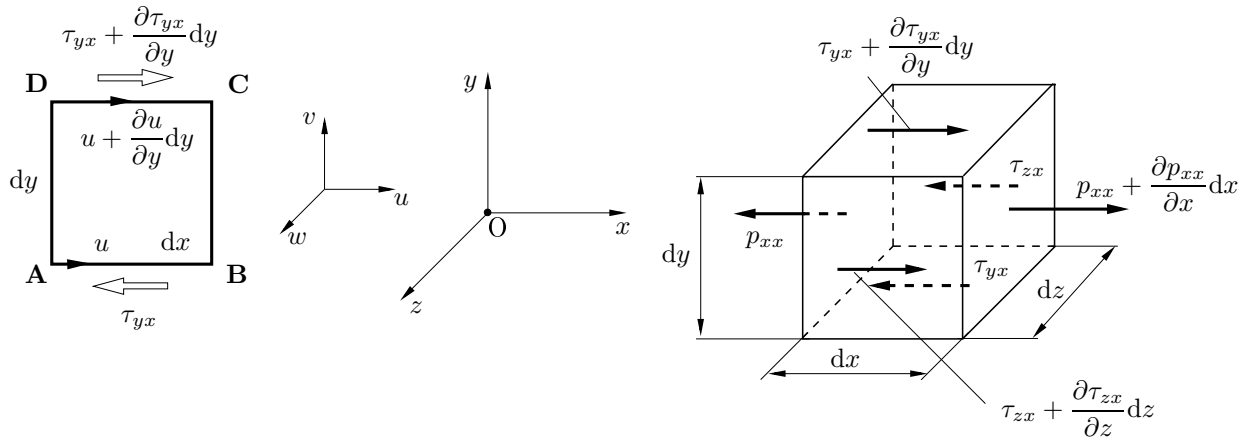
израз (5.17) помоћу (5.18) постаје

$$\boxed{\frac{dR_{n,x}}{dm} = \underbrace{-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}}_{(1)} + \frac{1}{\rho} \left( \underbrace{\frac{\partial \sigma_{xx}^\eta}{\partial x}}_{(2)} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right)}_{(3)}\quad (5.19)$$

① - Површинска сила, ② - Сила притиска, ③ - Вискозна сила (у правцу  $x$ -осе за јединичну масу) =  $dR_{n,x}^\eta$

На основу међусобне везе између вектора напона  $\vec{p}_n$  и вектора вискозних напона  $\vec{p}_n^\eta$  добијају се релације (5.1)-(5.3) које за модел вискозног флуида повезују резултујућу површинску силу  $\vec{R}_n$  са силом притиска (површинска сила услед притиска) и вискозном силом (површинском силом услед нормалних вискозних напона и смицајних, тј. тангенцијалних напона). Ова анализа омогућује формирање једначина количине кретања и енергије како у интегралном, тако и у диференцијалном облику за струјање вискозних њутновских или нењутновских флуида.

**5.4.2 Извођење диференцијалног израза (5.17), тј. (5.19) помоћу елементарне контролне запремине  $dV = dx dy dz$**



**Слика 5.2.** Инфинитезимална контролна запремина са нормалним и смицајним напонима у  $x$  правцу. Ознаке:  $p_{yx} = \tau_{yx}$ ,  $p_{zx} = \tau_{zx}$ ,  $p_{xx} = -p + \sigma_{xx}^\eta$ .

Површинска сила у  $x$  правцу, сагласно слици 5.2, гласи

$$dR_{n,x} = \left[ \left( p_{xx} + \frac{\partial p_{xx}}{\partial x} dx \right) - p_{xx} \right] dy dz + \left[ \left( \tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy \right) - \tau_{yx} \right] dx dz + \left[ \left( \tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz \right) - \tau_{zx} \right] dx dy = \left( -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xx}^\eta}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) dx dy dz. \quad (5.20)$$

Изрази (5.17), тј. (5.19) су идентични изразу (5.20), јер је  $dm = \rho dx dy dz$ .

**5.4.3 Вискозна сила за нестишљив њутновски флуид**

Главна карактеристика њутновског флуида је линеарна реолошка зависност између тензора напона и тензора брзине деформисања. Тако је у случају да је флуид нестишљив

- *Реолошке* зависности - реолошке конститутивне једначине.
- *Њутновски* флуиди - *линеарна* зависност између напона и брзина деформисања.
- *Тродимензијско* струјање - уопштавање једнодимензијске Њутнове хипотезе о смицајном напону (једначине (5.4)-(5.7)).
- *Уопштена Њутнова хипотеза о напонима* - *Стоксова хипотеза* (услови симетрије и линеарна зависност компонената тензора напона  $p_{ij}$  од компонената тензора брзине деформисања  $\dot{S}_{ij}$  - потпоглавље 4.4.2  $\Rightarrow \tau_{xy} = \tau_{yx} \propto \dot{S}_{xy}$ ).
- *Нестишљив* флуид ( $\rho = const$ ) - Стоксова хипотеза даје за претходно разматране

напоне следеће реолошке релације (сл. 5.2)

$$\begin{aligned}\sigma_{xx}^{\eta} &= 2\eta \frac{\partial u}{\partial x} \\ \tau_{yx} = \tau_{xy} &= \eta \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ \tau_{zx} = \tau_{xz} &= \eta \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)\end{aligned}\quad (5.21)$$

За остале три компоненте вискозних напона  $\sigma_{yy}^{\eta}$ ,  $\sigma_{zz}^{\eta}$  и  $\tau_{zy} = \tau_{yz}$  аналогно следе изрази ( $\rho = const$ ):

$$\sigma_{yy}^{\eta} = 2\eta \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \sigma_{zz}^{\eta} = 2\eta \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \tau_{zy} = \tau_{yz} = \eta \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right). \quad (5.22)$$

Уврштавањем реолошких једначина (5.21) у израз (5.19), тј. (5.20) и коришћењем једначине континуитета за нестишљив флуид ( $\text{div} \vec{U} = 0$ ) добија се за случај  $\eta = const$  следећа релација

$$\boxed{\frac{dR_{n,x}^{\eta}}{dm} = \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) = \nu \Delta u} \quad (5.23)$$

којом је одређена елементарна компонента вискозне силе у правцу  $x$  осе за јединичну масу флуида унутар запремине  $V$  ограничене са површи  $A$ . Остале две једначине за  $y$  и  $z$  осу које овде нису наведене добијају се цикличном пермутацијом. Такав систем од три једначине даје следећу векторску једначину

$$\boxed{\frac{d\vec{R}_n^{\eta}}{dm} = \nu \Delta \vec{U} \Rightarrow d\vec{R}_n^{\eta} = \nu \Delta \vec{U} dV \Rightarrow \vec{R}_n^{\eta} = \eta \iiint_V \Delta \vec{U} dV} \quad (5.24)$$

Резултујући вектор вискозне силе (5.3) за случај њутновског нестишљивог флуида и  $\eta = const$  дефинисан је изразом (5.24).

Овим је заокружена анализа сила која омогућава даља истраживања струјања вискозног њутновског нестишљивог флуида.

## 5.5 Интегрални и диференцијални облици једначине количине кретања

### 5.5.1 Једначина количине кретања. Навије-Стоксове једначине

Разматрање је исто као у поглављу 4.9. Где настаје разлика? У изразу за површинску силу  $\vec{R}_n$ ! Другим речима, у моделу напона за невискозан и вискозан флуид!

На основу једначина (4.67), (5.1) и (5.24) следи

$$\begin{aligned}\frac{D\vec{K}}{Dt} &= \vec{R}_m + \vec{R}_n \\ \frac{D}{Dt} \iiint_{V_m} \rho \vec{U} dV &= \iiint_{V_m} \rho \vec{f} dV + \oint_{A_m} -p \vec{n} dA + \iiint_{V_m} \eta \Delta \vec{U} dV.\end{aligned}\quad (5.25)$$

Применом потпуно истог поступка као за једначину (4.68), релација (5.25) се трансформише на облик

$$\iiint_V \left( \rho \frac{D\vec{U}}{Dt} - \rho \vec{f} + \text{grad} p - \nu \Delta \vec{U} \right) dV = 0$$

из кога се, због произвољне запремине  $V$ , добија диференцијална једначина

$\rho \frac{D\vec{U}}{Dt} = \rho \vec{F} - \text{grad} p + \eta \Delta \vec{U}$	L.Navier (1785 – 1836) G.G.Stokes (1819 – 1903)	(5.26)
---	--	--------

1. Израз (5.26) је **Навије-Стоксова једначина** за струјање *нестипљивог* флуида. Овој једначини се додаје *једначина континуитета* за нестипљив флуид,  $\text{div} \vec{U} = 0$ , чиме се добијају четири диференцијалне једначине за четири зависне променљиве  $\vec{U}(u, v, w)$  и  $p$ . Систем једначина је *затворен!* Напомиње се да је овде претпостављено  $\rho = \text{const}$  и због тога није потребна никаква додатна једначина.
2. За случај *невискозног* флуида ( $\eta = 0$ ) Навије-Стоксова једначина (5.26) се своди на *Ојлерову једначину* (4.69)!
3. *Ред* Навије-Стоксове једначине је *виши* од реда Ојлерове једначине. То је очигледно због чланова услед *вискозности*. То омогућује да се *гранични услов* (лепљивост!) на чврстој површи може испунити.
4. Навије-Стоксове једначине су **нелинеарне** на исти начин као и Ојлерове једначине. Исти тип *нелинеарности!* Узрок је у конвективним члановима, тј. у нелинеарним инерцијалним силама.
5. Егзактна решења Навије-Стоксових једначина су позната само за мали број проблема струјања. Неки од тих примера биће приказани у овој глави, у циљу упознавања основних својстава струјања вискозног нестипљивог флуида.
6. Скаларни облици једначине (5.26) у различитим координатним системима (Декартовим, цилиндричним, сферним и ортогоналним генерализованим) приказани су књизи Чантрак С., Хидродинамика, МФ Београд (2005). Овде се наводи израз за  $x$ -осу Декартовог правоуглог координатног система:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = F_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (5.27)$$

Остале две једначине за  $y$  и  $z$  осу добијају се цикличном пермутацијом. Све три скаларне једначине могу се обухватити индексним записом

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = F_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j}, \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (5.28)$$

### 5.5.2 Закон количине кретања у интегралном облику - примена у техничкој пракси

Физичко-математичка анализа дата је у поглављу 4.9. Квалитативна разлика је само у физичком садржају члана (4) у једначини (4.71), тј. члана (IV) у једначини (4.72). Разлог за то је *увођење вискозности!* Дакле, опет *стање напона* и карактер резултујуће *површинске силе*  $\vec{R}_n$ . С тим у вези, потребно је у једначинама (4.67)-(4.72) уместо површинске силе за *невискозан* флуид уврстити израз за *вискозан* флуид, тако да се сагласно релацијама (5.1) и (5.3) добија

$$\boxed{\begin{array}{l} \vec{R}_n = \iint_A -p\vec{n}dA \\ \text{(невискозан флуид)} \end{array}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\begin{array}{l} \vec{R}_n = \iint_A (-p\vec{n} + \vec{p}_n^\eta) dA = \iint_A (-p\vec{n} + T \cdot \vec{n}) dA \\ \text{(вискозан флуид)} \end{array}} \quad (5.29)$$

Уврштавањем израза (5.29) у једначину (4.72) као меродавног израза за члан (IV) следи једначина

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho \vec{U} dV = - \oiint_A \rho \vec{U} (\vec{U} \cdot \vec{n}) dA + \iiint_V \rho \vec{F} dV - \oiint_A (p\vec{n} + \vec{p}_n^\eta) dA.} \quad (5.30)$$

у којој је вискозна сила дефинисана релацијом (5.3)

$$\boxed{\begin{array}{l} \vec{R}_n^\eta = \int_A \vec{p}_n^\eta dA = \int_A T \cdot \vec{n} dA \\ \text{(сила услед вискозности)} \end{array}} \quad T = \begin{pmatrix} \sigma_{xx}^\eta & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy}^\eta & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{xy} & \sigma_{zz}^\eta \end{pmatrix} \quad (5.31)$$

Једначина количине кретања дата је изразом (5.30). Њен физички смисао анализиран је у поглављу 4.9. Додатни ефекат услед *вискозности* обухваћен је релацијом (5.31), у којој се појављују *нормални* напони услед вискозности ( $\sigma_{xx}^\eta$ ,  $\sigma_{yy}^\eta$ ,  $\sigma_{zz}^\eta$ ) и *тангентни* (смицајни) напони ( $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ ,  $\tau_{xz} = \tau_{zx}$  и  $\tau_{yz} = \tau_{zy}$ ).

#### Стационарно струјање у пољу силе Земљине теже

У овом случају једначина количине кретања (5.30) гласи

$$\boxed{\oiint_A \rho \vec{U} (\vec{U} \cdot \vec{n}) dA + \oiint_A p\vec{n}dA - \oiint_A T \cdot \vec{n} dA + \iiint_V \rho \vec{g} dV = 0} \quad (5.32)$$

Погодним избором контролне запремине  $V$  и контролне површи  $A$  једначина (5.32) је веома погодна за решавање проблема у пракси и за одеђивање **сила** како при унутрашњем (цеви, канали, млазници) тако и при спољасњим (опструјавање тела) струјањима.

#### Струјање Њутновског нестишљивог флуида

У овом случају користи се једначина *континуитета* у облику  $\text{div} \vec{U} = 0$  и конститутивне реолошке једначине за Њутновски флуид, тј. *линеарне* међузависности компонената тен-

зора напона и компонената тензора брзине деформисања, које су дефинисане релацијама (5.21) и (5.22). Те релације могу да се обједине линеарном зависношћу у матричном облику  $T = 2\eta\dot{S}$  тако да једначина количине кретања за Њутновски нестишљив флуид гласи

$$\boxed{\iiint_V \frac{\partial}{\partial t} (\rho \vec{U}) dV = - \iint_A [\rho \vec{U} (\vec{U} \cdot \vec{n}) + p \vec{n} - 2\eta \dot{S} \cdot \vec{n}] dA + \iiint_V \rho \vec{F} dV.} \quad (5.33)$$

Величина  $\dot{S}$  је тензор брзине деформисања чије су компоненте  $\dot{S}_{ij}$  дефинисане изразом (4.14), тј.  $\dot{S}_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$ . Дакле, помоћу релација (5.21) и (5.22) тензор *вискозних напона*  $T$ , тј. матрица напона услед вискозности (5.31) за **Њутновски нестишљив флуид** гласи

$$\begin{array}{l} \boxed{\begin{array}{l} T = 2\eta\dot{S} \\ p_{ij}^\eta = 2\eta\dot{S}_{ij} \end{array}} \\ p_{ij}^\eta = \begin{cases} \sigma_{ij}^\eta, & i = j \\ \tau_{ij}, & i \neq j \end{cases} \end{array} \iff T = \begin{pmatrix} 2\eta \frac{\partial u}{\partial x} & \eta \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \eta \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \eta \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & 2\eta \frac{\partial v}{\partial y} & \eta \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \\ \eta \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) & \eta \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) & 2\eta \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (5.34)$$

У претходним поглављима није било потребно наглашавати *ламинарни* или *турбулентни* карактер струјања. Међутим, за даљу анализу и прорачун струјања потребно је утврдити да ли је једно струјање ламинарно или турбулентно, То још једном указује на значању улогу инерцијалних и вискозних сила и струјном пољу. Њихов количник, сагласни једначини (5.13), дефинише **Рејнолдсов број**, који је основни критеријум за прелазак ламинарног струјања у турбулентно! Овим се бави линеарна и нелинеарна теорија хидродинамичке стабилности.

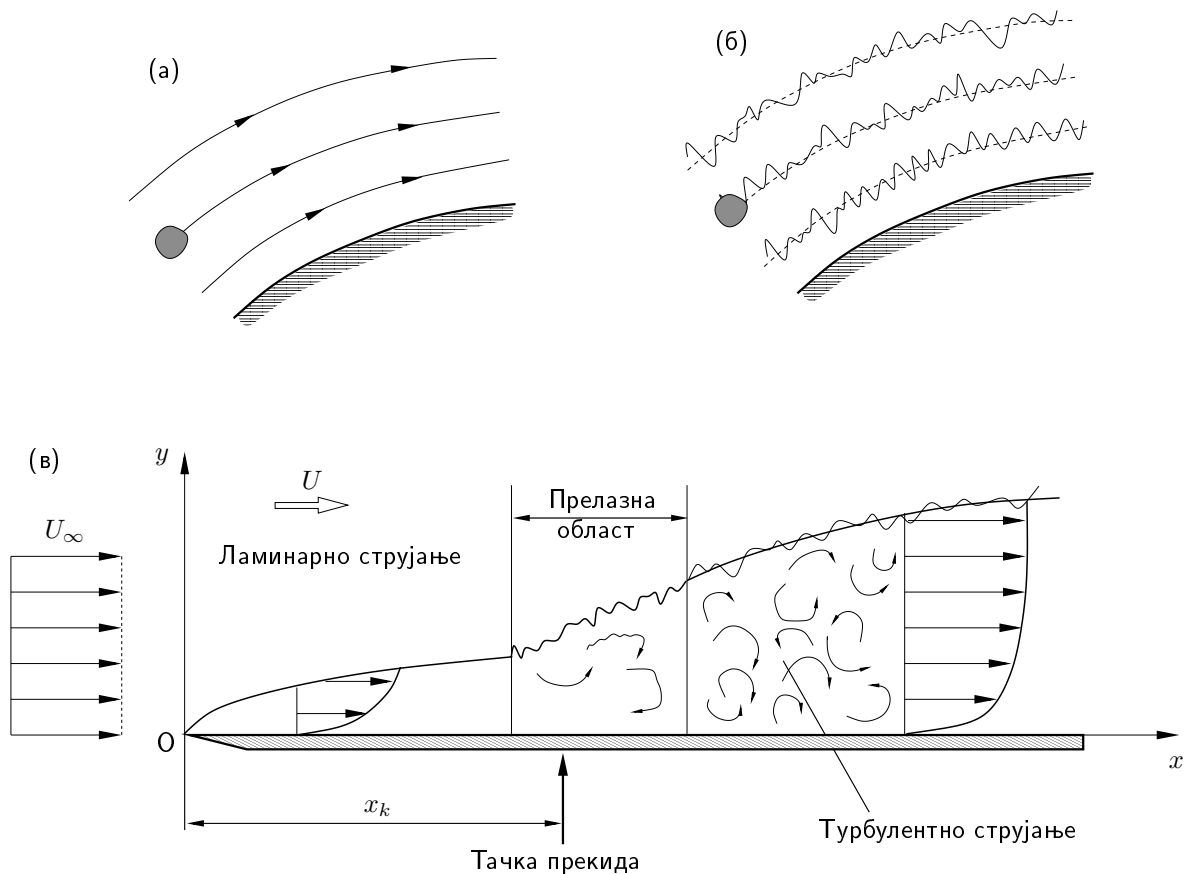
## 5.6 Режији струјања - ламинарна и турбулентна струјања

### 5.6.1 Ламинарна струјања

Струјање у слојевима (lamina - слој). Струјнице односно путање флуидних делића прате геометрију струјног простора - уређено регуларно слојевито струјање (5.3)

### 5.6.2 Хидродинамичка стабилност

Проблем стабилности ламинарног струјања је у суштини проблем настанка турбуленције. Поремећаји којима се излаже првобитно струјање, доводе до знатног локалног повећања *конвективних инерцијалних сила* (конвективног дела материјалног извода брзине  $(\vec{U} \cdot \nabla) \vec{U}$ ). *Вискозне силе* пригушују настале поремећаје и механизмом трења врше дисипацију енергије. Потпун одговор на питање настанка турбуленције још увек не постоји! Да ли ће ламинарно струјање прећи у неки други облик ламинарног струјања, или ће услед доминантног утицаја вискозности успоставити исти првобитни ламинарни режим, или ће пак, доћи до појаве *турбуленције* зависи од многих фактора. У практичним прорачунима се говори о вредностима **критичног Рејнолдсовог броја** при којима у различитим кла-



**Слика 5.3.** Ламинарно и турбулентно струјање. (а) Трајекторије при ламинарном струјању; (б) Турбулентно струјање - нерегуларно кретање и трајекторије, интензивни процеси турбулентног преноса материје, импулса и енергије у правцу управном на главно струјање због флукуационих брзина; (в) Прелазак ламинарног у турбулентно струјање ( $Re_k = U_\infty x_k / \nu$  - критичан Рејнолдсов број;  $x_k$  - критична дужина).

сама унутрашњих и спољасњих струјања долази до преласка из ламинарног у турбулентно струјање (сл. 5.3в).

### 5.6.3 Турбулентна струјања

Турбулентна струјања су нерегуларна, хаотична струјања, увек нестационарна, тродимензијска и дисипативна. Путање делића се међусобно мешају, попречне флукуације брзина доводе до механизма интензивне турбулентне размене и до знатно равномернијег профила брзине него у случају ламинарног струјања (сл. 5.3):

$$\left[ \left( \frac{\partial U}{\partial y} \right)_{y=0} \right]_{\text{турбулентно}} > \left[ \left( \frac{\partial U}{\partial y} \right)_{y=0} \right]_{\text{ламинарно}},$$

при чему  $(\partial U / \partial y)_{y=0}$  означава извод брзине на чврстој површи. То значи да су **утицаји трења знатно израженији**, тј. јачи у **турбулентном** струјању.

## 5.7 Физичко-математичке основе турбулентних струјања

### 5.7.1 Својства турбулентних струјања

Већина струјања у техничкој пракси и у природи су турбулентна. Овде се чисто феноменолошки набрајају најважнији аспекти турбуленције.

- Турбулентна струјања настају при Рејнолдсовим бројевима *већим* од *критичног Рејнолдсовог броја*  $Re_k$ , који има различите вредности за разне класе струјних проблема. На пример, потпуно развијено струјање у цеви је турбулентно ако је  $Re = Re_k = \rho U_s D / \eta \geq 2300$  ( $\rho$  - густина флуида,  $U_s$  - средња брзина,  $D$  - пречик цеви и  $\eta$  - динамичка вискозност флуида).
- Турбуленција је по правилу *различитог интензитета* у разним доменима струјног поља. Интензитет турбуленције је велики у областима великих градијената (временски осредњених) брзина, на пример у граничном слоју у близини зида. Овоме претходи ламинарно струјање, које услед нестабилности прелази у турбуленцију.
- Турбуленција се одликује *повећаном разменом импулса* (количине кретања) у правцу управном на правац главног струјања, што се између осталог, испољава у *повећаним отпорима трења!*
- За случај да у неком струјању дуж чврсте површи постоји опасност одвајања струјања (када притисак у низструјном правцу расте), повећана турбулентна размена импулса у области зидне турбуленције значајно *помера тачку одвајања низводно* и тиме смањује област одвајања и вртложни трад. Дакле, структура турбулентног струјања је мање осетљива на градијент притиска него што је то случај код ламинарног струјања.
- Турбуленција у општем случају изазива *интензивно мешање* и размену материје, што је од великог значаја у вишефазним струјањима и различитим технолошким и хемијским процесима, као и струјањима у животној средини.

### 5.7.2 Рејнолдсов експеримент

На слици 5.4 су приказана два суштински различита режима (стања) струјања. Хаген (Hagen) их је описао квалитативно (1852), а Рејнолдс (Reynolds) први пут квантитативно доказао (1883).

1. **Ламинарно струјање.** Рејнолдсов број је мали, тј.  $Re = U_s d / \nu < 2320$ . *Макроскопски* посматрано струјање се обавља у *паралелним слојевима* (lamina - слој). *Микроскопски*, тј. молекуларно настаје нерегуларна размена импулса између појединих слојева, што доводи до унутрашњег трења.
2. **Прелазна област.** Рејнолдс је истраживао *прелазак* ламинарног у турбулентно струјање и утврдио да он зависи само од карактеристичног броја  $U_s d / \nu$ . Рејнолдс је претпоставио да се при томе ради о *проблеми стабилности*. Ламинарно струјање при већим Рејнолдсовим бројевима постаје нестабилно, тј. мали поремећаји, који су присутни у





**Слика 5.4.** Рејнолдсов експеримент. Фарба се у облику струјног влакна из млазника убацује у флуид кинематичке вискозности  $\eta$  који струји *средњом брзином*  $U_s = 4\dot{V}/d^2\pi$  кроз цев пречника  $d$ . Запремински проток  $\dot{V}$  и други струјни и геометријски параметри су мењани у многобројним експериментима.

природи и техници, својим амлитудно-фреквентним карактеристикама изазивају таква дејства која ламинарно струјање преводу у турбулентно.

- 3. Турбулентно струјање.** Рејнолдсов број је велики, тј.  $Re = U_s d / \nu > 2320$ . У овом случају настаје, супротно од ламинарног, један макроскопски, видљив пренос путем турбулентних елемената (молова масе, различитих вртлога и вртложних структура). **Турбуленција је нестационарна просторно-временска еволуција случајног кретања сложених вртложних структура!**

### 5.7.3 Рејнолдсова статистика

Рејнолдсов опис турбулентног струјања подразумева разлагање **нестационарне** компоненте брзине, на пример  $u(x, y, z, t)$ , на **просечну**, временску средњу вредност  $\bar{u}(x, y, z)$  и на **флукуациону** брзину  $u'(x, y, z, t)$  сагласно слици 5.5:

$$u(x, y, z, t) = \bar{u}(x, y, z) + u'(x, y, z, t). \quad (5.35)$$

Временска средња вредност - **просечна вредност** - вредност осредњена у времену подразумева *вредност физичке величине њеним осредњавањем у времену у фиксној тачки струјног простора!*

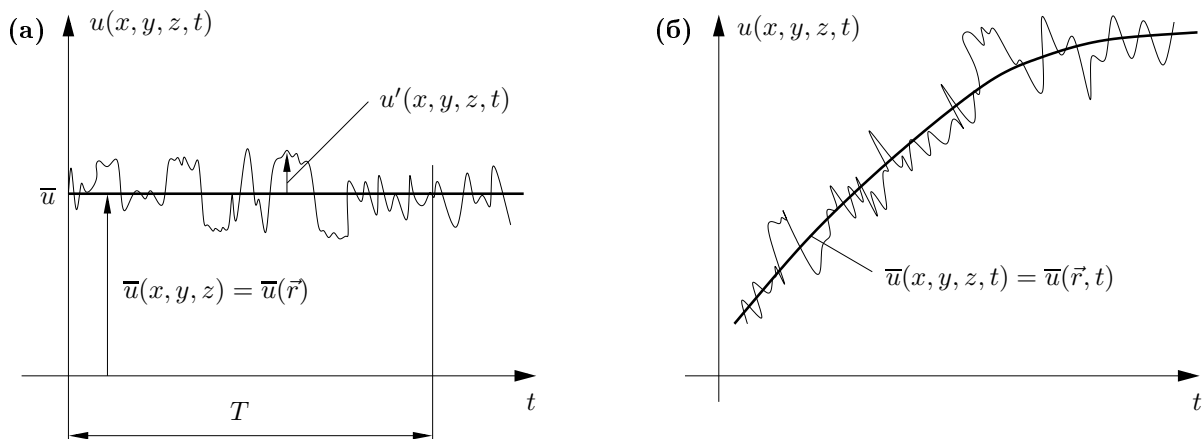
Временски осредњена брзина, тј. *просечна брзина у фиксној тачки* дефинисана је изразом

$$\bar{u}(x, y, z) = \frac{1}{T} \int_0^T u(x, y, z, t) dt \quad (5.36)$$

Период осредњавања  $T$  се при томе бира тако да нестане зависност  $\bar{u}$  од времена. Другим речима,  $T$  је толико велико да његово даље повећавање не доводи до промене  $\bar{u}$ . Период осредњавања зависи од статистичких својстава случајно промењиве!

Аналогно (5.36) се одређују и  $\bar{v}$  и  $\bar{w}$ . Дефиниција (5.36) има за последицу да су временски осредњене вредности флукуационих брзина једнаке нули:

$$\overline{u'} = \frac{1}{T} \int_0^T u' dt = \frac{1}{T} \int_0^T (u - \bar{u}) dt = \bar{u} - \bar{u} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\overline{u'} = \overline{v'} = \overline{w'} = 0} \quad (5.37)$$



**Слика 5.5.** Турбулентно струјање -брзина као показивање (сигнал) усијане жице током времена у фиксној тачки: **(а)** Стационарно турбулентно струјање ( $\bar{u} = const \Leftrightarrow \partial \bar{u} / \partial t = 0$ ); **(б)** Нестационарно турбулентно струјање ( $\bar{u} \neq const \rightarrow \bar{u} = \bar{u}(x, y, z, t)$ );  $T$  - период (време) осредњавања.

Приказани поступак временског осредњавања важи за сваку физичку величину  $f = u, v, w, p, \rho, T, \vec{U}, e, \dots$ . На пример, тренутна вредност притиска  $p$  разлаже се на његову средњу (просечну) вредност, тј. просечни притисак  $\bar{p}$  и флукуациони притисак  $p'$  како следи

$$p = \bar{p} + p', \quad \bar{p} = \frac{1}{T} \int_0^T p dt, \quad \bar{p}' = \int_0^T p' dt = 0. \quad (5.38)$$

Треба још једном напоменути да се појам *стационарности* турбулентног струјања односи само на његове просечне, тј. временски осредњене брзине. *Турбуленција је увек нестационарна!*

Вектор тренутне брзине  $\vec{U}$  у фиксној тачки је векторски збир брзине осредњене у времену  $\bar{\vec{U}}$  и флукуационе брзине  $\vec{U}'$  која се на случајан, стохастички начин мења у времену по интензитету правцу и смеру:

$$\vec{U}(\vec{r}, t) = \bar{\vec{U}}(\vec{r}) + \vec{U}'(\vec{r}, t), \quad \bar{\vec{U}} = \frac{1}{T} \int_0^T \vec{U}(\vec{r}, t) dt, \quad \bar{\vec{U}}' = \frac{1}{T} \int_0^T \vec{U}' dt = 0. \quad (5.39)$$

Укупан интензитет турбуленције  $I_{\vec{u}}$  дефинише се релацијом

$$I_{\vec{u}} = \sqrt{\frac{1}{3} (\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2})} / \sqrt{\overline{u^2} + \overline{v^2} + \overline{w^2}} \quad I_u = \frac{\sqrt{\overline{(u')^2}}}{\bar{u}} \quad (5.40)$$

У бројиоцу израза  $I_u$  је карактеристична величина флукуационог поља  $u'$ , тј. корен из средњег квадратног одступања, док је у имениоцу просечна брзина  $\bar{u}$  на посматраном месту, тј. у датој тачки.

### 5.7.4 Анализа осредњавања сила у времену и нови физички ефекти

#### Временски осредњене (просечне) вредности сила

Пошто се *кретање* материјалне средине описује релацијом

$$\underbrace{\left[ \begin{array}{c} \text{Локална} \\ \text{инерцијална} \\ \text{сила} \quad \textcircled{1} \end{array} \right]}_{\text{Инерцијална сила}} + \underbrace{\left[ \begin{array}{c} \text{Конвективна} \\ \text{инерцијална} \\ \text{сила} \quad \textcircled{2} \end{array} \right]}_{\text{Инерцијална сила}} + \underbrace{\left[ \begin{array}{c} \text{Сила} \\ \text{Земљине} \\ \text{теже} \quad \textcircled{3} \end{array} \right]}_{\text{Масена сила}} + \underbrace{\left[ \begin{array}{c} \text{Сила} \\ \text{притиска} \\ \text{притиска} \quad \textcircled{4} \end{array} \right]}_{\text{Површинска сила}} + \underbrace{\left[ \begin{array}{c} \text{Сила} \\ \text{трења} \\ \text{трења} \quad \textcircled{5} \end{array} \right]}_{\text{Површинска сила}} = 0 \quad (5.41)$$

онда увек важи и следећа релација између сила

$$\boxed{\text{Временски осредњена} \left\{ \textcircled{1} + \textcircled{2} + \textcircled{3} + \textcircled{4} + \textcircled{5} \right\} \text{вредност величине силе} = \overline{\sum_{i=1}^5 \vec{f}_i} = 0.} \quad (5.42)$$

Математички израз једначине (5.42) за осу  $x$  у уобичајеним ознакама има облик

$$\frac{1}{T} \int_0^T \left[ \rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \frac{\partial (p + \rho g z)}{\partial x} - \eta \nabla^2 u \right] dt = 0 \quad (5.43)$$

и аналогно за осе  $y$  и  $z$ . Векторски облик процеса временског осредњавања *Навије-Стоксове* једначине (5.26) за случај када *нестипљив* флуид струји у пољу силе Земљине теже ( $\vec{F} = \vec{g}$ ) гласи

$$\frac{1}{T} \int_0^T \rho \left[ \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + (\vec{U} \cdot \nabla) \vec{U} \right] dt = \frac{1}{T} \int_0^T \left[ -\text{grad}(p + \rho g z) + \eta \Delta \vec{U} \right] dt. \quad (5.44)$$

Очигледно је да се свака од временски осредњених, тј. просечних сила изражава у функцији од просечних и флукуационих величина брзине и притиска! У том циљу се силе разврставају у три групе:

- (а) *константе* силе (хомогено поље) - сила Земљине теже
- (б) силе дефинисане *линеарним* функцијама - локална инерцијална сила (линеарна функција од  $\vec{U}$ ); сила притиска (линеарна функција од  $p$ ); сила трења (вискозна сила) (линеарна функција од  $\vec{U}$ );
- (в) силе дефинисане *квадратним (нелинеарним)* функцијама - конвективна инерцијална сила (функција квадрата брзине  $U^2$  или од производа две компоненте брзине - нелинеарни чланови):  $u^2, v^2, w^2, uv, vw$  и  $vw$ .

Применом *Рејнолдсове* статистике израчунавају се просечне вредности појединих чланова у једначинама (5.43) односно (5.44). Рачуница је дата детаљно ради лаког и потпуног схватања процеса временског осредњавања. Израчунавање је засновано на чињеници, да редослед математичких операција не утиче на крајњи резултат.

**Интеграљење** по интервалу времена  $T$  и **диференцирање** по времену и простору, тј. просторних координата могу да замене места!

### Осредњавање члана силе Земљине теже

Сила Земљине теже зависи од густине флуидног делића. Флукуације притиска су углавном сувише мале да би довеле до промене густине. Сила Земљине теже не зависи од струјног поља у од врсте струјања и иста је у ламинарним и турбулентним струјањима. Њена просечна вредност једнака је истој константној сили

$$\overline{\rho g} = \frac{1}{T} \int_0^T \rho g dt = \rho g \frac{1}{T} \int_0^T dt = \rho g; \quad (\rho g \text{ је константно, не зависи од времена})$$

$$\overline{\frac{\partial}{\partial z}(\rho g z)} = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\partial}{\partial z}(\rho g z) dt = \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{T} \int_0^T \rho g z dt = \frac{\partial}{\partial z}(\rho g z); \quad \rho g z = \text{const у времену}$$

Тако се аналогно добија

$$\overline{\text{grad}(\rho g z)} = \text{grad}(\rho g z). \quad (5.45)$$

Математички израз за силу Земљине теже је исти за ламинарно и турбулентно струјање!

### Временски осредњена (просечна) локална инерцијална сила.

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} \left( \rho \frac{\partial u}{\partial t}, \rho \frac{\partial v}{\partial t}, \rho \frac{\partial w}{\partial t} \right) &\Rightarrow \overline{\rho \frac{\partial u}{\partial t}} = \frac{1}{T} \int_0^T u dt = \rho \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{T} \int_0^T u dt \stackrel{\text{def}}{=} \rho \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} \quad \text{или:} \\ \overline{\rho \frac{\partial u}{\partial t}} &= \rho \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{T} \int_0^T (\bar{u} + u') dt = \rho \frac{\partial}{\partial t} \int_0^T \bar{u} dt + \rho \frac{\partial}{\partial t} \int_0^T u' dt = \rho \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \rho \frac{\partial \bar{u}'}{\partial t} = \rho \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} \\ &\quad \downarrow \\ &\quad 0 \end{aligned}$$

Аналогно изразу

$$\overline{\rho \frac{\partial u}{\partial t}} = \rho \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} \quad (5.46)$$

добијају се изрази и за остале две компоненте  $v$  и  $w$ , тако да је

$$\overline{\rho \frac{\partial \vec{U}}{\partial t}} = \overline{\rho \frac{\partial \vec{U}}{\partial t}} \left( \rho \frac{\partial \bar{u}}{\partial t}, \rho \frac{\partial \bar{v}}{\partial t}, \rho \frac{\partial \bar{w}}{\partial t} \right). \quad (5.47)$$

Просечна вредност локалне инерцијалне силе једнака је инерцијалној сили условљеној променом само просечне брзине, и изражава се функцијама истог облика и у ламинарном и у турбулентном струјању. **Нема нових чланова** у процесу временског осредњавања! Али треба имати у виду да су само у ламинарном струјању величине  $\vec{U}(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w})$  једнаке величинама  $\vec{U}(u, v, w)$ .

### Временски осредњена сила притиска.

Аналогним поступком се врши осредњавање у Времену силе притиска

$$-\text{grad} p \left( -\frac{\partial p}{\partial x}, -\frac{\partial p}{\partial y}, -\frac{\partial p}{\partial z} \right)$$

на примеру једне компоненте  $-\partial p/\partial x$

$$-\overline{\frac{\partial p}{\partial x}} = -\frac{1}{T} \int_0^T p' dt \stackrel{!}{=} -\frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{T} \int_0^T p dt = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} \quad (\text{дефиниција } \bar{p}).$$

Такође, важи и следеће:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{T} \int_0^T p dt &= -\frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{T} \int_0^T (\bar{p} + p') dt = -\frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{T} \int_0^T \bar{p} dt - \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{T} \int_0^T p' dt \\ &= -\frac{\partial}{\partial x} (\bar{p}) - \frac{\partial}{\partial x} (\bar{p}') = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x}; \quad (\bar{p}' = \bar{p}'), \end{aligned} \quad (5.48)$$

па следи

$$-\overline{\frac{\partial p}{\partial x}} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x}. \quad (5.49)$$

Просторне координате  $(x, y, z)$  и временска координата  $(t)$  су међусобно независне координате тако да математичке операције интегралеза (по Времену) и диференцирања (по просторним координатама) могу да размене места. Директна последица тога је

$$\begin{aligned} -\overline{\text{grad} p} &= -\frac{1}{T} \int_0^T \nabla p dt = -\nabla \frac{1}{T} \int_0^T p dt = -\text{grad} \bar{p}, \\ -\overline{\text{grad} p} &= -\text{grad} \bar{p} \end{aligned} \quad (5.50)$$

### Временски осредњена вискозна сила

Просечна вредност силе трења:

$$\eta \Delta \vec{U} \equiv \eta \nabla^2 \vec{U} \quad (\eta \nabla^2 u, \eta \nabla^2 v, \eta \nabla^2 w), \quad \Delta \equiv \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

одређује се, за њене компоненте појединачно

$$\overline{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}} = \frac{1}{T} \int_0^T \eta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dt \stackrel{!}{=} \eta \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_0^T u dt = \eta \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} \quad (5.51)$$

или за општи векторски облик

$$\overline{\eta \Delta \vec{U}} \stackrel{!}{=} \eta \Delta \frac{1}{T} \int_0^T \vec{U} dt = \eta \Delta \bar{\vec{U}} \quad \Rightarrow \quad \overline{\eta \Delta \vec{U}} = \eta \Delta \bar{\vec{U}}. \quad (5.52)$$

Временски осредњена вискозна сила изражава се само помоћу просечне брзине и има исти облик као и аналогна стварна сила. При осредњавању се **не појављују** нови чланови!

**Закључак.** При осредњавању **линеарних** функција (величина, чланова) **не настају** никакви нови додатни чланови! Дакле, све силе изражене линеарним функцијама (изразима), које одређују просечно (временски осредњено) струјање, дефинисане су истим математичким изразима како за просечно турбулентно струјање, тако и за стварно (тренутно) струјање, турбулентно или ламинарно. У ламинарном струјању су просечне величине  $\bar{\vec{U}}$  и  $\bar{p}$  једнаке стварним тренутним величинама  $\vec{U}$  и  $p$ .

### Нелинеарна инерцијална сила

Из претходних разматрања познато је да конвективни део инерцијалне силе има облик

$$\rho(\vec{U} \cdot \nabla)\vec{U} \equiv \rho \left( \text{grad} \frac{U^2}{2} - \vec{U} \times \text{rot} \vec{U} \right) \rightarrow \rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \rightarrow \begin{cases} \rho \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right), \\ \rho \left( u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right), \\ \rho \left( u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right). \end{cases}$$

Сви чланови ове силе су **нелинеарни**, тј. квадратни јер су пропорционални величини  $U^2$  или производу компонената од  $U$ :  $u^2$ ,  $v^2$ ,  $w^2$ ,  $uv$ ,  $uw$ ,  $vw$ . Процес осредњавања ће се ради веће јасноће применити на један од нелинеарних чланова, на пример  $\rho u \frac{\partial u}{\partial x}$ , па ће се добијени резултат уопштити. Тако је поступак временског осредњавања нелинеарног квадратног члана  $u^2$ :

$$\overline{u^2} = \frac{1}{T} \int_0^T u^2 dt = \frac{1}{T} \int_0^T (\bar{u} + u')^2 dt = \frac{1}{T} \int_0^T [\bar{u}^2 + 2\bar{u}u' + (u')^2] dt.$$

Осредњавање појединих чланова:

$$\frac{1}{T} \int_0^T \bar{u}^2 dt = \bar{u}^2 \quad (\text{јер је } u \text{ константно у временском домену интервала } T),$$

$$\frac{1}{T} \int_0^T 2\bar{u}u' dt = 2\bar{u} \frac{1}{T} \int_0^T u' dt = 0 \quad (\text{јер је } \frac{1}{T} \int_0^T u' dt = \bar{u}' = 0),$$

$$\frac{1}{T} \int_0^T (u')^2 dt = \overline{u'^2} \quad \left[ \begin{array}{l} u' \text{ може бити нула, позитивно или негативно али је } u'^2 \\ \text{увек позитивно и } \overline{u'^2} \neq 0 \end{array} \right]$$

$$\boxed{\overline{u^2} = \bar{u}^2 + \overline{u'^2}} \quad (\text{Нови члан - } \overline{u'^2}) (!) \quad (5.53)$$

Просечна вредност квадрата брзине једнака је збиру квадрата просечне вредности брзине и просечне вредности квадрата флукуационе брзине. Овде се при осредњавању појављује нови члан, који обухвата утицај флукуационих брзина на просечно брзинско поље. Физички смисао овог члана добија се применом закона количине кретања.

Осредњавањем у времену *нелинеарног, квадратног, мешовитог* члана  $uv$  добија се:

$$uv = (\bar{u} + u')(\bar{v} + v') = \bar{u}\bar{v} + \bar{u}v' + u'\bar{v} + u'v'$$

Просечна (временски осредњена) вредност овог производа је

$$\boxed{\overline{uv} = \bar{u}\bar{v} + \overline{u'v'}} \quad (5.54)$$

јер су просечне вредности величина  $\bar{u}v'$  и  $u'\bar{v}$  једнаке нули. Просечна вредност производа једнака је суми производа просечних вредности и просечној вредности производа флукуационих компоненти. Очигледно из (5.54) следи (5.53) када се у (5.5) уврсти  $v \equiv u$ .

Даљом анализом *нелинеарног* члана  $\rho u \frac{\partial u}{\partial x}$  конвективног дела инерцијалне силе следи:

$$\begin{aligned}\overline{\rho u \frac{\partial u}{\partial x}} &= \frac{1}{T} \int_0^T \rho u \frac{\partial u}{\partial x} dt = \frac{1}{T} \int_0^T \rho (\bar{u} + u') \frac{\partial}{\partial x} (\bar{u} + u') dt \\ &= \frac{\rho}{T} \int_0^T \left( \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{u} \frac{\partial u'}{\partial x} + u' \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + u' \frac{\partial u'}{\partial x} \right) dt\end{aligned}$$

Осредњавање сваког члана појединачно

$$\frac{1}{T} \int_0^T \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} dt = \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \quad (\bar{u} \text{ и } \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \text{ су константни у времену})$$

$$\frac{1}{T} \int_0^T \bar{u} \frac{\partial u'}{\partial x} dt = \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{T} \int_0^T u' dt,$$

$$\frac{1}{T} \int_0^T u' \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} dt = \frac{1}{T} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \int_0^T u' dt,$$

$$\frac{1}{T} \int_0^T u' \frac{\partial u'}{\partial x} dt = \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{T} \int_0^T \frac{u'^2}{2} dt = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\overline{u'^2}}{2} \right) = \overline{u' \frac{\partial u'}{\partial x}}$$

Уврштавањем ових вредности у почетни израз добија се

$$\boxed{\overline{\rho u \frac{\partial u}{\partial x}} = \rho \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \overline{\rho u' \frac{\partial u'}{\partial x}}} \quad (5.55)$$

Аналогним поступком добија се просечна вредност члана  $\rho u \frac{\partial v}{\partial x}$

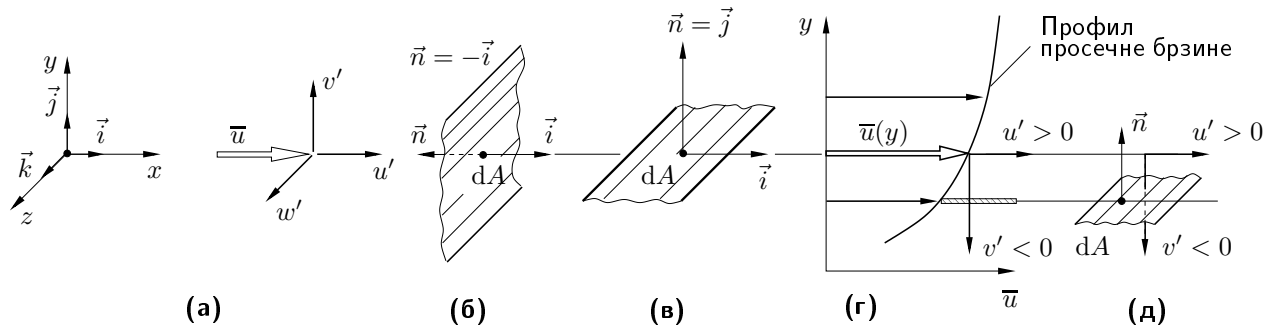
$$\boxed{\overline{\rho u \frac{\partial v}{\partial x}} = \rho \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \overline{\rho u' \frac{\partial v'}{\partial x}}} \quad (5.56)$$

**Закључак.** При осредњавању у времену **нелинеарних** функција, појављују се **нови чланови**, такође нелинеарни, одређени корелацијама флукуационих величина. Дакле, *просечна вредност конвективне инерцијалне силе* једнака је суми конвективне инерције услед просечне брзине и просечне конвективне инерције условљење турбулентним флукуацијама.

### 5.7.5 Физичка значења корелација $\overline{\rho u'^2}$ и $\overline{\rho u'v'}$ . Рејнолдсов, турбулентни смицајни напон

У *турбулентном* струјању постоји мање или више изражено *међусобно дејство временски осредњеног (просечног) и флукуационог поља физичких величина*. Физички смисао корелација  $\overline{\rho u'^2}$  и  $\overline{\rho u'v'}$  анализираће се на моделу турбулентног струјања приказаног на слици 5.6.

Главни правац струјања, тј. правац просечне брзине је у правцу  $x$ -осе. Из излагања у претходном потпоглављу 5.7.4, сагласно изразима (5.53)-(5.56), закључује се да се *корелације  $\overline{\rho u'^2}$  и  $\overline{\rho u'v'}$*  појављују при временском осредњавању нелинеарних конвективних чланова. Просечне вредности извода ових корелација по просторним координатама (в. из-



**Слика 5.6.** Турбулентно струјање - дејство флукуационих брзина. (а) Модел једнодимензијског просечног струјања:  $u = \bar{u} + u'$ ,  $v = v'$ ,  $w = w'$ ; (б) флукс (пренос) количине кретања кроз контролну површ **управну** на  $x$ -осу; правац главног просечног струјања управан на контролну површ; (в) контролна површ **тангентна** на  $x$ -правац, тј.  $\vec{n} = \vec{j}$ ; просечна брзина  $\bar{u}$  тангентна на контролну површ; (г) профил просечне (временски осредњене) брзине; (д) одређивање предзнака корелације  $u'v'$ .

разе (5.55) и (5.56)) дефинишу нелинеарне инерцијалне силе услед флукуационих кретања. Другим речима, физички смисао корелација  $\overline{\rho u'^2}$  и  $\overline{\rho u'v'}$  садржан је у *конвективном* делу инерцијалне силе, тј. у флуксу (преносу) количине кретања кроз контролну површ! Та величина је у ствари импулсна сила  $\vec{R}_i$  дефинисана изразом (4.75). Из тих разлога је потребно и сврсисходно израчунати импулсну силу  $\vec{R}_i$ , која се од временски осредњених корелација флукуационих брзина преноси на одређену контролну површ! У том циљу се за струјни модел приказан на сл. 5.6 израчунава флукс (пренос) количине кретања кроз површ постављену управно, односно тангентно у односу на главни правац просечног струјања (сл. 5.6(б) и (в)). Сагласно изразу (4.75) следи израз за елементарну импулсну силу  $\vec{dR}_i$

$$\vec{dR}_i = -\rho \vec{U} (\vec{U} \cdot \vec{n}) dA. \quad (5.57)$$

За турбулентно струјање (сл. 5.6) тренутна брзина  $\vec{U}$  је одређена са

$$\vec{U} = \vec{\bar{U}} + \vec{U}' = (\bar{u} + u') \vec{i} + v' \vec{j} + w' \vec{k}.$$

### Физички смисао корелације $\overline{\rho u'^2}$

Контролна површ се бира *управно* на  $x$ -осу, тј. на правац просечног струјања (сл. 5.6(б)). Тада је  $\vec{n} = -\vec{i}$ , а како је  $\vec{U} = u \vec{i} + v \vec{j} + w \vec{k}$ , где је  $u = \bar{u} + u'$ , то примена израза (5.57) даје

$$\vec{dR}_i = \rho u \vec{U} dA \rightarrow dR_{i,x} = \rho u (\vec{U} \cdot \vec{i}) dA \rightarrow \left| \frac{dR_{i,x}}{dA} \right| = \rho u^2.$$

Осредњавањем у времену овог *нормалног напона* добија се

$$\overline{\rho u^2} = \frac{1}{T} \int_0^T \rho u^2 dt = \overline{\rho (\bar{u} + u')^2} = \overline{\rho (\bar{u}^2 + 2\bar{u}u' + u'^2)} = \rho (\bar{u}^2 + \overline{u'^2}).$$

Ова релација је еквивалентна релацији (5.53), али је множење да густином  $\rho$  овде добијен смисао напона

$$\overline{\rho u^2} = \rho \bar{u}^2 + \boxed{\overline{\rho u'^2}}. \quad (5.58)$$



Дакле, услед флукуационих брзина појављује се допунски члан у изразу за нормални напон. У анализи која следи биће показано да величина  $-\overline{\rho u'^2}$  представља један од Рејнолдсових, турбулентних, тј. привидних нормалних напона.

### Физички смисао корелације $\overline{\rho u'v'}$

Контролна површ је постављена *тангентно* на главни правац просечног струјања тако да садржи  $x$ -осу. Сада је просечна брзина на контролну површ  $\vec{n} = \vec{j}$  (сл. 5.6(в)). Аналогно горњем поступку следи

$$\left| \frac{dR_{i,x}}{dA} \right| = \rho uv \quad \rightarrow \quad \overline{\rho uv} = \overline{\rho(\bar{u} + u')v'} = \rho(\overline{u'v'} + \overline{u'v'}).$$

Дакле, временским осредњавањем *тангенцијалног напона*  $\rho uv$  добија се важна релација

$$\boxed{\overline{\rho uv} = \overline{\rho u'v'}} \quad (u = \bar{u} + u', v = v'). \quad (5.59)$$

Одавде следи да је у овом случају просечна вредност корелације  $\rho uv$  различита од нуле само на основу постојања међусобне зависности (корелације) флукуационих брзина  $u'$  и  $v'$ . Ова величина дефинише *додатни пренос количине кретања у  $x$ -правцу изазван флукуацијама брзина  $u'$  и  $v'$* . Ово се у струјном пољу испољава као **тангенцијални (смицајни) напон**. Он је последица турбулентних флукуационих брзина уведених Рејнолдсовом статистиком и због тога се назива *турбулентним тангенцијалним напоном*. Као што је у поглављу 5.2 разматран *предзнак* вискозног тангенцијалног напона, тако се и у овом случају мора анализирати предзнак! И овде се ради о ефекту *преноса количине кретања*. У том циљу се посматра процес турбулентног преноса (сл. 5.6 (г), (д)) који се остварује делићима који се крећу одозго (у негативном смеру  $y$ -осе) и протичу кроз хоризонталну контролну површ  $dA$ . Овакво кретање делића показује да флукуационе брзине  $v' < 0$  и  $u' > 0$  доводе до позитивног турбулентног напона  $\tau_t > 0$ , тј. до позитивног тангенцијалног напона, који се од струјања преноси на контролну површ. На основу овога дефинише се *Рејнолдсов, привидни, турбулентни смицајни (тангентни) напон*

$$\boxed{\tau_t \equiv \tau_{yx}^t = -\overline{\rho u'v'}} \quad (\text{Рејнолдсов привидни смицајни напон}) \quad (5.60)$$

Аналогно се на основу (5.58) дефинише *Рејнолдсов, привидни, турбулентни нормални напон*

$$\boxed{p_{xx}^t \equiv \sigma_{xx}^t = -\overline{\rho u'u'} = -\overline{\rho u'^2}} \quad (5.61)$$

- Природно се поставља следеће питање: Да ли исти утицај на **просечно** брзинско поље имају и преостале корелације флукуационих брзина и како се ови резултати добијени за модел *једнодимензијског просечног струјања* у правцу  $x$ -осе могу уопштити на модел *тродимензијског просечног струјања*?
- Значајно је потражити одговор и на ово питање: Да ли се на основу претходних разматрања могу на један разумљив и релативно једноставан начин, како са математичке,

тако и физичке тачке гледишта извести једначина количине кретања, тј. *диференцијална једначина турбулентног струјања флуида изражена помоћу укупних напона?*

Одговоре на ова дају следећа поглавља!

### 5.7.6 Просечне вредности производа флукуационих брзина и Рејнолдсови (турбулентни) напони

Флукуационо брзинско поље са три компоненте  $u'$ ,  $v'$  и  $w'$  формира **девет** корелација другог реда, које се сагласно условима *симетрије* свде на следећих *шест*:

$$\overline{u'^2}, \overline{v'^2}, \overline{w'^2}, \overline{u'v'} = \overline{v'u'}, \overline{u'w'} = \overline{w'u'}, \overline{v'w'} = \overline{w'v'} \Leftrightarrow \overline{u'_i u'_j} = \overline{u'_j u'_i}, i \neq j \quad (5.62)$$

Негативне вредности корелација  $-\overline{\rho u'_i u'_j}$  имају исто физичко значење и утицај на просечно брзинско поље као и анализирани корелације  $-\overline{\rho u'^2}$  и  $-\overline{\rho u'v'}$ !

Показано је да се физичко дејство турбулентног флукуационог кретања на просечно брзинско поље у једначини количине кретања испољава као поље *додатних (допунских) напона*  $-\overline{\rho u'_i u'_j}$ . Ових девет корелација другог реда формирају *матрицу турбулентних напона*

$$T^t \equiv ||p_{ij}^t|| = \begin{pmatrix} \sigma_{xx}^t & \tau_{yx}^t & \tau_{zx}^t \\ \tau_{xy}^t & \sigma_{yy}^t & \tau_{zy}^t \\ \tau_{xz}^t & \tau_{yz}^t & \sigma_{zz}^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\overline{\rho u'^2} & -\overline{\rho v' u'} & -\overline{\rho w' u'} \\ -\overline{\rho u' v'} & -\overline{\rho v'^2} & -\overline{\rho w' v'} \\ -\overline{\rho u' w'} & -\overline{\rho v' w'} & -\overline{\rho w'^2} \end{pmatrix} \quad (5.63)$$

при чему су компоненте Рејнолдсових турбулентних напона дате са

$$p_{ij}^t = -\overline{\rho u'_i u'_j} \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (5.64)$$

Из (5.62)-(5.64) се закључује да је  $p_{ij}^t = p_{ji}^t$ ,  $i \neq j$ , тј. да је *тензор турбулентних напона симетричан тензор другог реда*. Упоредити (5.63) са тензором *вискозних напона*  $T$ , једначина (5.31)! Тензор турбулентних напона се обично означава као **Рејнолдсов тензор напона**.

$$\text{Рејнолдсови нормални напони} \quad (5.65)$$

$$\sigma_{xx}^t = -\overline{\rho u'^2}, \quad \sigma_{yy}^t = -\overline{\rho v'^2}, \quad \sigma_{zz}^t = -\overline{\rho w'^2}$$

$$\text{Рејнолдсови тангенцијални (смицајни) напони} \quad (5.66)$$

$$\tau_{xy}^t = \tau_{yx}^t = -\overline{\rho u' v'}, \quad \tau_{xz}^t = \tau_{zx}^t = -\overline{\rho u' w'}, \quad \tau_{yz}^t = \tau_{zy}^t = -\overline{\rho v' w'}$$

Ознаке:  $\overline{(\dots)}$  - просечна (временски осредњена) вредност;  $(\dots)'$  - флукуациона вредност;  $(\dots)^t$  - турбулентна величина.

### 5.7.7 Једначина количине кретања временски осредњеног струјања - Рејнолдсове једначине турбулентног струјања нестишљивог флуида

#### Просечна вредност нелинеарне (конвективне) инерцијалне силе

Из претходног излагања се закључује да при временском осредњавању свих сила код конвективних инерцијалних сила  $\rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$  настају допунске силе условљене флукуационим величинама. Показано је да просечне вредности нелинеарних (квadratних) чланова  $\rho u \frac{\partial u}{\partial x}$  и  $\rho u \frac{\partial v}{\partial x}$  инерцијалне силе  $\rho(\vec{U} \cdot \nabla)\vec{U} \rightarrow \rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$  имају облик (5.55) и (5.56)

$$\overline{\rho u \frac{\partial u}{\partial x}} = \rho \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \overline{\rho u' \frac{\partial u'}{\partial x}} \quad \text{и} \quad \overline{\rho u \frac{\partial v}{\partial x}} = \rho \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \overline{\rho u' \frac{\partial v'}{\partial x}} \quad (5.67)$$

Аналогно се добијају изрази и за све остале нелинеарне чланове  $\rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ . Тако је просечна вредност нелинеарне инерцијалне силе у правцу  $x$ -осе дефинисана релацијом

$$\overline{\rho \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right)} \equiv \rho \underbrace{\left( \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right)}_{\textcircled{1}} + \rho \underbrace{\left( \overline{u' \frac{\partial u'}{\partial x}} + \overline{v' \frac{\partial u'}{\partial y}} + \overline{w' \frac{\partial u'}{\partial z}} \right)}_{\textcircled{2}} \quad (5.68)$$

① – Конвективна инерција услед **просечних** брзина

② – Конвективна инерција услед **флукуационих** брзина

Аналогно овом изразу за  $\rho(\vec{U} \cdot \nabla)u$  добијају се и временски осредњени изрази у правцима  $y$  и  $z$  осе помоћу просечних вредности

$$\left[ \overline{\rho(\vec{U} \cdot \nabla)\vec{U}} \right]_y \equiv \overline{\rho(\vec{U} \cdot \nabla)v} \quad \text{и} \quad \left[ \overline{\rho(\vec{U} \cdot \nabla)\vec{U}} \right]_z \equiv \overline{\rho(\vec{U} \cdot \nabla)w}.$$

#### Рејнолдсове једначине за њутновски нестишљив флуид

У потпоглављу 5.7.4 извршена је анализа временског осредњавања свих сила сагласно релацијама (5.42)-(5.44). Другим речима, свака од сила у Навије-Стоксовим једначинама изражена је у функцији од просечних  $\vec{U}(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w})$  и флукуационих брзина  $\vec{U}'(u', v', w')$  и потом је применом Рејнолдсове статистике извршено осредњавање у времену! Тако добијене једначине представљају **Рејнолдсове једначине** турбулентног струјања њутновског нестишљивог флуида.

Пошто се располаже са просечним (временски осредњеним) вредностима свих сила, онда се, сагласно релацији (5.42), формира њихова сума која за правац  $x$ -осе има облик

$$\left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + \overline{u' \frac{\partial u'}{\partial x}} + \overline{v' \frac{\partial u'}{\partial y}} + \overline{w' \frac{\partial u'}{\partial z}} \right) = \frac{\partial}{\partial x}(\bar{p} + \rho g z) + \eta \Delta \bar{u}. \quad (5.69)$$

Аналогно се пермутације величине добијају изрази и за овде наведене једначине у правцима  $y$  и  $z$  оса! У том циљу се за даљу анализу користи једначина количине кретања за  $x$ -осу, тј. израз (5.69), који означава **Рејнолдсову једначину** за турбулентно струјање њутновског нестишљивог флуида у правцу  $x$ -осе!

### Поређење Навије-Стоксове и Рејнолдсове једначине

Упоредна анализа Навије-Стоксове једначине (5.27) и Рејнолдсове једначине (5.69): свака **сила** у Рејнолдсовој једначини има исти математички облик као и у Навије-Стоксовој једначини, израженој помоћу просечне брзине и просечног притиска! Дакле, *тренутне* вредности су *замене просечним*!

Међутим, у Рејнолдсовој једначини настају *допунске инерцијалне силе* изазване флукуацијама брзина!

Навије-Стоксове једначине	→ временско осредњавање	Рејнолдсове једначине	(5.70)
------------------------------	----------------------------	--------------------------	--------

Навије-Стоксове једначине за просечне величине	+	Силе услед Рејнолдсових турбулентних (привидних) напона	=	Рејнолдсове једначине	(5.71)
--	---	---	---	--------------------------	--------

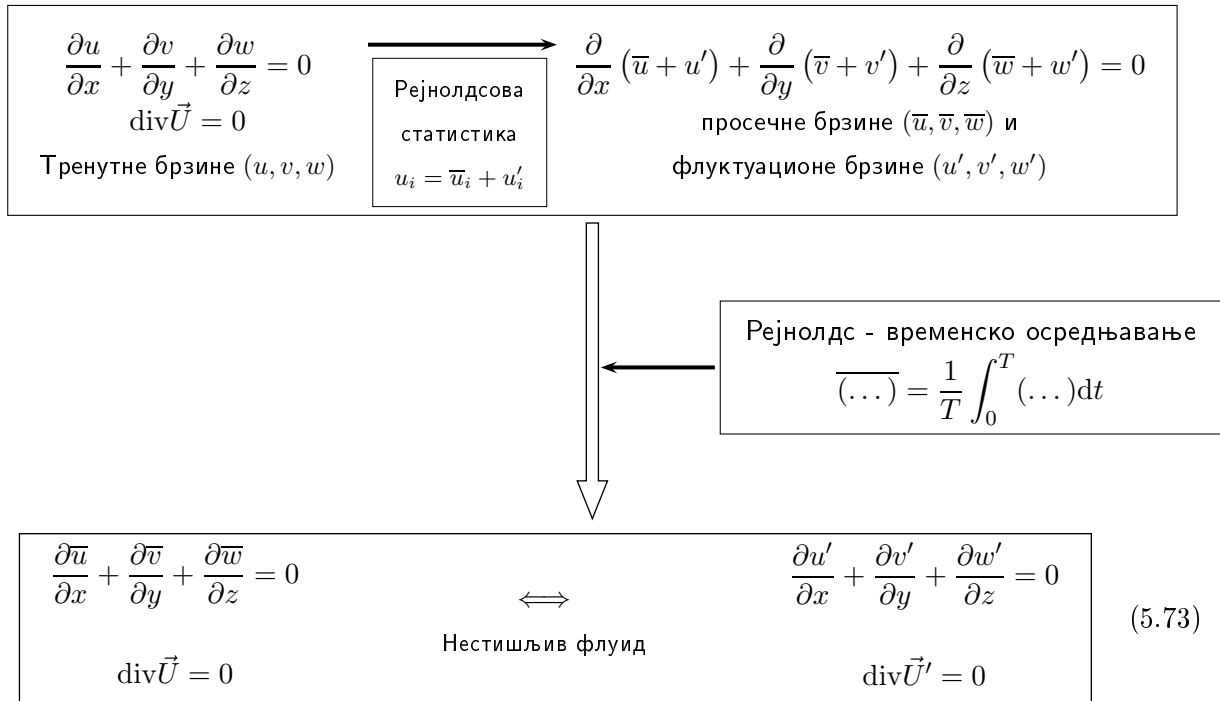
При разматрању просечног струјања инерцијалне силе флукуационог кретања могу да се разматрају аналогно као и силе притиска и вискозне силе. У том циљу се врши извесна трансформација једначине (5.69) како следи

$$\overline{u' \frac{\partial u'}{\partial x}} + \overline{v' \frac{\partial u'}{\partial y}} + \overline{w' \frac{\partial u'}{\partial z}} = \frac{\partial(\overline{u'^2})}{\partial x} + \frac{\partial(\overline{u'v'})}{\partial y} + \frac{\partial(\overline{u'w'})}{\partial z} - \overline{u' \underbrace{\left( \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} \right)}_{\text{div} \vec{U}'}} \quad (5.72)$$

Последњи члан у изразу (5.72) је у вези са *једначином континуитета*! Потребно је размотрити закон одржања масе, тј. једначину континуитета за *турбулентно* струјање.

**5.7.8 Једначина континуитета за турбулентно струјање нестишљивог флуида**

Временско осредњавање једначине континуитета за нестишљив флуид:



Једначине континуитета за просечно и флукуационо турбулентно струјање нестишљивог флуида (5.73) добијене су коришћењем релација

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial x}, \quad \frac{\partial \overline{u'}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{T} \int_0^T u' dt = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} = 0$$

Запажа се да је математички израз за једначину континуитета просечног струјања истог облика као и за тренутно (стварно) струјање. Нема допунских чланова, јер се ради о линеарним изразима. Једначина континуитета, сагласно закону о одржања масе, мора да буде задовољена и за просечно и за флукуационо турбулентно струјање, израз (5.73). Очигледно је да Уврштавањем (5.73) у (5.72) Рејнолдсова једначина добија свој завршни облик.

**5.7.9 Рејнолдсове једначине за њутновски нестишљив флуид изражене посредством Рејнолдсових напона**

Посредством једначине континуитета (5.73),  $\text{div} \vec{U}' = 0$  израз (5.72) добија облик

$$\boxed{u' \frac{\partial u'}{\partial x} + v' \frac{\partial u'}{\partial y} + w' \frac{\partial u'}{\partial z}} = \frac{\partial (u'^2)}{\partial x} + \frac{\partial (u'v')}{\partial y} + \frac{\partial (u'w')}{\partial z} = \boxed{\frac{\partial u'^2}{\partial x} + \frac{\partial u'v'}{\partial y} + \frac{\partial v'w'}{\partial z}} \quad (5.74)$$

Уврштавањем (5.74) у (5.69) следи

$$\rho \left( \underbrace{\frac{\partial \bar{u}}{\partial t}}_{(1)} + \underbrace{\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z}}_{(2)} \right) = \underbrace{-\frac{\partial}{\partial x} (\bar{p} + \rho g z)}_{(3)} + \underbrace{\eta \Delta \bar{u}}_{(4)} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x} (-\rho \overline{u'^2}) + \frac{\partial}{\partial y} (-\rho \overline{u'v'}) + \frac{\partial}{\partial z} (-\rho \overline{u'w'})}_{(5)} \quad (5.75)$$

Физичка значења појединих чланова у Рејнолдсовој једначини (5.75) за турбулентно струјање нестишљивог њутновског флуида у пољу силе Земљине теже у правцу  $x$ -осе:

- ① - Просечна локална инерцијална сила,
- ② - Просечна конвективна (нелинеарна) инерцијална сила,
- ③ - Просечна вредност силе притиска и силе Земљине теже (сила просечног генерализованог притиска),
- ④ - Просечна вискозна сила, тј. сила услед просечних вредности **вискозних напона**  $\overline{p_{ij}^{\eta}}$ ,
- ⑤ - **Сила услед Рејнолдсових (турбулентних) напона**  $p_{ij}^t$ !

Сила ⑤ је последица дејства турбулентних флукуација, тј. *Рејнолдсових напона*. Порекло турбулентних напона је у нелинеарним (конвективним) инерцијалним силама! Због тога се они називају *привидним напонима*. Корелације  $[-\rho \overline{u_i' u_j'}]$  настају при временском осредњавању нелинеарних инерцијалних сила и називају се *напонима*, јер се њима остварују допунски, у односу на молекуларне, *макроскопски преноси количине кретања* који се у турбулентном струјном пољу испољавају као **дејство напона!**

**Рејнолдсова једначина** (5.75) може да се напише и у облику ( $F_x \equiv g_x$ )

$$\rho \frac{D\bar{u}}{Dt} = \rho g_x - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \eta \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} - \rho \overline{u'^2} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \eta \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \rho \overline{u'v'} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \eta \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} - \rho \overline{u'w'} \right) \quad (5.76)$$

**Аналогни облици једначина су за  $y$  и  $z$ -осу!** Оне се добијају уобичајеним пермутацијама одговарајућих величина, тј. зависно и независно променљивих.

Из једначина (5.75), односно (5.76) и (5.27) се закључује:

- (а) У Рејнолдсовим једначинама се појављују *допунске конвективне инерцијалне силе* условљене турбулентним флукуацијама.
- (б) Све остале *силе* изражавају се као функција **просечних** вредности **брзине** и **притиска**, тј. уместо тренутних вредности брзина притиска у Навије-Стоксовим једначинама уврштавају се просечне вредности брзина и притиска.

Све три *Рејнолдсове једначине* за осе  $x$ ,  $y$  и  $z$  могу се на основу израза (5.76), заједно са

једначином континуитета (5.73) написати, помоћу индексне нотације, у следећем облику:

$$\rho \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \rho \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} = \rho g_i - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \eta \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( -\rho \overline{u'_i u'_j} \right), \quad (5.77)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_j} = 0, \quad \frac{\partial u'_j}{\partial x_j} = 0.$$

За случај *статистички стационарног* струјања је  $\partial \bar{u}_i / \partial t = 0$  у изразу (5.77)!

Систем Рејнолдсових једначина (5.77) је незатворен! Рејнолдсови (турбулентни) напони су непознати! Основни проблем се састоји у повезивању карактеристика флукуационог поља са пољем временски осредњених, просечних величина. Потребно је формирати моделе који повезују корелације флукуационих брзина са просечним брзинама. Неопходне су *претпоставке о турбулентним напонима!* Примена Рејнолдсове статистике доводи до потребе *моделирања турбулентних струјања*. Тај проблем у општем случају **није решен** до данашњих дана! Захтева се јединство теоријског, експерименталног и нумеричког рада! Још увек *не постоји егзактно решење ни најједноставнијег турбулентног струјања!*

### 5.7.10 Опште стање напона при турбулентном струјању

На основу претходних анализа *анализа сила и напона*, могуће је у овом тренутку заокружити одговор на тако важно питање, као што је питање **општег стања напона**. Такво стање напона одређује и *укупне силе, масене и површинске*, које делују на флуид и изазивају његово ламинарно и турбулентно струјање.

#### Модел једнодимензијског просечног струјања (сл. 5.6)

За примену у техничкој пракси, на пример, при *турбулентном* струјању у *цевима, каналима и граничном слоју*, доминантна је промена турбулентног смицајног напона  $-\rho \overline{u'v'}$  у попречном  $y$ -правцу, па једначина *количине кретања* у  $x$ -правцу (5.76) може да се напише у облику

$$\rho (\bar{U} \cdot \nabla) \bar{u} \approx \rho g_x + \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} (\bar{\tau}_{xy})_{\text{укупно}} \quad (5.78)$$

где је

$$\boxed{(\bar{\tau}_{xy})_{\text{укупно}} = \eta \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + (-\rho \overline{u'v'}) = \bar{\tau}_{xy} + \tau_{xy}^t} \quad (5.79)$$

Модел струјања (5.78) одговара турбулентном потпуно развијеном ( $\partial(\dots)/\partial x = 0$ ,  $\partial \bar{u}/\partial x = 0$ ), раванском ( $\partial(\dots)/\partial z = 0$ ) *једнодимензијском просечном* ( $\bar{u}(y)$ ,  $\bar{v} \equiv \bar{w} = 0$ ) струјању њутновског нестишљивог флуида. Због тога је за такве струјне моделе *убичајено* да се

напони у (5.79) означе упрошћено како следи:

$$\begin{aligned}
 (\overline{\tau}_{xy})_{\text{укупно}} &\equiv \overline{\tau}_{uk} & - & \text{укупни (индекс "uk") смицајни (тангенцијални) напон;} \\
 \overline{\tau}_{xy} &\equiv \tau_{\eta} \equiv \tau_v & - & \text{вискозни (индекс "\eta" или "v") тангенцијални (смицајни) напон сагласно} \\
 & & & \text{Њутновој хипотези о напонима;} \\
 \tau_{xy}^t &\equiv \tau_t & - & \text{турбулентни (индекс "t") тангенцијални (смицајни) напон.}
 \end{aligned}$$

Дакле, за једно турбулентно једнодимензијско просечно струјање важи релација (сл. 5.6)

$$\boxed{\overline{\tau}_{yx} = \overline{\tau}_{\eta} + \tau_t = \eta \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + (-\rho \overline{u'v'})}. \quad (5.80)$$

**Укупни** смицајни напон  $\overline{\tau}_{uk}$  обухвата **вискозни** тангенцијални напон  $\overline{\tau}_{\eta}$  (микроскопски, молекуларни пренос количине кретања) и **турбулентни** тангенцијални напон  $\tau_t$  (макро-скопску, моларну размену импулса).

### Модел напона за тродимензијско просечно турбулентно струјање

У општем случају турбулентног тродимензијског просечног струјања уместо релације (5.80) појављују се **тензори вискозних и турбулентних напона**. Међутим, опште стање напона и матрице напона се, на основу досадашњих разматрања, формирају једноставно, и физички и математички. Наиме, сагласно анализи и ознакама напона у **Глави 2**, као и изразима за турбулентне напоне (5.63) и (5.64), могу се написати следеће релације за *стање напона* у матричном облику

$$\boxed{\overline{P} = -\overline{p}E + \overline{T} + T^t} \quad (5.81)$$

где су  $\overline{P}$  - тензор укупних напона,  $E$  - јединични тензор,  $\overline{T}$  - тензор вискозних напона и  $T^t$  - тензор турбулентних напона, или пак у облику помоћу компонената тензора напона

$$\boxed{\overline{p}_{ij} = -\overline{p}\delta_{ij} + \overline{p}_{ij}^{\eta} + p_{ij}^t} \quad (5.82)$$

где су  $\overline{p}_{ij}$  - укупни напони,  $\overline{p}$  - просечни притисак,  $\overline{p}_{ij}^{\eta}$  - вискозни напони и  $p_{ij}^t$  турбулентни напони.

Матрица тензора вискозних напона  $\overline{T}$  за њутновски нестишљив флуид дата је изразом (5.34), у који треба уместо тренутних уврстити просечне брзине. Матрица тензора турбулентних напона  $T^t$  дата је релацијом (5.63). Изрази за појединачне напоне гласе:

(а) Укупни **нормални** напони

$$p_{xx} \equiv \overline{\sigma}_{xx} = -p + \overline{\sigma}_{xx}^{\eta} + \sigma_{xx}^t; \quad \text{аналогно за } \overline{\sigma}_{yy} \text{ и } \overline{\sigma}_{zz} ! \quad (5.83)$$

(б) Укупни **тангенцијални** (смицајни) напони

$$(\overline{\tau}_{xy})_{uk} = \overline{\tau}_{xy} + \tau_{xy}^t; \quad \text{аналогно за } (\overline{\tau}_{xz})_{uk} \text{ и } (\overline{\tau}_{yz})_{uk} \quad (5.84)$$



## Њутновски нестишљив флуид

$$\text{Нормални напони: } \boxed{\bar{\sigma}_{xx} = -p + 2\eta \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} - \rho \overline{u'^2}} \quad (5.85)$$

$$\text{Смицајни напони: } \boxed{(\bar{\tau}_{xy})_{uk} \equiv (\bar{\tau}_{yx})_{uk} = \eta \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right) - \rho \overline{u'v'}} \quad (5.86)$$

Изрази за нормалне напоне  $\bar{\sigma}_{yy}$  и  $\bar{\sigma}_{zz}$  су аналогни изразу (5.85), и изразу (5.86) за смицајне напоне  $(\bar{\tau}_{xz})_{uk}$  и  $(\bar{\tau}_{yz})_{uk}$ . Овим компонентама напона се формирају **тензори укупног напона** (5.81), који су симетрични тензори другог реда. Укупни напони одређују *поље укупних површинских сила*, које омогућују увођење одговарајућих једначина струјања, тј. једначина количине кретања!

## 5.8 Ламинарно струјање кроз праве кружне цеви

## Претпоставке и дефиниције

- Нестишљив флуид ( $\rho = const$ )
- Стационарно струјање ( $\partial(\dots)/\partial t = 0$ )
- Ламинарно струјање у працу подужне  $x$ -осе ( $u, v \equiv w = 0$ )
- *Потпуно развијено* струјање, тј. профил брзине се не мења у  $x$ -правцу ( $\partial u/\partial x = 0 \Rightarrow u \neq u(x)$ )
- При слојевитом струјању у цеви притисак  $p$ , односно генерализисани притисак  $p_G$  су *константни* у попречном пресеку ( $p = const$  односно  $p_G \equiv p - \Phi_F = p + \rho g z = const \Leftrightarrow$  изрази (4.99), (4.108) и (4.110))
- *Разлика притиска у правцу струјања одржава* (омогућује) струјање

## 5.8.1 Профил брзине и пад притиска

За одређивање расподеле брзине у попречном пресеку примењује се *закон количине кретања*. Струјање је *осносиметрично* ( $\partial(\dots)/\partial \varphi = 0$ ,  $w = 0$ ,  $u = u(r)$ ) па се за контролну запремину ( $V$ ) бира коаксијални (саосни) цилиндар полупречника  $r$  и дужине  $l$  између пресека 1-1 и 2-2. (сл. 5.7). Сагласно учињеним претпоставкама не постоји *промена количине кретања*, јер је струјање стационарно и потпуно развијено (једнолико). У том случају једначина (5.33) се знатно упрошћава и своди на једначину *динамичке равнотеже* сила притиска (генерализаног притиска) и силе трења (вискозне силе) како следи (сл. (5.7))

$$r^2 \pi p_1 - r^2 \pi p_2 - |\tau| 2\pi r l = 0, \quad (5.87)$$

где је на основу релације (5.80)  $\tau_{xy} = \tau_\eta = \tau$ . Једначина (5.87) се своди на облик

$$\Delta p = \frac{2l}{r} |\tau|, \quad \Delta p = p_1 - p_2 \quad (\text{пад притиска на дужини } l) \quad (5.88)$$

Ако цев није хоризонтална, онда уместо  $p_1$  и  $p_2$  треба у једначину (5.87) уврстити генерализовани притисак  $p_{Gi} = p_i + \rho g z_i$ ,  $i = 1, 2$ . Величина  $\Delta p$  није функција од радијалне координате  $r$  цилиндричног координатног система  $(x, r, \varphi) \leftrightarrow (u, v, w)$  тако да из (5.88) следе закључци

- (а) пад притиска  $\Delta p = p_1 - p_2$  у смеру струјања од 1-1 ка 2-2 је **последича трења**, тј. вискозности флуида,
- (б) **смицајни** (тангенцијални) напон  $\tau$  је **линеарна** функција попречне координате  $r$ !

Сада се може поставити питање: каква расподела брзине настаје као последица пада притиска  $\Delta p$ ? Одговор се добија када се израз (5.88) напише у облику  $|\tau| = \Delta p r / 2l$  уочава се да се за задато  $\Delta p$  успостављају профили брзине који одговарају *реолошкој једначини* флуида који струји. Напомиње се да једначина (5.88), независно од реолошке законитости  $\tau = \tau(\dot{\gamma})$  (поглавље 1.5), одређује  $\tau(r)$  као линеарну функцију од  $r$ ! То важи како за *њутоновске*, тако и за *нењутоновске* флуиде. Дакле, потребно је задати реолошку релацију  $\tau = \tau(\dot{\gamma})$ , где је у овом случају  $\dot{\gamma} = du/dr$  (поглавље 1.5).

У случају њутоновског флуида, сагласно изразима (5.5) о знаку напона, *реолошка једначина* за њутоновски флуид има облик

$$|\tau| = -\eta \frac{du}{dr} \quad \left( \frac{du}{dr} < 0, \text{ сл. 5.7} \right) \quad (5.89)$$

Даљи ток прорачуна је разумљива и лагана рачуница, како следи. Наиме, уврштавањем (5.89) у (5.88) се добија

$$\boxed{\frac{du}{dr} = -\frac{\Delta p}{2\eta l} r} \quad (5.90)$$

Интеграљењем једначине (5.90) уз коришћење *граничног услова* на зиду цеви  $u(r = R) = 0$  следи израз (сл. 5.7)

$$\boxed{\begin{aligned} u(r) &= \frac{\Delta p}{4\eta l} (R^2 - r^2), \\ u_m \equiv u(r = 0) &= \frac{\Delta p}{l} \frac{R^2}{4\eta}. \end{aligned}} \quad (5.91)$$

*Профил брзине*  $u(r)$  је **парабола**, тачније обртни параболоид. Максимална брзина  $u_m$  се остварује на оси цеви ( $r = 0$ ).

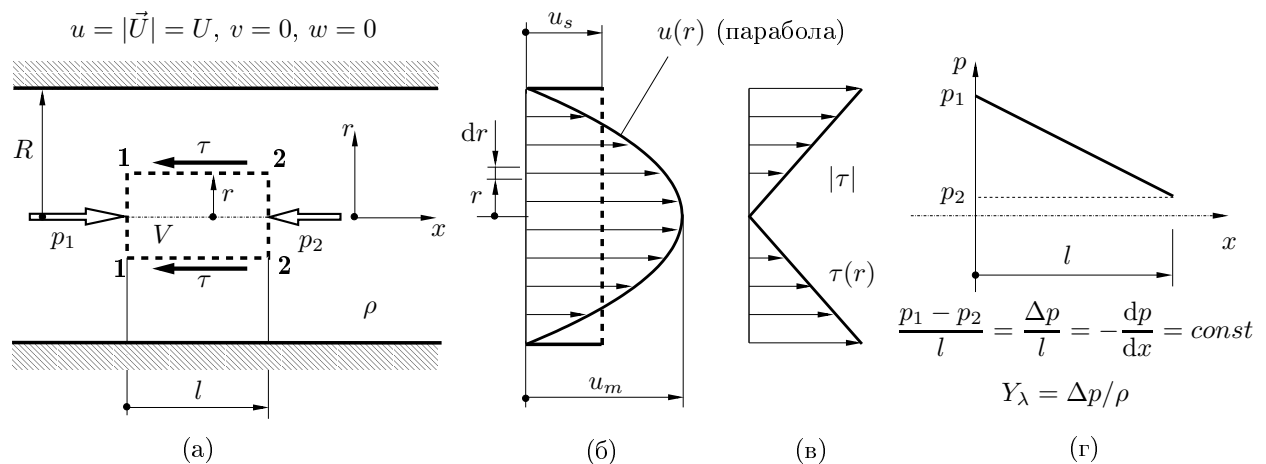
Запремински проток  $\dot{V}$  за *једнодимензијско* струјање кроз цев ( $u(r), v = 0, w = 0$ ) дефинисан је, после коришћења (5.91), изразом (сл. 5.7)

$$\dot{V} = \int_{r=0}^R u(r) 2r\pi dr = \frac{\pi \Delta p R^4}{8 l \eta} = \frac{1}{2} u_m R^2 \pi. \quad (5.92)$$

Из (5.92) следе пропорционалности за *ламинарно* струјање

$$\boxed{\dot{V} \propto \Delta p, \quad \dot{V} \propto R^4.} \quad \text{Хаген-Пуазејев закон} \quad (5.93)$$

Запремински проток је *линеарно* пропорционалан паду притиска! Зависност  $\dot{V} \propto R^4$  која показује да је проток пропорционалан четвртој степену полупречника цеви, што је од велике



**Слика 5.7.** Примена закона количине кретања на ламинарно струјање у цеви кружног пресека; једнодимензијско струјање  $\vec{U} = u\vec{i}, v = w = 0$ : (а) контролна запремина  $V$  и основне ознаке; (б) параболичан профил брзине  $u(r)$ ;  $u_m$  - максимална брзина;  $u_s$  - средња брзина ( $u_s = u_m/2$ ); (в) линеарна расподела смицајног (тангенцијалног) напона  $\tau$  у попречном пресеку; (г) пад притиска  $\Delta p$  је линеарна функција дужине цеви  $l$ , тј. пад притиска по јединици дужине ( $dp/dx$ ) има константну вредност, тј. притисак се по дужини цеви  $x$  мења по линеарном закону;  $Y_\lambda = \Delta p/\rho$  - губитак енергије услед трења на дужини  $l$ .

важности за примену у медицини! Смањење  $R$  доводи до драстичног смањења протока! Пуазеј је француски мединицар који се бавио истраживањем струјања у крви у венама и артеријама.

### 5.8.2 Средња брзина $u_s$

У потпоглављу 4.16.1 разматрани су модели једнодимензијског и квази-једнодимензијског струјања. За примену и техничку праксу је увођење појма средње брзине  $U_s$  од огромног значаја. **Дефиниција** средње брзине:

Средња брзина је замишљена, фиктивна, константна брзина која остварује исти запремински проток флуида  $\dot{V}$  као и стварни профил брзине  $U$ .

Примењено на модел струјне цеви средња брзина струјања  $u_s$  подразумева осредњавање стварне брзине  $u_s$  по пресеку цеви! То треба строго разликовати од осредњавања брзине по времену у појединим тачкама пресека. Просторна и временска осредњавања су сухтински део анализе физичких појава. Средња и просечна (временски осредњења) брзина су значајне, али потпуно различите физичке величине! Сагласно дефиницији средње брзине и једнодимензијском, тј. квази-једнодимензијском карактеру струјања у попречном пресеку цеви  $A$  следе релације (сл. 5.7)

$$\dot{V} = \int_A U dA = U_s A \quad \Rightarrow \quad U_s = \frac{\dot{V}}{A} = \frac{1}{A} \int_A U dA \quad (5.94)$$

где је  $A$  попречни пресек струјне цеви у коме струјање има једнодимензијски карактер.

За ламинарно струјање кроз цев кружног попречног пресека (сл. 5.7) на основу израза (5.92) за запремински проток  $\dot{V}$  добија се следећа карактеристична вредност за средњу

брзину  $u_s$ :

$$u_s = \frac{\dot{V}}{A} = \frac{1}{R^2 \pi} \int_0^R u(r) 2r \pi dr = \frac{\Delta p R^2}{l 8\eta} = \frac{1}{2} u_m \quad (\text{цев - ламинарно струјање}) \quad (5.95)$$

### 5.8.3 Израз за пад притиска. Губитак енергије услед трења. Коэффициент трења

Пад притиска  $\Delta p = p_1 - p_2$  у смеру струјања испољава се услед утицај трења (дејство вискозности)! Према томе, величина  $Y_\lambda = \Delta p / \rho$  представља губитак енергије услед трења! При томе профил брзине (5.91) се не мења!

Израз за пад притиска се добија из (5.91) и (5.95) у облику

$$\Delta p = \frac{4\eta l u_m}{R^2} = 8 \frac{\rho \nu l u_s}{R^2}.$$

Сврсносно је у циљу даље анализе извршити физичку декомпозицију претходног израза за  $\Delta p$ , при чему се формирају **карактеристичне** геометријске и струјне **величине**:

$$\Delta p = \underbrace{\frac{\rho u_s^2}{2}}_{(1)} \cdot \underbrace{\frac{l}{D}}_{(2)} \cdot \underbrace{64 \frac{\nu}{u_s D}}_{(3)}, \quad D = 2R, \quad \boxed{Re = \frac{u_s D}{\nu}} \quad (5.96)$$

Физичко значење појединих чланова:

- ① - има димензију притиска и формира се са средњом брзином  $u_s$ ,
- ② - карактеристика геометрије струјног простора; ако цев није кружног попречног пресека онда се уместо пречника  $D$  уврштава **хидраулички пречник**  $D_h$  дефинисан изразом

$$D_h = \frac{4A}{\mathcal{O}}, \quad Re_h = \frac{u_s D_h}{\nu}, \quad (5.97)$$

где су:  $A$  - површина попречног пресека;  $\mathcal{O}$  - оквашени обим попречног пресека и  $Re_h$  - Рејнолдсов број формиран са хидрауличким пречником. За кружни пресек  $D_h$  је идентично геометријском пречнику  $D$  јер је  $A = D^2 \pi / 4$ ,  $\mathcal{O} = D \pi$  и  $D_h = 4A / \mathcal{O} = D$ !

- ③ - садржи физику процеса трења у цевима, тј. обухвата сложен појаве утицаја вискозности и вискозних сила на струјање флуида и губитка енергије услед трења. Због тога је величина  $\lambda$

$$\boxed{\lambda = \frac{64}{Re}} \quad \left( Re = \frac{u_s D}{\nu} = \frac{\text{конвективне инерцијалне силе}}{\text{вискозне силе}} \right) \quad (5.98)$$

**коэффициент трења** при **ламинарном** струјању у **цевима** и представља једну од најзначајних хидрауличких функција!

Уврштавањем (5.98) у (5.96) добија се Хаген-Пуазејев (Hagen-Poiseuille) закон у облику

$$\Delta p = \lambda \frac{l}{D} \frac{\rho u_s^2}{2}, \quad Y_\lambda = \frac{\Delta p}{\rho} \quad (\text{губитак енергије услед трења}) \quad (5.99)$$

Оваква структура израза за пад притиска је типична за струјања у каналима!

Дакле, независно од тога да ли се ради о потпуно развијеном ламинарном струјању или турбулентном струјању, или струјањима у почетним деоницама цеви, или пак о струјањима у каналима различитих попречних пресека (квадратних, правоугаоних, елиптичких, троугаоних, прстенастих и других) увек је структура формуле за пад притиска облика (5.99). Проблем настаје при одређивању хидрауличке функције, тј. коефицијента трења  $\lambda$ ! О томе ће бити речи у поглављима која следе.

Релација (5.99) садржи и следеће важне закључке:

$$\boxed{\Delta p \propto l} \quad (\text{пад притиска је линеарна функција дужине цеви})$$

$$\boxed{\Delta p \propto u_s} \quad (\text{типична зависност за ламинарна струјања}) \quad (5.100)$$

### Коефицијент трења $\lambda$

Коефицијент трења  $\lambda$ , а самим тим и изгубљена енергија услед трења  $Y_\lambda$ , је при ламинарном струјању функција само од Рејнолдсовог броја  $Re$  и теоријски и практично **не зависи** од **храпавости** површи цеви ( $\delta$  - апсолутна храпавост;  $k = \delta/D$  - релативна храпавост зида цеви). Наиме, код ламинарног струјања не постоји макроскопски пренос количине кретања у попречном правцу, јер се струјање одвија у кретањем делића у слојевима који прекривају храпавост површи и чине зид цеви квази-глатким. Зато се при ламинарном струјању цеви поначају као **хидраулички глатке!**

### Смицајни напон $\tau(r)$

Из (5.91) следи израз за расподелу смицајног напона

$$\tau(r) = -\eta \frac{du}{dr} = \frac{2u_m}{R^2} r = \frac{4u_s}{R^2} r, \quad (5.101)$$

чија је расподела приказана на слици 5.7(в). Дакле, **притисак**  $p$  је **линеарна** функција  $p = p(x)$  подужне координате  $x$ , док је **смицајни напон**  $\tau$  **линеарна** функција  $\tau = \tau(r)$  од попречне координате  $r$ !

### 5.8.4 Флукс количине кретања. Пресек са неравномерним профилем брзине. Корекциони коефицијент - Бусинесков коефицијент

Концепт једнодимензијског и квази-једнодимензијског струјања разматран је у потпоглављу 4.16.1. При струјању у цевима постоје попречни пресеци у којима је остварен **једнодимензијски** карактер струјног поља. Расподела брзине је, међутим, **неравномерна** у

тим пресецима. На пример, показано је да је профил брзине при ламинарном струјању у цеви параболичан. У глави 4 је показано да је за израчунавање флукса (конвективне промене) масе, количине кретања и енергије кроз површ  $A$  пресека цеви потребно израчунати интеграле (4.13), (4.13) и (4.13)

$$\iint_A \rho(\vec{U} \cdot \vec{n})dA, \quad \iint_A \rho\vec{U}(\vec{U} \cdot \vec{n})dA \quad \text{и} \quad \iint_A \rho\left(e + \frac{U^2}{2}\right)(\vec{U} \cdot \vec{n})dA,$$

који се у случају струјања хомогеног и нестишљивог флуида кроз пресек цеви  $A$  у коме струјање има једнодимензијски карактер, свде на облике у којима је изостављена густина

$$\iint_A u dA, \quad \iint_A u^2 \vec{n} dA \quad \text{и} \quad \iint_A \left(e + \frac{U^2}{2}\right) u dA. \quad (5.102)$$

У изразима (5.102) се сматра да је  $\vec{U} = U\vec{n} = u\vec{i}$ , тј. да је струјање у цеви у правцу њене подужне  $x$ -осе на коју је пресек  $A$  ортогоналан.

Свођење интегралних израза (5.102) на обичне алгебарске се постиже увођењем *средњих, константних вредности* физичких величина у пресецима цеви. Тај проблем је решен код првог интеграла увођењем *средње брзине*, једначина (5.94). При томе је *запремински проток  $\dot{V}$  инваријантна величина*, тј. његова вредност је иста независно да ли се рачуна са стварном или средњом брзином. *Код протока  $\dot{V}$  се не чини никаква грешка!* Сада се природно појављује следеће питање: Да ли се при увођењу средње брзине чине *грешке* при израчунавању *количине кретања и кинетичке енергије*? Овде се разматра количина кретања, тј. други интеграл у (5.102), док се кинетичка енергија, тј. део трећег интеграла у (5.102) анализира у следећем поглављу 5.9.

После једноставне трансформације

$$\iint_A u^2 \vec{n} dA \equiv \iint_A u^2 \vec{i} dA = \left(\frac{1}{u_s^2 A} \iint_A u^2 dA\right) u_s^2 A \vec{i} \equiv \beta u_s^2 A \vec{i} = \beta \dot{V} u_s^2 \vec{i}$$

дефинише се извесна величина  $\beta$  изразом

$$\boxed{\beta = \frac{1}{u_s^2 A} \iint_A u^2 dA = \frac{1}{A} \iint_A \left(\frac{u}{u_s}\right)^2 dA} \quad (5.103)$$

Очигледно је да се заменом *стварних* вредности брзине  $u$  њеном *средњом* вредношћу чини грешка, јер из (5.103) следи

$$\iint_A u^2 dA \neq u_s^2 A \quad \rightarrow \quad \iint_A u^2 dA = \beta u_s^2 A.$$

Величина  $\beta$  дефинисана релацијом (5.103) физички представља количиник *стварне* и *средње* *количине кретања*, тј. однос количина кретања израчунатих са стварним и средњим брзинама. На овај начин уведена величина  $\beta$  служи за процену грешке и назива се *корекциони коефицијент количине кретања*, тј. *Бусинесков (Boussinesq) коефицијент*. Коефицијентом  $\beta$  се на изврстан начин процењује и *неравномерност стварног профила брзине*, на шта указују његове вредности израчунате за различита ламинарна и турбулентна струјања. За

равномеран профил нема никакве корекције, јер је у том случају  $\beta = 1!$

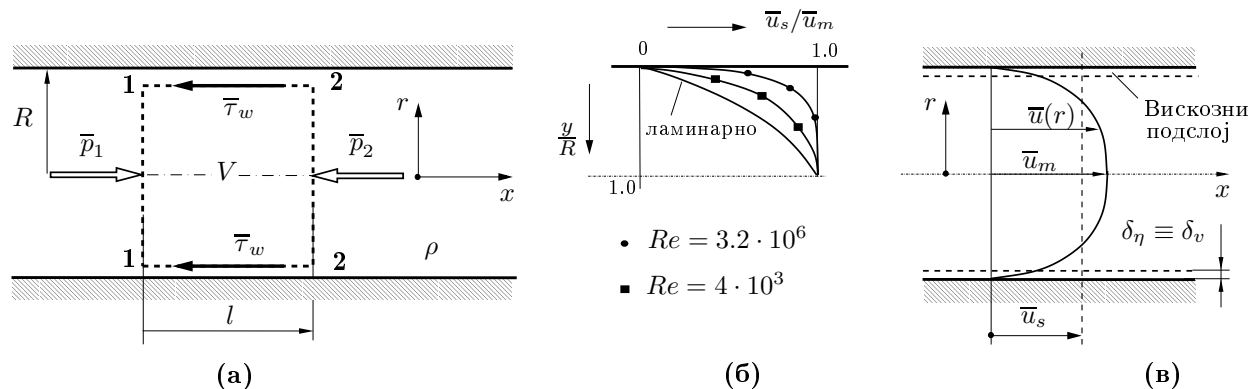
У случају ламинарног струјања кроз цев кружног попречног пресека профил брзине је одређен изразом (5.91), а вредност средње брзине релацијом (5.95), тако да се њиховим уврштавањем у (5.103) добија

$$u = u_m \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right), \quad u_s = \frac{u_m}{2}, \quad A = R^2 \pi \quad \Rightarrow \quad \boxed{\beta = \frac{4}{3}} \quad (5.104)$$

## 5.9 Турбулентно струјање у цеви

### 5.9.1 Примена закона количине кретања

Из претходног излагања следи да је турбулентно струјање неупоредиво теже проучавати него ламинарно. У техничким применама, међутим, често нису интересантне све појединости струјног поља, већ је довољно познавање *просечних, временски осредњених вредности*. Проблем се разматра аналогно ламинарном струјању у цеви. Претпоставља се да је турбулентно струјање *потпуно развијено*, тј. да је  $\frac{d\bar{u}}{dx} = 0$  и  $\bar{u} = \bar{u}(r)$ . Закон количине кретања се примењује на *контролну запремину* узету преко целог пресека цеви (сл. 5.8).



**Слика 5.8.** Турбулентно струјање у цеви: **(а)** Контролна запремина  $V$  за примену закона количине кретања;  $\bar{p}_1$  и  $\bar{p}_2$  - временски осредњени (просечни) притисци у пресецима 1-1 и 2-2;  $\bar{\tau}_w$  - смицајни напон на зиду; **(б)** степени закон расподеле брзине при турбулентном струјању у *хидраулички глаткој* цеви; профили брзина за два различита Рејнолдсова броја упоређена са параболичним профилем брзине за ламинарно струјање; **(в)** Расподела брзине  $\bar{u}(r)$  при турбулентном струјању у цеви;  $\bar{u}_m$  - максимална брзина (у оси цеви);  $\bar{u}_s$  - средња брзина (просечна брзина  $\bar{u}(r)$  осредњена по површи попречног пресека цеви);  $\delta_\eta \equiv \delta_v$  - дебелина *вискозног подслоја*.

При томе постоји *равнотежа* између сила притиска и вискозних сила, тј. сила трења које потичу од смицајног напона на зиду  $\tau_w$ , тако да једначина динамичке равнотеже гласи:

$$\bar{p}_1 R^2 \pi - \bar{p}_2 R^2 \pi - |\bar{\tau}_w| 2R\pi l = 0. \quad (5.105)$$

Једначина количине кретања (5.105) је аналогна једначини (5.87), тако да се дискусија за притисак сада преноси на *просечни* (временски осредњени) притисак.

Из једначине (5.105) следи важна релација

$$\boxed{\Delta \bar{p} = |\bar{\tau}_w| \frac{2l}{R}}, \quad \Delta \bar{p} = \bar{p}_1 - \bar{p}_2 = \bar{p}(x_1) - \bar{p}(x_2), \quad x_2 - x_1 = l \quad (5.106)$$

**Напомене у вези са једначином (5.106)**

- (1) Уврштавајући вредности  $\bar{p}_1 = \bar{p}$  и  $\bar{p}_2 = \bar{p} + d\bar{p}$  и  $x_2 - x_1 = dx$  у (5.106) добија се диференцијални облик једначине количине кретања:

$$\boxed{d\bar{p} = -\frac{4\bar{\tau}_w}{D} dx < 0.} \quad (\text{цев} \rightarrow \bar{\tau}_w > 0) \quad (5.107)$$

Пошто је  $\bar{\tau}_w > 0$  на зиду цеви, следи да треће у овом случају ( $\rho = const$ ,  $A = const$ ) доводи до пада притиска, тј. да је  $d\bar{p} < 0$ . Може се сматрати и да је алгебарска релација (5.106) добијена интеграљењем једначине (5.107) за случају  $\bar{\tau}_w = const$ , што је за модел потпуно развијеног струјања испуњено!

- (2) Применом закона количине кретања на саосне цилиндричне полупречика  $r$  и  $R$  (сл. 5.7 и 5.8) добијају се релације

$$(\bar{p}_1 - \bar{p}_2)R^2\pi - |\bar{\tau}_w|2R\pi l = 0 \quad \text{и} \quad (\bar{p}_1 - \bar{p}_2)r = 2|\bar{\tau}|l$$

из којих следи **линеарна расподела тангенцијалног напона** у попречном пресеку цеви

$$\boxed{\bar{\tau} = \bar{\tau}_w \frac{r}{R} = \bar{\tau}_w \left(1 - \frac{y}{R}\right), \quad r = R - y} \quad (5.108)$$

која важи и за ламинарно и за турбулентно струјање.

Напони  $\bar{\tau}$  и  $\bar{\tau}_w$  су **укупни** тангенцијални напони дефинисани изразом (5.80), тј.  $\tau_{uk} = \bar{\tau}_\eta + \tau_t$ .

- (3) Стање напона у пресецима 1-1 и 2-2 одређено је притиском (или генералисаним притиском), нормалним напонима услед вискозности и турбуленције и смицајним напонима услед вискозности и турбуленције. Међутим, при струјању у цевима нормални вискозни и турбулентни напони се у пресецима цеви практично занемарују у односу на притисак. Силе које потичу од тангенцијалних напона се, због симетричног профила брзине, делимично или потпуно уравнивају у пресеку цеви, тако да се површинске силе свде на силе притиска, јер се стање напона у пресеку по правилу своди на притисак.
- (4) Укупни смицајни напон  $\bar{\tau} = \bar{\tau}_{uk}$  је последица интензивне размене импулса, тј. количине кретања у попречном  $r$ -правцу. Флукуационо кретање знатно утиче на расподелу брзине и на величину пада притиска, тј. на губитке енергије. Због тога је при турбулентном струјању профил брзине знатно равномернији него при ламинарном (сл. 5.8(б)), а такође су и губици енергије знатно већи него при ламинарном струјању. За овај механизам турбулентног преноса везан је и избор контролне запремине. Наиме,



процесе преноса масе, импулса и енергије кроз омотач цилиндра полупречика  $r$  (сл. 5.7(a)) у турбулентном струјању није могуће аналитички описати. Тешкоће у истраживању су нешто мање ако се контролна запремина прошири на цео пресек цеви (сл. 5.8(a)).

У потпоглављу 5.8.3 је показано како *треће* при ламинарном струјању утиче на профил брзине, пад притиска и губитке енергије. Аналоган исказ у себи садржи и једначина (5.106). Међутим, у *турбулентном* струјању је проблем изразито *сложенији*. *Укупни тангенцијални напон*  $\bar{\tau}_w \equiv \bar{\tau}_{uk,w}$  обухвата *смицајне вискозне* и *турбулентне* напоне на зиду цеви и има доминантну улогу у формирању профила брзине, у прорачуну губитка енергије и у процесима преноса у близини зида (универзални *закон зида*”).

Дакле познавање напона  $\bar{\tau}_w$  омогућује да се посредством (5.106) или (5.107) одреди промена притиска дуж  $x$ -осе, тј. пад притиска (или генералисаног притиска), односно губитак енергије услед *трећа*. *Смицални напон на зиду* цеви *кружног попречног пресека* потпуно је одређен *законом расподеле брзине струјања* (једначина (5.101)). Ту настаје *проблем* код турбулентног струјања у односу на ламинарна струјање! Потребно је одредити израз за силу *трећа*, тј. за *смицајни напон на зиду*  $\tau_w$ . Важан и значајан резултат даје *димензијска анализа*.

### 5.9.2 Примена димензијске анализе - тангенцијални напон на зиду цеви - Дарсијева формула. Средња брзина

Функционална зависност у уобичајеним ознакама

$$\Phi(\rho, \bar{u}_s, D, \nu, \delta, \bar{\tau}_w) = 0$$

се применом  **$\pi$  теореме**, тј. Ваши-Бакингамове (Vaschy-Buckingham) теореме своди на функцију

$$\Phi_1(\pi_{\tau_w}, \pi_\nu, \pi_\delta) = 0 \quad (5.109)$$

у којој су величине  $\pi_{\tau_w}$ ,  $\pi_\nu$ ,  $\pi_\delta$  **бездимензијски  $\pi$ -мономи**, који се помоћу усвоје **три** основне величине (прамере) поступком димензијске анализе формирају на следећи начин:

$$\pi_{\tau_w} = \frac{\bar{\tau}_w}{\rho u_s^y D^z} \Rightarrow M L T^{-2} L^{-2} = (M L^{-3})^x (L T^{-1})^y L^z \Rightarrow x = 1, y = 2, z = 0,$$

где у димензијској једначини  $M$  означава масу,  $L$  дужину и  $T$  време. Аналогним поступком се одређују и остала два бездимензијска монома, тако да се њиховим уврштавањем у (5.109) добија

$$\Phi_1\left(\frac{\bar{\tau}_w}{\rho u_s^2}, \frac{1}{Re}, \frac{\delta}{D}\right) \Rightarrow \frac{\bar{\tau}_w}{\rho u_s^2} = \Phi_2\left(\frac{1}{Re}, k\right), \quad k = \frac{\delta}{D} \text{ (релативна хрпаваост цеви).}$$

### 5.9.3 Средња брзина $\bar{u}_s$

У претходним изразима СРЕДЊА БРЗИНА при ТУРБУЛЕНТНОМ струјању у **цеви** кружног попречног пресека  $\bar{u}_s$  дефинисана је релацијама

$$\bar{u}(r) = \frac{1}{T} \int_0^T u(r, t) dt, \quad \bar{u}_s = \frac{\dot{V}}{A} = \frac{1}{R^2\pi} \int_0^R \bar{u}(r) 2r\pi dr. \quad (5.110)$$

Први интеграл одређује просечну, временски осредњену брзину  $\bar{u}(r)$ , а други *средњу брзину*  $u_s$  добијену осредњењавањем просечне брзине  $\bar{u}(r)$  по попречном пресеку цеви. Брзине  $\bar{u}(r)$  и  $\bar{u}_s$  су приказане на слици 5.8(в). Дакле,  $\bar{u}_s$  означава *временску и просторну средњу вредност брзине*. Ово важно формирање средњих вредности брзине  $u(r, t)$  може да се на основу (5.110) прикаже изразом

$$\bar{u}_s = \frac{1}{R^2\pi} \int_0^R \left[ \frac{1}{T} \int_0^T u(r, t) dt \right] 2\pi r dr \quad (5.111)$$

### 5.9.4 Смицајни напон на зиду. Дарсијева формула

Из претходних функционалних зависности добија се израз за тангенцијални (смицајни) напон на зиду цеви  $\bar{\tau}_w$  у облику

$$\bar{\tau}_w = f(Re, k) \frac{1}{2} \rho \bar{u}_s \quad (5.112)$$

У литератури је уобичајено да се **фактор трења**  $f(Re, k)$  повеже са *кофицијентом трења*  $\lambda$  релацијом

$$4f(Re, k) = \lambda(Re, k). \quad (5.113)$$

Уврштавањем (5.112) и (5.113) у (5.106) добија се

$$\Delta \bar{p} = \lambda(Re, k) \frac{l}{D} \frac{\rho \bar{u}_s^2}{2} \quad (5.114)$$

Структура формуле за пад притиска потпуно је *иста* као и за *ламинарно* струјање! Међутим, за *ТУРБУЛЕТНО* струјање *хидрауличка функција*  $\lambda(Re, k)$  **мора** да се одреди експерименталним методама! Теоријски прорачун за сада *није могућ*.

Губитак енергије услед *трења* (5.99) у турбулентном струјању дефинисан је *Дарсијевом формулом* (5.114) у облику

$$\bar{Y}_\lambda = \frac{\Delta \bar{p}}{\rho} = \lambda(Re, k) \frac{l}{D} \frac{\bar{u}_s^2}{2} \quad \text{Дарсијева формула (H.Darcy, 1803-1855)} \quad (5.115)$$

Полуемпиријски изрази за функцију  $\lambda(Re, k)$  зависе од тога да ли се цев у одговарајућем режиму турбулентног струјања понаша као *хидраулички глатка* ( $\lambda = \lambda(Re)$ ), *хидраулички храпава* ( $\lambda = \lambda(Re, k)$ ) или *хидраулички потпуно храпава* ( $\lambda = \lambda(k)$ ).

### 5.9.5 Закони трења за турбулентно струјање у хидраулички глатким цевима

За анализу турбулентног струјања, имајући у виду велику улогу укупног смицајног напона  $\tau_w \equiv \tau_{uk,w}$ , сврсишодно је увести ДИНАМИЧКУ, тј. ПРИВИДНУ БРЗИНУ  $u_\tau$  дефинисану изразом

$$\boxed{u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}} \rightarrow \delta^+ \equiv \frac{u_\tau \delta}{\nu}. \quad (5.116)$$

Експерименти показују да важе следећи критеријуми за разврставање цеви у односу на храпавост:

- (1)  $\delta^+ < 5$ : хидраулички глатка цев,  $\lambda = \lambda(Re)$  - храпавост  $\delta$  не утиче на трење
- (2)  $5 \leq \delta^+ \leq 70$ : хидраулички храпава цев;  $\lambda = \lambda(Re, k)$  - прелазна храпавост, ефекат средњих вредности Рејнолдсовог броја.
- (3)  $\delta^+ > 70$ : хидраулички потпуно храпава цев  $\lambda = \lambda(k)$  - вискозни подслој разрушен и трење не зависи од Рејнолдсовог броја.

#### Хидраулички глатке цеви - коефицијент трења $\lambda(Re)$

**Блазијусова формула.** Интерполацијом многобројних експерименталних резултата Блазијус је за коефицијент трења у хидраулички глатким цевима кружног попречног пресека извео следећу емпиријску формулу

$$\boxed{\lambda = \frac{0,3614}{Re^{1/4}}}, \quad Re = \frac{\bar{u}_s D}{\nu} < 10^5 \quad (2320 < Re < 10^5) \quad (5.117)$$

**Прантлова формула.** Блазијусова формула одговара степеном закону расподеле брзине, а Прантлова формула је у суштини повезана са логаритамским законом расподеле брзине. Одређивањем вредности појединих коефицијената из експерименталних резултата Прантл је 1933. извео полуемпиријску формулу

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2 \log(Re\sqrt{\lambda}) - 0,8}, \quad Re < 3,4 \cdot 10^6 \quad (10^5 < Re < 3 \cdot 10^6) \quad (5.118)$$

која дефинише Прантлов универзални закон трења. Код турбулентног струјања дебљина вискозног подслоја  $\delta_\eta \equiv \delta_v$  (сл. 5.8) и храпавост зида цеви  $\delta$  знатно утичу на глобално понашање струјања, структуру турбуленције и губитке енергије. Код хидраулички глатких цеви храпавост зида је прекривена вискозним подслојем ( $\delta_\eta > \delta$ ). У прелазној области и којој се цев понаша као хидраулички храпава обе величине су истог реда величине ( $\delta_\eta \approx \delta$ ). У случају хидраулички потпуно храпавих цеви елементи храпавости површи су знатно већи од дебљине вискозног подслоја ( $\delta_\eta \ll \delta$ ) и на тај начин одређују трење у турбулентном струјању. О законима трења у овим областима биће говора у наредном поглављу.

### 5.9.6 Степени закон расподеле брзине

Никурадзе (J.Nikuradse) је многобројна експериментална истраживања отпора и расподеле брзина у хидраулички глатким цевима у широком интервалу Рејнолдсових бројева  $4 \cdot 10^3 \ll Re \ll 3,2 \cdot 10^6$  објединио и утврдио да се профил брзине добро описује **степеном функцијом** (сл. 5.8(б))

$$\bar{u} = \bar{u}_m \left(\frac{y}{R}\right)^{1/n} \equiv \bar{u}_m \left(1 - \frac{1}{R}\right)^{1/n} \quad (5.119)$$

Повећањем Рејнолдсовог броја профил брзине постаје *равномернији*, тако да је експонент  $1/n$  функција  $Re$  - броја, тј.  $n = n(Re)$  (табела 5.2)

$Re = \bar{u}_s D / \nu$	$4 \cdot 10^3$	$1.1 \cdot 10^5$	$1.1 \cdot 10^6$	$2 \cdot 10^6$	$3.2 \cdot 10^6$
$n$	6	7	8.8	9.8	10

**Табела 5.2.** Зависност експонента  $n$  у изразу (5.119) за степени профил брзине од Рејнолдсовог броја  $Re$ .

Прантл и Карман (Th. v. Kármán, 1881-1963) су указали на зависност која постоји између Блазијусовог закона трења и степеног закона расподеле брзине. Наиме, када се (5.117) уврсти у (5.112) и при томе искористи степени закон (5.119) добија се

$$|\bar{\tau}_w| \propto \rho \bar{u}^{7/4} y^{-7/4n} \nu^{1/4} R^{7/4n-1/4}.$$

Пошто је турбулентно струјање углавном, више или мање, одређено *локалним* вредностима струјног поља, Прантл и Карман су поставили хипотезу да би **ТУРБУЛЕНТНИ СМИЦАЛНИ НАПОН** за зиду цеви  $\bar{\tau}_w$  требао да буде **независан** од **полупречника  $R$** ! У том случају је  $n = 7$ , тако да се из (5.119) добија важан **1/7 - степени закон расподеле брзине**

$$\bar{u} = \bar{u}_m \left(\frac{y}{R}\right)^{1/7} = \bar{u}_m \left(1 - \frac{r}{R}\right)^{1/7} \quad (1/7 - \text{профил брзине}) \quad (5.120)$$

чија се вредност поклапа са Блазијусовим законом трења (5.117). Ова формула се **не примењује** у области вискозног подслоја, је на зиду цеви профил има бесконачно велики нагиб. Степени профил на оси цеви има "прелом". Међутим, овог профила је наша велику примену у техничкој пракси.

За  $n = 7$  се помоћу (5.120) добија средња брзина  $\bar{u}_s$  (сл. 5.8(в))

$$\bar{u}_s = \frac{\bar{u}_m}{R^2 \pi} \int_0^R 2\pi(R-y) \left(\frac{y}{R}\right)^{1/7} dy = 0.817 \bar{u}_m \quad (5.121)$$

Пад притиска се одређује из (5.114) и износи за  $n = 7$

$$\Delta \bar{p} \propto \bar{u}_s^{7/4} \quad (\text{код ламинарног струјања је } \Delta p \propto u_s!) \quad (5.122)$$

Бусинесков коефицијент је дефинисан релацијом (5.103) па се уврштавањем (5.119), односно

за  $n = 7$  израза (5.120) у (5.103) добија (табела 5.3)

$$\beta = \frac{1}{\bar{u}_s^2 R^2 \pi} \int_A \bar{u}^2 dA = \frac{(n+1)(2n+1)^2}{4n^2(n+2)}; \quad \text{за } n = 7: \beta = \frac{59}{40} = 1.020 \quad (5.123)$$

$n$	5	6	7	8	9
$\beta$	1.037	1.027	1.020	1.016	1.013

**Табела 5.3.** Вредности Бусинесковог коефицијента за различито  $n$  у степеном профилу брзине.

Код ламинарног струјања корекција количине кретања израчунате помоћу средње брзине може бити важна, јер је  $\beta = 4/3$  (израз (5.104)). Код турбулентног струјања, међутим, грешка која се чини је мала и најчешће се занемарује, тј. не врши се никаква корекција ( $\beta \approx 1$ ) и сматра се да је  $\iint_A \bar{u}^2 dA \approx \bar{u}_s^2$ ! Из (5.123) следи да за  $n \rightarrow \infty$  коефицијент  $\beta \rightarrow 1$ . То је у складу са физиком струјања, јер  $n \uparrow$  када  $Re \uparrow$  (табела 5.2), а са порастом Рејнолдсовог броја профил брзине постаје све равномернији услед интензивније макроскопске размене количине кретања.

Важно је истаћи, да се у општем случају, дакле независно од закона расподеле брзине по попречном пресеку цеви, из формула (5.112), (5.113) и (5.116) добија значајна функционална зависност

$$\lambda = 8 \left( \frac{u_\tau}{\bar{u}_s} \right)^2 \quad (5.124)$$

која у себи садржи све **тајне** струјног поља: законе расподеле брзина (из којих се израчунава средња брзина и смицајни напон на зиду), законе трења, пада притиска и губитке енергије! *Закон расподеле смицајног напона на зиду* је битан не само код унутрашњег, већ и код спољасњег струјања, јер се помоћу њега одређује *сила отпора кретању тела!*

### 5.9.7 Турбулентно струјање кроз хидраулички храпаве и потпуно храпаве цеви

#### Апсолутна, релативна и еквивалентна храпавост

*Апсолутна храпавост* је дефинисана *висином неравнина*  $\delta$ . Храпаве цеви, за разлику од глатких, нису геометријски сличне, јер је практично немогуће да две површи имају исту природну храпавост, тј. исти облик и висину неравнина. Увођење појма *релативне храпавости*  $k = \delta/D$  омогућује да се *експериментални* резултати прикажу у облику кривих  $\lambda = \lambda(Re, k)$ .

У пракси се, међутим, користе тзв. *комерцијалне цеви* које су произведене одговарајућим технолошким поступком и код којих осим висине неравнина  $\delta$  значајну улогу има и облик тих неравнина, као и њихов статистички просторни размештај на зиду цеви. Оваква храпавост се у својој укупности и реалности обухвата увођењем појма **еквивалентне храпавости**. Еквивалентном храпавошћу узет је у обзир и материјал од кога је цев израђена (бетон, дрво, ливено гвожђе, галванизирани челик, стакло, комерцијални челик) и начин на који је израђена цев (ливење, ваљање, извлачење, пресовање и друго). Код запрљаних

и зарђалих површи еквивалентна храпавост може да буде и до 1.6 пута већа од природне апсолутне храпавости  $\delta$ . Међутим, да ли ће једна површ да понаша као ГЛАТКА, ХРАПАВА или ПОТПУНО ХРАПАВА зависи од режима струјања, тј. од величине  $Re$  броја и **дебљине вискозног подслоја**  $\delta_\eta = \delta_v$  који при томе настаје. (сл. 5.8(в) и 5.9). Најзначајније је да од свега овога зависи коефицијент трења, губици енергије на трење, а са тим и енергетски биланс хидрауличког система.

Ови важни *физички модели* који су до сада квалитативно анализирани могу да се одговарајућом анализом и квантитативно потврде. У том циљу се детаљније разматрана вискозни подслој.

### Вискозни подслој и његова дебљина. Димензијска анализа

Детаљна истраживања *структуре турбулентног струјања* указују на *посебна својства турбуленције у близини зида*. Унутар ове **области зида** постоје *три карактеристичне области*:

- вискозни подслој
- прелазна област
- логаритамска област

О овоме ће у наредним поглављима бити више говора. Овог тренутка је од интереса анализа вискозног подслоја.

У непосредној близини зида постоји вискозни подслој у коме **вискозност** игра **доминантну улогу**. Физичка разматрања показују да је у близини хидраулички **глатког** зида **доминантан утицај зида** изражен следећом функцијом за *локалну брзину*

$$\bar{u} = F(\bar{\tau}_w, \rho, \nu, y).$$

Применом уобичајеног поступка *димензијске анализе* добија се зависност

$$\bar{u} = \left(\frac{\bar{\tau}_w}{\rho}\right)^{1/2} F_1 \left[ \left(\frac{\bar{\tau}_w}{\rho}\right)^{1/2} \frac{y}{\nu} \right] \Rightarrow \frac{\bar{u}}{u_\tau} = f\left(\frac{u_\tau y}{\nu}\right)$$

која се после увођења *бездимензијске брзине*  $\bar{u}^+$  и *бездимензијског растојања од зида*  $y^+$

$$\boxed{\bar{u}^+ = \frac{\bar{u}}{u_\tau}}, \quad \boxed{y^+ = \frac{u_\tau y}{\nu}} \quad (5.125)$$

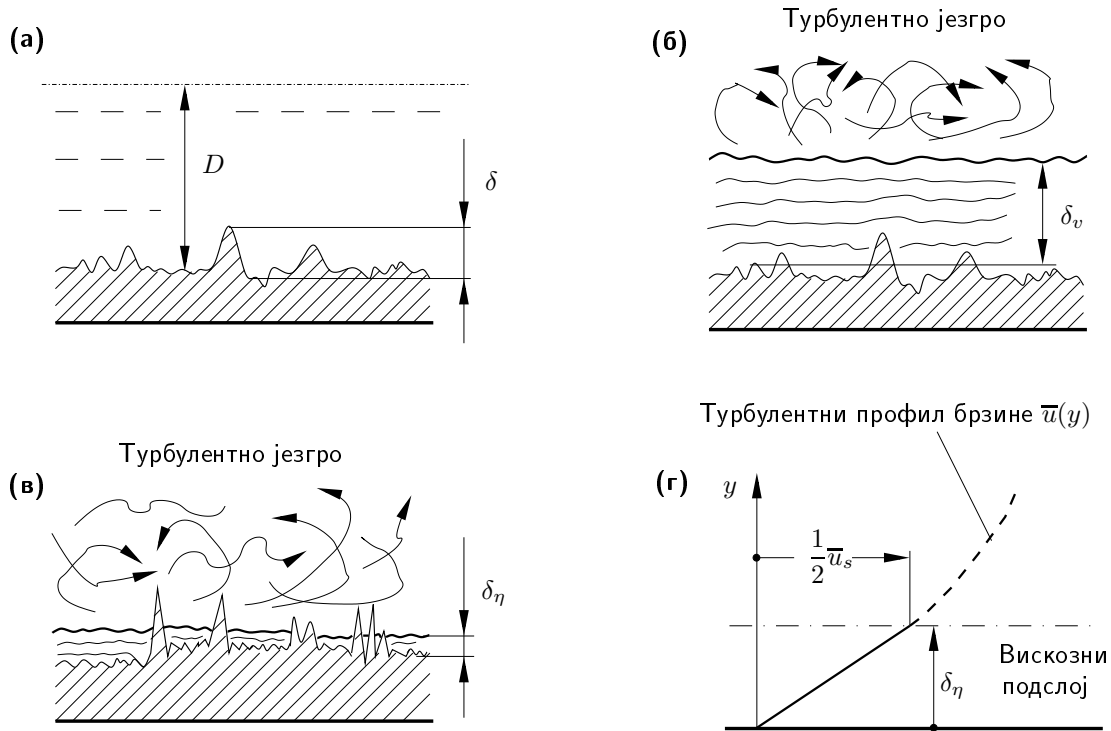
своди на облик

$$\boxed{\bar{u}^+ = f(y^+)} \quad \text{Универзални "закон зида" (Прантл)} \quad (5.126)$$

Функција  $f(y^+)$  је **универзална функција** која има различите облике у вискозном подслоју, прелазној и логаритамској области. Величина  $u_\tau$  дефинисана је изразом (5.116).

Сврсно сходно је разматрати физичку и математичку структуру израза (5.80)

$$\bar{\tau}_{uk} = \bar{\tau}_\eta + \tau_t = \eta \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + (-\rho \overline{u'v'})$$



**Слика 5.9.** Храпавост зида цеви и структура турбулентног струјања: (а) Карактеристични геометријски параметри струјања у цеви круглог попречног пресека ( $R$  - полупречник цеви;  $\delta$  - апсолутна храпавост зида цеви, тј. средња статистичка вредност висина неравнина); (б) и (в) Структура турбулентног струјања у близини (област зида) храпаве површи зида цеви у случају (б) струјања у хидраулички глатким цевима ( $\delta_v > \delta$ ) и (в) струјања у хидраулички храпавим ( $\delta_v \approx \delta$ ) и потпуно храпавим ( $\delta_v \equiv \delta_\eta \ll \delta$ ) цевима;  $\delta_v \equiv \delta_\eta$  - дељина вискозног подслоја; (г) Дефиниција дељине вискозног подслоја  $\delta_v \equiv \delta_\eta$ ;  $\bar{u}_s$  - средња брзина (временско-просторно осредњена) турбулентног струјања одређеног профилем брзине  $\bar{u}(y)$

у непосредној близини зида ( $v' \rightarrow 0$ ), тј. у вискозном подслоју. Овде се ради о граничном случају израза (5.80), када је расподела брзине суштински одређена доминантним утицајем вискозни напона, јер су на самом зиду флукуационе компоненте брзине (гранични услов) једнаке нули. У овој области је  $\bar{\tau}_\eta \gg \tau_t$ , али је и  $y \ll R$  тако да се помоћу (5.80) и (5.108) добија следећи израз за локалну промену брзине у вискозном подслоју:

$$\left. \begin{aligned} \bar{\tau} \equiv \bar{\tau}_{uk} = \bar{\tau}_\eta + \tau_t \approx \eta \frac{d\bar{u}}{dy}, \text{ јер је } \bar{\tau}_\eta \gg \tau_t \\ \bar{\tau} \equiv \bar{\tau}_{uk} = \bar{\tau}_w \left(1 - \frac{y}{R}\right) \approx \bar{\tau}_w, \text{ јер је } y/R \ll 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{d\bar{u}}{dy} = \frac{\bar{\tau}_w}{\eta} \Rightarrow \boxed{\bar{u} = \frac{\bar{\tau}_w}{\rho\nu} y + C} \quad (5.127)$$

Из граничног услова на зиду  $y = 0$ :  $\bar{u}(y = 0) = 0$  одређује се вредност константе  $C$  у (5.127) која износи  $C = 0$ . Уврштавањем ове вредности у (5.127) израз за локалну просечну брзину  $\bar{u}$  се помоћу (5.125) своди на облик

$$\boxed{\bar{u}^+ = y^+} \quad (5.128)$$

односно у у вискозном подслоју  $\bar{u}^+$  је линеарна функција од  $y^+$ . Имајући у виду десну страну једначине (5.106), универзални "закон зида" се своди на линеарну функцију

$f(y^+) = y^+$  у вискозном подслоју (сл. 5.9(г)).

### Процена дебљине граничног слоја

До ког растојања од зида цеви важи линеарна расподела просечне брзине  $\bar{u}(y)$ ? **Експериментални** резултати показују да се *дебљина вискозног подслоја*  $\delta_\eta \equiv \delta_v \equiv y_v$  код хидраулички глатких цевие може одредити релацијом

$$\delta_\eta^+ \equiv \frac{u_\tau \delta_\eta}{\nu} \equiv \frac{u_\tau y_v}{\nu} \equiv y_v^+ \approx 5 \div 8 \quad \stackrel{(!)}{\longleftrightarrow} \quad \delta^+ \equiv \frac{u_\tau \delta}{\nu} < 5 \quad (5.129)$$

Процена дебљине вискозног подслоја се врши на основу њене дефиниције: у слоју дебљине  $\delta_\eta \equiv y_v$  просечна брзина  $\bar{u}$  треба **линеарно** да нарасте од нуле до приближно  $\bar{u}_s/2$  (сл. 5.9(г)).

Опет је даљу анализу меродаван *смицајни напон на зиду*  $\bar{\tau}_w$ ! Помоћу израза (5.112), (5.113) и (5.127) следе релације:

$$\left. \begin{aligned} \bar{\tau}_w &= \frac{\lambda}{4} \frac{1}{2} \rho \bar{u}_s^2 \\ \bar{\tau}_w &= \eta \left. \frac{d\bar{u}}{dy} \right|_{y=0} \equiv \eta \left( \frac{d\bar{u}}{dy} \right)_w = \rho \nu \frac{\bar{u}_s/2}{\delta_\eta} \end{aligned} \right\} \rightarrow \boxed{\frac{\delta_\eta}{D} = \frac{4}{\lambda \text{Re}}} \quad (5.130)$$

Процена реда величине *релативне хрпавости вискозног подслоја*  $\delta_\eta/D \equiv y_v/D$  дата је изразом (5.130) у коме су два доминантна параметра: коефицијент трења  $\lambda$  и Рејнолдсов број  $\text{Re} = \bar{u}_s D/\nu$ .

Ако се закон трења дефинише Бласијовом формулом (5.117),  $\lambda = 0.3164 \text{Re}^{-0.25}$  онда израз (5.130) добија облик

$$\boxed{\frac{\delta_\eta}{D} \equiv \frac{y_v}{D} = \frac{12,64}{\text{Re}^{3/4}}} \Rightarrow \boxed{\text{Re} \uparrow \rightarrow \frac{\delta_\eta}{D} \downarrow} \quad (5.131)$$

Релација (5.131) потврђује претходну физичку анализу, да *профил брзине* да *порастом Рејнолдсовог броја* постаје све *равномернији* (сл. 5.8(б)). *Повећање* Рејнолдсовог броја доводи до **смањења** релативне дебљине вискозног подслоја.

#### • Бројни пример за ред величине $\delta_\eta \equiv \delta_v \equiv y_v$

$$\text{Re} = 10^4, \lambda = 0.03 \quad \rightarrow \quad \delta_\eta/D \approx 10^{-2}; \quad \text{за } D = 100 \text{ mm} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\delta_\eta \approx 1 \text{ mm.}}$$

**Значајан пораст брзине** је у непосредној близини зида, тј. у **слоју** чија је **дебљина** приближно једнака **1% од пречника цеви**.

Ако се процени и *ред величине привидне брзине*  $u_\tau$ , онда је помоћу (5.129) могуће проценити и дебљину слоја  $\delta_\eta^+$ . У том циљу се користе познате релације и користи податак за



струјање у цевима  $\lambda = 0,02$  тако да се добија:

$$u_\tau/\bar{u} = \sqrt{\frac{\bar{\tau}_w}{\rho\bar{u}^2}} \approx \sqrt{\frac{\bar{\tau}_w}{\rho\bar{u}_s^2}} = \sqrt{\frac{\lambda}{8}} = 0.05 \quad (5.132)$$

Добијена вредност одговара реду величине флукуационих брзине, тако да се  $u_\tau$  може схватити и као мера за флукуационе брзине  $u'$  и  $v'$ !

Помоћу (5.9.7) и (5.132) добија се процена реда величине бездимензијске дебљине вискозног подслоја  $\delta_\eta^+$

$$\delta_\eta^+ \equiv y_v^+ \equiv \frac{u_\tau y}{\nu} \equiv \frac{u_\tau \delta_\eta}{\nu} = \frac{u_\tau \bar{u} D}{\bar{u} \nu} \frac{\delta_\eta}{D} \approx 0,05 \cdot 10^4 \cdot 10^{-2} = 5 \quad (5.133)$$

Овај израз одговара релацији (5.129) и представља значајан податак, јер изван овог слоја структура турбуленције је другачија, почиње, *прелазна област* и расподела брзине више није линеарна (сл. 5.9(г)). Треба уочити да се цев понаша као *хидраулички глатка* ако је бездимензијска храпавост  $\delta^+ \equiv u_\tau \delta / \nu < 5$ , тј. ако је  $\delta^+ < \delta_\eta^+$  (упоредити изразе (5.129) и (5.133)). У том случају вискозни подслој прекрива неравнине површи зида цеви - цев је хидраулички глатка (сл. 5.9(б)).

### Закони трења за хидраулички храпаве и потпуно храпаве цеви. Никурадзе-Муудијев дијаграм. Пад притиска услед трења

Из претходних разматрања следи:

- Код ламинарног струјања је  $\lambda = \lambda(Re)$ ! Цеви се понашају као *хидраулички глатке* и коефицијент трења на зависи од храпавости цеви.
- За **турбулентно** струјање постоје три могућности
  - (1) *хидраулички глатке* цеви:  $\delta^+ < 5 \rightarrow \lambda = \lambda(Re)$
  - (2) *хидраулички храпаве* цев:  $5 \leq \delta^+ \leq 70 \rightarrow \lambda = \lambda(Re, k)$
  - (3) *хидраулички потпуно храпава* цев:  $\delta^+ > 70 \rightarrow \lambda = \lambda(k)$

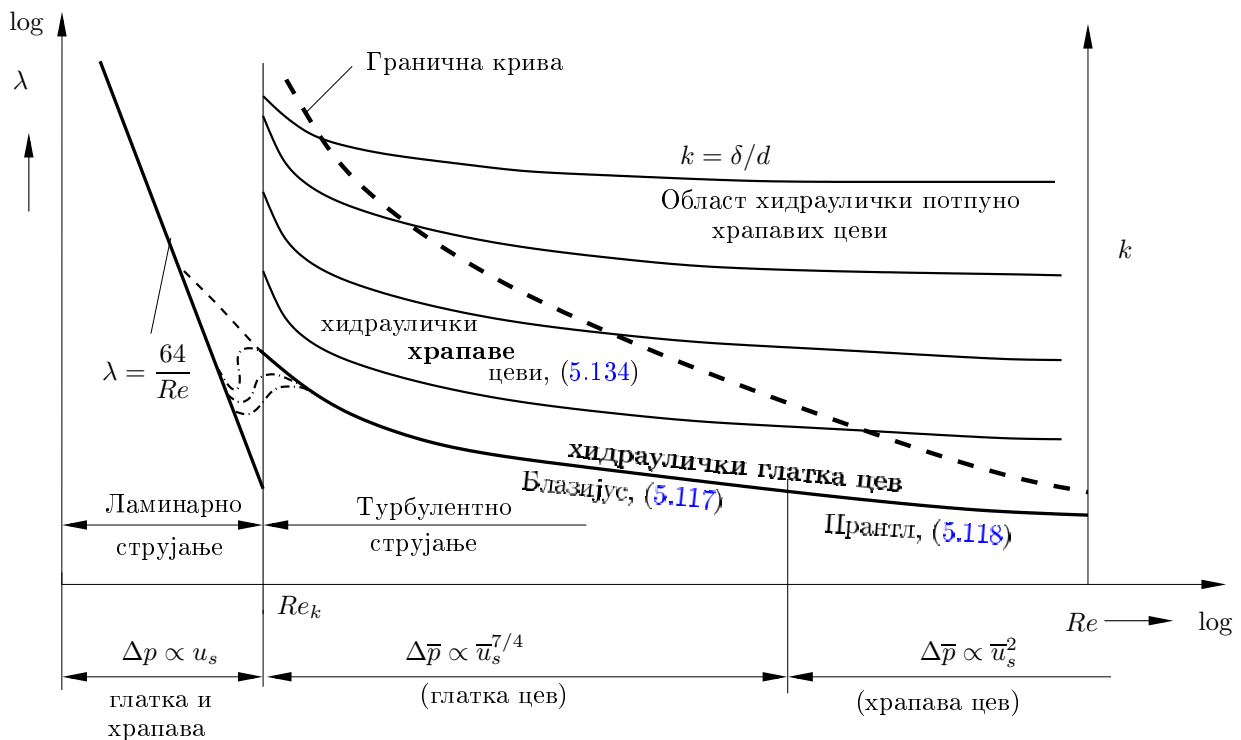
Закони трења за (1) су: Блазијусова (5.117) и Прантлова (5.118) формула. У прелазној области (2) за  $\lambda = \lambda(Re, \delta/D)$  важи полу-емпиријска Колбрукова формула.

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log \left( \frac{\delta}{3.175D} + \frac{2.51}{Re\sqrt{\lambda}} \right) \quad (5.134)$$

У случају (3) за потпуно храпаву цев закон трења  $\lambda = \lambda(k)$  дат је познатом полу-емпиријском формулом

$$\lambda = \frac{0.25}{\left( \log \frac{3.715D}{\delta} \right)^2}, \quad Re > 400 \frac{D}{\delta} \log \left( 3,715 \frac{D}{\delta} \right) \quad (5.135)$$

На слици 5.10 је принципијелно прикан врло значајан за хидрауличке прорачуне *Никурадзе-Мууди-Колбруков* (Nikuradse-Moody-Colebrook) *дијаграм*, који закон трења  $\lambda = \lambda(Re, \delta/D)$



**Слика 5.10.** Коэффициент трења  $\lambda$  у функцији од Рејнолдсовог броја  $Re$  и релативне храпавости  $k = \delta/D$  за цев. Никурадзе-Мудијев (и Колбруков) дијаграм. Зависност пада притиска  $\Delta \bar{p}$  од средње брзине  $\bar{u}_s$  за раличите случајеве струјања.

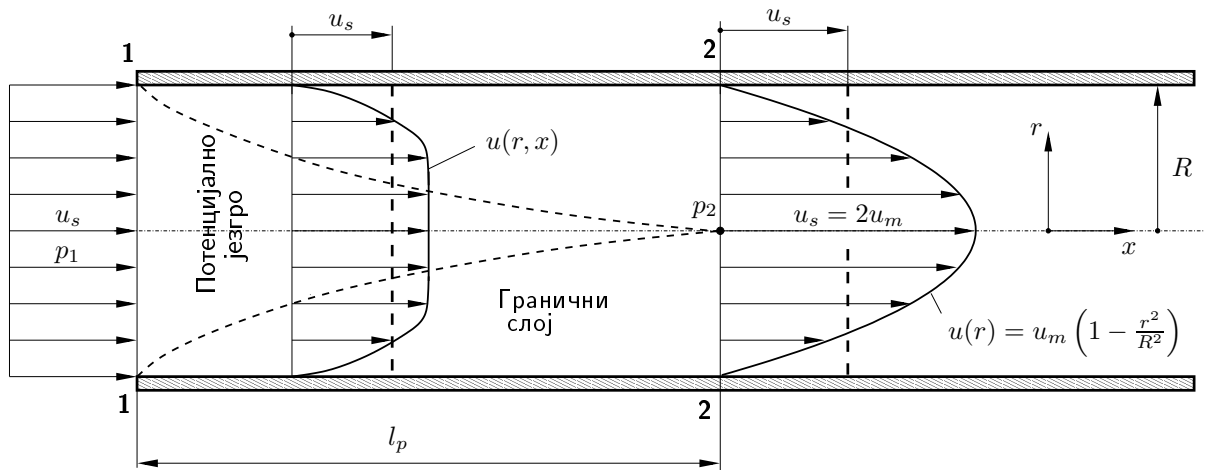
за све режиме и области струјања у цевима приказује у облику дијаграма. На слици су посебно истакнуте и зависности пада притиска од средње брзине. За ЛАМИНАРНО струјање  $\Delta p$  је пропорциоанлно брзини  $u_s$ , сагласно изразу (5.100). За ТУРБУЛЕНТНО струјање у хидраулички глатким цевима та зависност је дата релацијом (5.122), тј.  $\Delta \bar{p} \propto \bar{u}_s^{7/4}$ . У области ПОТПУНО ХРАПАВИХ ЦЕВИ је  $\lambda = \lambda(k)$ , па је у складу са изразом (5.114) пад притиска **квадратна функција** средње просечне брзине, тј.  $\Delta \bar{p} \propto \bar{u}_s^2$ . Ово се у литератури назива "квадратним" законом трења (отпора), а припадна област "квадратном" облашћу!

### 5.9.8 Ламинарно и турбулентно струјање у улазном (почетном) делу цеви. Пад притиска у почетној деоници цеви

#### Развитак ламинарног струјања и пад притиска

Структура струјног поља при ламинарном струјању у почетној, тј. *улазној деоници*  $l_p$  цевовода приказана је на слици 5.11. Равномерни профил брзине у улазном пресеку 1-1  $u = u_s$  трансформише се низводно под утицајем *вискозности* све до пресека 2-2. Наиме, утицај **трења** доводи до формирања **граничног слоја** чија даљина низструјно расте.

Улазна деоница  $l_p$  се завршава у пресеку 2-2 где је дебелина граничног слоја једнака полупречнику цеви  $R$ . Од тог пресека па даље је **потпуно развијено** ламинарно струјање дефинисано профилем брзине  $u = u_m(1 - r^2/R^2)$  и гранични слој једнак полупречнику цеви  $R$ . Очигледно је да је *пад притиска* на почетном делу  $l_p$  *већи* од оног који би био при потпуно развијеном струјању, и то из два разлога: (1) смицајни напон на зиду цеви је већи



**Слика 5.11.** Развитак ламинарног струјања у почетној (улазној) деоници цеви кружног попречног пресека. Величина  $l_p$  је дужина почетне деонице, а  $\Delta p = p_1 - p_2$  пад притиска на тој дужини.

и (2) за трансформацију профила брзине  $u(r, x)$  од равномерног профила  $u = u_s = const$  у пресеку 1-1 до потпуно развијеног профила  $u = u(r)$  у пресеку 2-2 потребна је додатна разлика притиска.

**Примена Бернулијеве једначине - одређивање пада притиска.** У потенцијалном језгру (сл. 5.11) утицај трења (вискозности) практично може да се занемари, јер се ова област налази изван граничног слоја. Примена Бернулијеве једначине дуж осе цеви од пресека 1-1 до пресека 2-2 даје релацију

$$p_1 + \rho \frac{u_s^2}{2} = p_2 + \rho \frac{u_m^2}{2} \Rightarrow \Delta p = p_1 - p_2 = \boxed{1.31} \frac{\rho u_s^2}{2}$$

која показује да се јавља знатан пад притиска једнак ТРОСТРУКОЈ вредности динамичког притиска  $\rho u_s^2/2$ .

**Примена закона количине кретања - одређивање почетне дужине  $l_p$ .** За прорачун дужине  $l_p$  мора се узети у обзир расподела смицајног напона на зиду цеви. Применом закона количине кретања обухвата се физика читаве појаве! Овде се, међутим, наводи само приближан резултат

$$\boxed{l_p \approx 0,03 Re} \quad \text{Пример: } Re = \frac{u_s D}{\nu} \rightarrow \frac{l_p}{D} \approx D$$

**Поређење падова притиска  $\Delta p$  и  $\Delta p_{pr}$ .** Пад притиска при потпуно развијеном (доњи индекс "pr") струјању  $\Delta p_{pr}$  израчунава се применом Дарсијевог обрасца и закона трења за ламинарно струјање у цеви:

$$\Delta p_{pr} = \lambda \frac{l_p}{D} \frac{1}{2} \rho u_s^2 \approx \frac{64}{Re} 0,03 Re \frac{1}{2} \rho u_s^2 = 1,92, \frac{\rho u_s^2}{2}$$

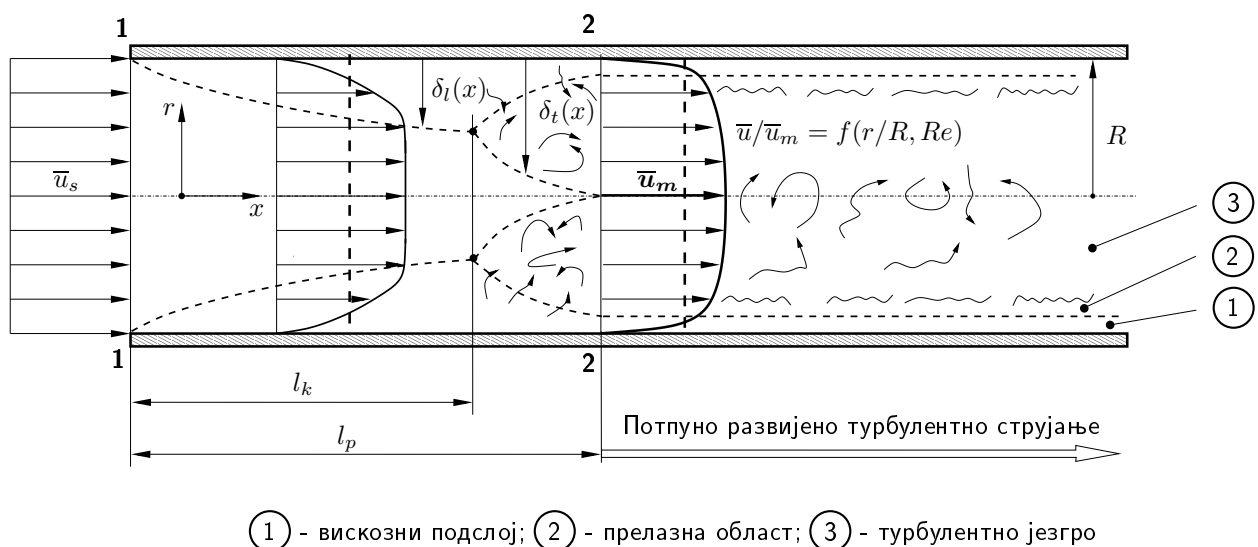
Допунски (додатни, повећани) пад притиска  $\Delta p_{dop}$  у почетној деоници  $l_p$  износи

$$\Delta p_{dop} = \Delta p - \Delta p_{pr} = 1,08 \frac{\rho u_s^2}{2},$$

о чему треба посебно водити рачуна при прорачуну, посебно када су у питању краће деонице, или деонице у којима се на појединим местима нарушава карактер потпуно развијеног струјања!

### Пад притиска и почетна деоница при турбулентном струјању

Развитак струјања у почетној деоници  $l_p > l_k$  принципијелно је приказан на слици 5.12. Дужина  $l_k$  одговара критичном Рејнолдсовом броју при коме ламинарни гранични слој губи стабилност и прелази у турбулентни гранични слој. Струјање течности у области  $x \geq l_k$  је *потпуно развијено* турбулентно струјање у целом пресеку са карактеристичним областима вискозног подслоја, прелазног домена и турбулентног језгра.



**Слика 5.12.** Развитак турбулентног струјања:  $\delta_l(x)$  - дељина ламинарног граничног слоја;  $\delta_t(x)$  - дељина турбулентног граничног слоја;  $l_p$  - дужина почетне деонице.

Кључно је да из физике струјања следи да је **дужина**  $l_p$  улазне, почетне деонице **мања** него у случају ламинарног струјања. Потпуно развијени турбулентни профил брзине је знатно равномернији него ламинарни, и самим тим веома сличан равномерном профилу на улазу у цев. Подаци о дужини  $l_p$  су у литератури различити, јер зависе од расподеле брзине која се усваја или прорачунава за потпуно развијено турбулентно струјање. Подаци осцилују у интервалу

$$l_p \approx (20 \div 30)D \quad \text{или} \quad l_p = 2,45D/\sqrt{\lambda} \quad (\lambda \text{ је за потпуно развијено струјање}).$$

Допунски пад притиска је такође мањи него код ламинарног струјања, јер и на оси цеви настају незнатна убрзања. Опет се применом *Бернулијеве једначине* добија пад притиска при развоју турбулентног струјања на деоници  $l_p$  између пресека цеви 1-1 и 2-2 како следи

$$\bar{p}_1 + \frac{1}{2}\rho\bar{u}_s^2 = \bar{p}_2 + \frac{1}{2}\rho\bar{u}_m^2,$$

односно на основу (5.121),  $\bar{u}_s = 0,817\bar{u}_m$  следи

$$\Delta\bar{p} = \bar{p}_1 - \bar{p}_2 = 0,5\frac{1}{2}\rho\bar{u}_s^2.$$

Претходно је изведено да се код развитка ламинарног струјања уместо бројно коефицијента 0,5 јавља коефицијент 3!

Дакле, код турбулентног струјања је бројна вредност коефицијента испред динамичког притиска **знатно мања** него за ламинарно струјање. Ова разлика је још изразитија при повећању Рејнолдсовог броја.

## 5.10 Хидраулички прорачун простог цевовода

Под простим цевоводом се подразумева једна јединствена цев константног пречника, или цев која се састоји од низа деоница различитог пречника које се редно надовезују једна на другу.

### 5.10.1 Увод - основне претпоставке

Срж механике флуида чине три једначине које описују основне законе физике:

- Закон о одржању масе -једначина континуитета
- Други Њутнов закон - једначина количине кретања
- Закон о одржању енергије - први принцип термодинамике

У најопштијем случају, ради се о парцијалним диференцијалним једначинама по три просторне координате и времену, које није могуће решити. Зато се при решавању одређених проблема струјања могу дефинисати претпоставке које ће знатно олакшати решавање конкретног проблема. Наравно, мора постојати и оправдани разлог за увођење тих претпоставки.

При проучавању струјања течности и гасова веома важно место заузима и област науке о струјању под називом динамика једнодимензијских струјања. То су струјања код којих се све физичке величине зависе само од једне просторне координате усмерене у правцу струјања, и у неком најопштијем случају и од времена, тј.  $f = f(t, l)$ . Типичан пример једнодимензијског струјања је струјање кроз струјно влакно<sup>1</sup> јер се у том случају промене физичких величина по попречном пресеку могу занемарити због његових димензија. Ако је струјање кроз струјно влакно стационарно, тј. ако физичке величине не зависе од времена, већ само од просторне координате, основне једначине којима се описује струјање флуида ће се свести на алгебарске једначине. Овај модел струјања се примењује и на струјања кроз цеви.

Као што је речено, при проучавању струјања течности кроз цеви се уводе следеће претпоставке:

<sup>1</sup>Струјно влакно је струјна цев инфинитезималног пречника  $dA$ .

- струјање је нестишљиво (густина флуида се не мења,  $\rho = const$ )
- струјање је стационарно (физичке величине се не мењају током времена)
- струјање је једnodимензијско (физичке величине зависе само од једне просторне координате усмерене дуж осе цеви)

Главне физичке величине које се одређују приликом прорачуна су притисак и брзина струјања (тачније средња брзина струјања!). За њихово одређивање нам на располагању стоје две алгебарске једначине, које се добијају из основних једначина уз горе наведене претпоставке, а то су једначина континуитета и Бернулијева једначина (добија се из једначине количине кретања).

### 5.10.2 Једначина континуитета

У случају стационарног и нестишљивог струјања општи облик једначине континуитета се своди на:

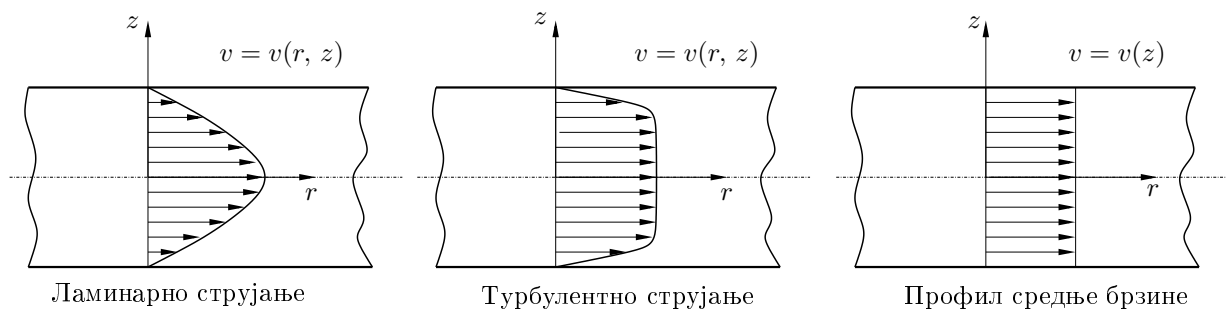
$$\dot{V} = const. \quad (5.136)$$

где је са  $\dot{V}$  означен **запремински проток** кроз цеваод. Запремински проток кроз неку површ се дефинише као флукс вектора брзине кроз ту површ, тј.

$$\dot{V} = \int_A (\vec{v}, \vec{n}) dA \quad (5.137)$$

Покажимо сада на шта ће се свести овај израз у случају струјања кроз цев, и шта је то средња брзина струјања.

Као што је познато, постоје два основна режима струјања, ламинаран и турбулентан, и на слици 5.13 су приказани профили брзине приликом струјања кроз цев у та два случаја.



**Слика 5.13.** Профили струјања приликом ламинарног и турбулентног струјања кроз цев и профил средње брзине.

На основу изгледа профила брзина при ламинарном и турбулентном струјању, може се закључити следеће:

- у оба режима струјања брзина се мења по попречном пресеку
- вектор брзине у свакој тачки попречног пресека је ортогоналан на пресек

У случају да је испуњено да је вектор брзине у свакој тачки попречног пресека је ортогоналан на пресек кажемо да струјање има једnodимензијски карактер, и у том случају

је могуће увести појмове тзв. **средњих вредности физичких величина** и на тај начин применити једнодимензијски модел. У овом случају су вектори  $\vec{v}$  и  $\vec{n}$  колинеарни у свакој тачки попречног пресека, па се запремински проток своди на:

$$\dot{V} = \int_A v \, dA \quad (5.138)$$

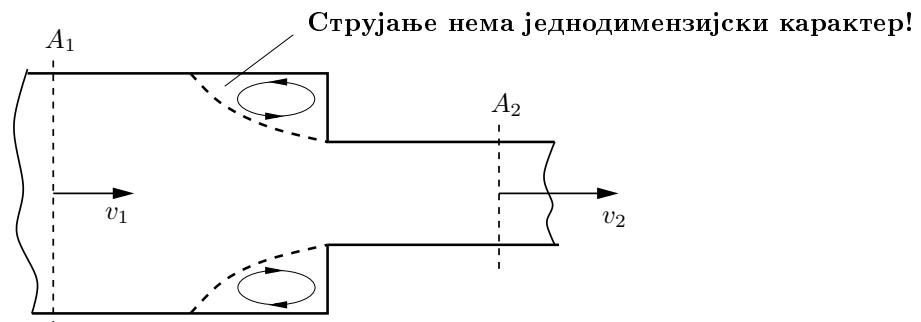
Средња брзина се дефинише на следећи начин:

Средња брзина је фиктивна, константна брзина по попречном пресеку која остварује исти запремински проток као стварни профил брзине.

$$v_s A = \iint_A v \, dA \quad \Rightarrow \quad v_s = \frac{1}{A} \iint_A v \, dA \quad (5.139)$$

У свим прорачунима ћемо користити средњу брзину, и индекс s ће бити изостављен, односно ако се каже да је брзина струјања у неком цевоводу  $v = 1 \text{ m/s}$ , мисли се на средњу брзину струјања!

У случају промене попречног пресека цеви, промениће се и брзина струјања. У близини места где се мења пресек, струјање неће имати једнодимензијски карактер, па је у тим пресецима немогуће дефинисати средњу брзину струјања. Стога се морају усвојити пресеци који су на довољном растојању од места промене пресека, тако да струјање у њима има једнодимензијски карактер, па је могуће користити средње брзине у тим пресецима.



Слика 5.14. Промена попречног пресека цевовода

Једначина континуитета за случај са слике 5.14 се своди на:

$$\dot{V} = const \quad \Rightarrow \quad v_1 A_1 = v_2 A_2$$

где су  $v_1$  и  $v_2$  **средње брзине** у пресецима површина  $A_1$  и  $A_2$ .

### 5.10.3 Бернулијева једначина

Посматрајмо једну цев кроз коју струји течност и уочимо два пресека 1-1 и 2-2, тако да у њима струјање има једнодимензијски карактер (ово је врло важно - за пресеке за које се пише Бернулијева једначина то мора бити задовољено!). Уз уведене претпоставке, за пресеке 1 и 2 важи следећа једначина:

$$Y_1 = Y_2 + Y_{g1-2} \quad (5.140)$$

где је:

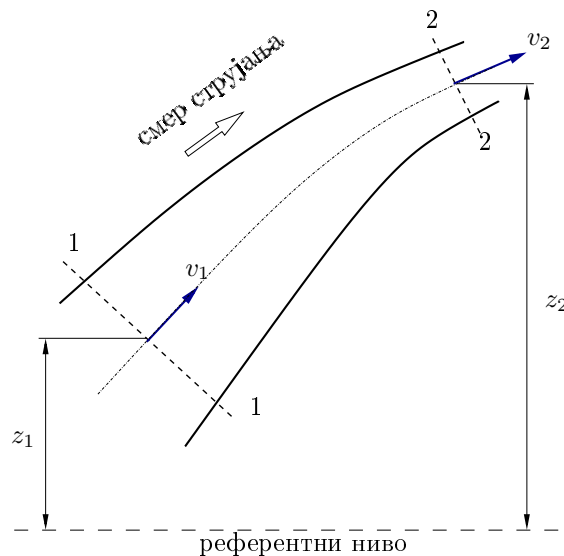
$$Y_i = \frac{p_i}{\rho} + gz_i + \alpha_i \frac{v_i^2}{2} \quad (5.141)$$

$Y_i$  - укупна енергија по јединици масе коју флуид поседује у  $i$ -том пресеку цеви,  $i = 1, 2$ .

Величина  $\alpha_i$  се назива **Кориолисов коефицијент** или **корекциони коефицијент кинетичке енергије**. Овим коефицијентом се коригује грешка која се чини ако се кинетичка енергија рачуна преко средње брзине као  $v_i^2/2$ , јер физички брзина мења по попречном пресеку (средња брзина је замишљена брзина). Тако ће овај коефицијент зависити од режима струјања:

$$\alpha = \begin{cases} 1.058, & \text{турбулентно струјање} \\ 2, & \text{ламинарно струјање} \end{cases} \quad (5.142)$$

Видимо да је код турбулентног струјања  $\alpha \approx 1$  (увек ћемо усвајати  $\alpha = 1$  за турбулентно струјање), док је код ламинарног струјања  $\alpha = 2$ . Да је  $\alpha_{lam} > \alpha_{tur}$  можемо да закључимо и на основу изгледа профила брзине за ова два режима - наиме, код турбулентног струјања у већем делу површина попречног пресека цеви имамо случај да је брзина приближно константна (турбулентно језгро), тако да је профил брзине код турбулентног струјања сличнији профилу средње брзине, него што је то случај за ламинарни профил. Ако у задатку није наглашен режим струјања, подразумева се да се ради о турбулентном струјању!



Слика 5.15. Део цевовода у коме струји флуид

Последњи члан на десној страни једначине (2.5) представља **губитке струјне енергије приликом струјања течности од пресека 1 ка пресеку 2**, и он је једнак збиру локалних губитака енергије и губитку енергије услед трења приликом струјања течности од пресека 1 ка пресеку 2.

$$Y_{g1-2} = \sum Y_{glok1-2} + \sum Y_{gtr1-2} \quad (5.143)$$

### Локални губици енергије

Локални губици енергије се дешавају на неком одређеном месту у цевоводу где се одређена енергија флуида "одузме" од флуида и она се користи за стварање неког секундарног



струјања - то су места где цев мења правац свог пружања (колело, кривина), места где долази до сужења или проширења попречног пресека, места у цевоводу на којима се налазе вентили, итд. Сви ови губици енергије се одређују на основу Вајсбаховог обрасца:

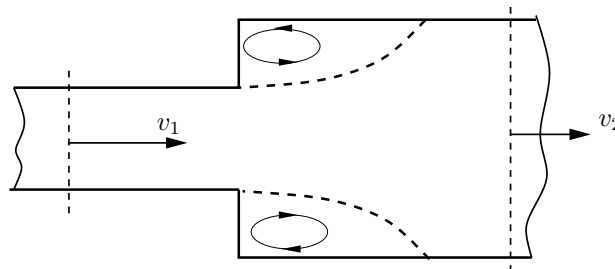
$$Y_{glok} = \zeta \frac{v^2}{2} \quad (5.144)$$

где је одговарајући  $\zeta$  коефицијент локалног губитка енергије или коефицијент отпора. Вредности ових коефицијента ће у свим задацима бити унапред познате за конкретан цевовод. Такође, ствар договора је да је **брзина  $v$  брзина иза локалног отпора**. Тако ће рецимо за сужење попречног пресека губитак енергије бити одређен изразом

$$Y_g = \zeta_{su} \frac{v_2^2}{2}$$

Дакле, енергија у износу  $\zeta_{su} \frac{v_2^2}{2}$  је "одузета" од флуидне струје за стварање вртлога на месту где је дошло до промене пресека.

Једини локални отпор код кога ће не користи Вајсбахов образац је локални отпор услед наглог проширења цевовода, слика 5.16



Слика 5.16. Нагло проширење попречног пресека.

Губитак енергије услед наглог проширења се одређује коришћењем Борда-Карноове формуле:

$$Y_{gnp} = \frac{(v_1 - v_2)^2}{2} \quad (5.145)$$

### Губици енергије услед трења

Ови губици енергије су последица трења између течности и зида цеви. Приликом струјања брзином  $v$  кроз цев дужине  $L$  и површине попречног пресека  $A$  он се одређује на основу Дарсијевог обрасца:

$$Y_{gtr} = \lambda \frac{L}{4R_h} \frac{v^2}{2} \quad (5.146)$$

Величина  $R_h$  се назива **хидраулички радијус** и он се дефинише као однос проточне површине и оквашеног обима, тј.  $R_h = A/O$ . Тако је за кружну цев пречника  $D$  хидраулички радијус једнак:

$$R_h = \frac{A}{O} = \frac{D^2\pi}{4D\pi} = \frac{D}{4}$$

па се Дарсијева формула за случај струјања кроз цеви (што ће бити случај у готово свим

задацима!) своди на:

$$Y_{gr} = \lambda \frac{L}{D} \frac{v^2}{2} \quad (5.147)$$

Величина  $\lambda$  се назива **коэффициент трења** и он се у општем случају зависи од Рејнолдсовог броја и релативне храпавости цеви  $k$ . У случају ламинарног струјања цеви се понашају као хидраулички глатке, коэффициент трења зависи само од  $Re$  и та зависност се добија из тачног решења Навије-Стоксових једначина за случај струјања у цевима, тј:

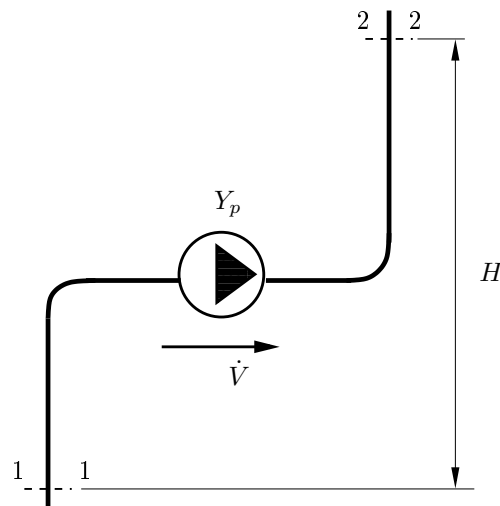
$$\lambda = \frac{64}{Re} \quad - \quad \text{ламинарно струјање} \quad (5.148)$$

У случају турбулентног струјања, без обзира да ли се цев понаша као хидраулички глатка, хидраулички храпава или хидраулички потпуно храпава, добијање тачне зависности  $\lambda(Re, k)$  није могуће, јер се не располаже потребним тачним решењем Рејнолдсових једначина. Зато се непотпуни теоријски резултати Рејнолдсових једначина морају допунити одговарајућим екперименталним подацима. На тај начин се дошло до формула које су дате у табели.

Такође, поред израза датих у табели, коэффициент трења се може одредити и коришћењем Мудијевог дијаграма (види предавања).

### Пумпа у цевоводу

У готово свим задацима, а такође и у пракси, у цевоводу ће бити уграђена пумпа. Утицај пумпе на струјање ће бити обухваћен преко **јединичног рада пумпе**,  $Y_p$  [J/kg] који се може схватити као енергија по јединици масе коју пумпа предаје флуиду.



Слика 5.17. Струјна машина (пумпа) у цевоводу

**Члан  $Y_p$  се у Бернулијевој једначини увек пише са леве стране**, тј. за случај са слике 5.17 (смер струјања је од пресека 1 ка пресеку 2)

$$Y_1 + Y_p = Y_2 + Y_{g1-2} \quad \iff \quad \frac{p_1}{\rho} + gz_1 + \alpha_1 \frac{v_1^2}{2} + Y_p = Y_2 = \frac{p_2}{\rho} + gz_2 + \alpha_2 \frac{v_2^2}{2} + Y_{g1-2} \quad (5.149)$$

Р.број	Зависност $\lambda = \lambda(Re, k)$	Област примене	Аутор
1.	$\lambda = \frac{64}{Re}$	$Re < Re_k = 2320$	-
2.	$\lambda = 0.0025 Re^{0.333}$	$2320 < Re < 4000$	Зајченко
3.	$\lambda = (1.8 \log Re - 1.5)^{-2}$	$4000 < Re < 3 \cdot 10^6$	Конаков
4.	$\lambda = 0.3164 Re^{-0.25}$	$4000 < Re < 10^5$	Блазијус
5.	$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log \left( \frac{k}{3.71} + \frac{2.51}{Re \sqrt{\lambda}} \right)$	$\frac{23}{k} < Re < \frac{560}{k}$	Колбрук-Вајт
6.	$\lambda = 0.1 \left( 1.46k + \frac{100}{Re} \right)$		Алтшул
7.	$\lambda = \left( 1.74 + 2 \log \frac{1}{k} \right)^{-2}$	$Re > \frac{560}{k}$	Прантл - Никурадзе
8.	$\lambda = 0.11k^{0.25}$		Шифринсон
9.	$\lambda = a + bRe^{-c}$ $a = 0.0094 k^{0.225} + 0.53 k$ $b = 88 k^{0.44}$ $c = 1.62 k^{0.34}$	$Re < 10^4$ $10^{-5} < k < 0.04$	Вуд

Како је  $z_2 - z_1 = H$ , једначина (2.14) се своди на:

$$\frac{p_1}{\rho} + \alpha_1 \frac{v_1^2}{2} + Y_p = Y_i = \frac{p_2}{\rho} + gH + \alpha_2 \frac{v_2^2}{2} + Y_{g1-2} \quad (5.150)$$

Корисна или хидрауличка снага пумпе се одређује на основу израза:

$$P_k \equiv P_h = \rho \dot{V} Y_p \quad (5.151)$$

Снага која је потребна за погон пумпе (снага коју је потребно уложити да би смо добили снагу  $P_k$ ):

$$P = \frac{P_k}{\eta_p} = \frac{\rho \dot{V} Y_p}{\eta_p} \quad (5.152)$$

где је  $\eta_p$  (механички) степен корисности пумпе.

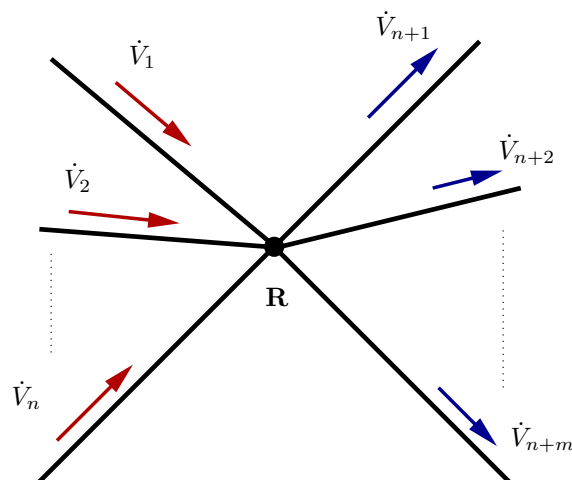
## 5.11 Хидраулички прорачун сложеног цеговода

Под претпоставком да се ради о стационарном, једнодимензијском, нестишљивом струјању ( $\rho = const$ ), при прорачуну сложеног цеговода се користе два типа алгебарских једначина:

- Једначина континуитета
- Бернулијева једначина

### 5.11.1 Једначина континуитета

Једначина континуитета при прорачуну сложеног цеговода се обично пише за места у којима се цевне деонице гранају или спајају - то су чворови мреже, или рачве.



Слика 5.18. Чворно место у мрежи.

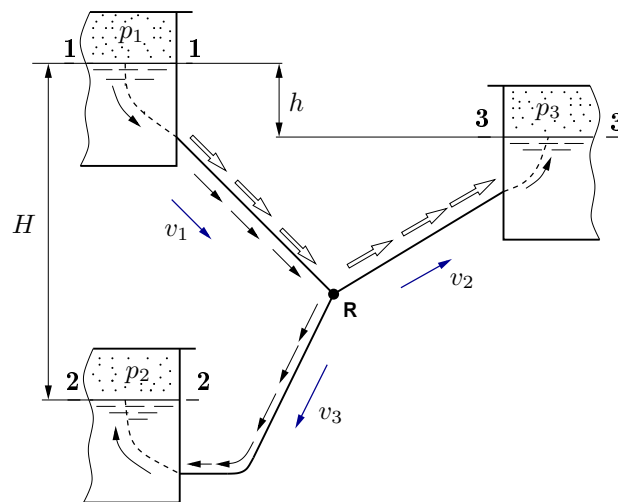
Једначина континуитета написана за чвор са слике (слика 4.1) гласи:

$$\sum_{i=1}^n \dot{V}_i = \sum_{j=n+1}^{m+n} \dot{V}_j \quad (5.153)$$

тј. **сума протока који улазе у чвор (рачву) је једнака суми протока који излазе из чвора.** У задацима се често може срести и случај када се ниво у резервоару одржава константним захваљујући сталном протицању флуида кроз њега ("мали" резервоар) - у овом случају такође важи исти принцип: мора бити задовољена једнакост укупних дотока у резервоар и укупних протока који излазе из резервоара.

### 5.11.2 Бернулијева једначина

Бернулијева једначина се пише на потпуно исти начин као у случају прорачуна простог цевовода, и може се поставити за било која два пресека у којима је задовољен једнодимензијски карактер струјања. За разлику од прорачуна простог цевовода, овде је неопходно, поред једначина континуитета поставити и још најмање две Бернулијеве једначине. Број Бернулијевих једначина које је могуће поставити зависи од броја рачви и броја цевовода који се спајајају (гранају у рачви). Примена Бернулијеве једначине се најбоље може илустровати једноставним примером када су три резервоара међусобно повезана сложеним цевоводом (слика 5.19). У овом конкретном примеру течност се слива из резервоара 1 ка резервоарима 2 и 3 (смерови струјања у деоницама су познати). Имајући у виду да се Бернулијева једначина увек пише у смеру струјања, са пример са слике је могуће поставити две Бернулијеве једначине, и то 1-2 и 1-3.



Слика 5.19. Пример сложеног цевовода

Бернулијева једначина за нивое у резервоарима 1 и 2:

$$Y_1 = Y_2 + Y_{g1-2} \quad \Longleftrightarrow \quad Y_1 = Y_2 + Y_{g1-R} + Y_{gR-2}$$

$$\frac{p_1}{\rho} + gH = \frac{p_2}{\rho} + C_1 \frac{v_1^2}{2} + C_2 \frac{v_2^2}{2} \quad (5.154)$$

Бернулијева једначина за нивое у резервоарима 1 и 3:

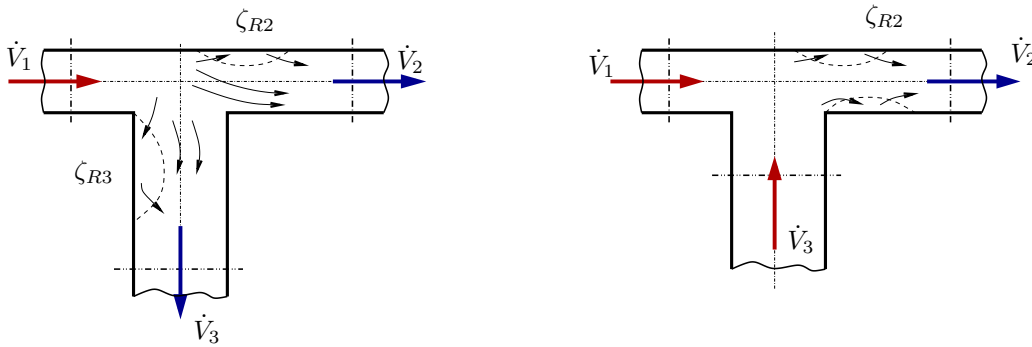
$$Y_1 = Y_3 + Y_{g1-3} \quad \Longleftrightarrow \quad Y_1 = Y_3 + Y_{g1-R} + Y_{gR-3}$$

$$\frac{p_1}{\rho} + gh = \frac{p_3}{\rho} + C_1 \frac{v_1^2}{2} + C_2 \frac{v_3^2}{2} \quad (5.155)$$

Овим једначинама треба придодати и једначину континуитета за рачву:

$$\dot{V}_1 = \dot{V}_2 + \dot{V}_3 \quad \Longleftrightarrow \quad v_1 D_1^2 = v_2 D_2^2 + v_3 D_3^2 \quad (5.156)$$

Из једначина (5.154), (5.155) и (5.156) се могу одредити брзине струјања у појединим



Слика 5.20. Струјање у рачви

деоницама, ако су задате висине  $H$ ,  $h$ , као и еквивалентни коефицијенти отпора за цевоводе 1, 2 и 3.

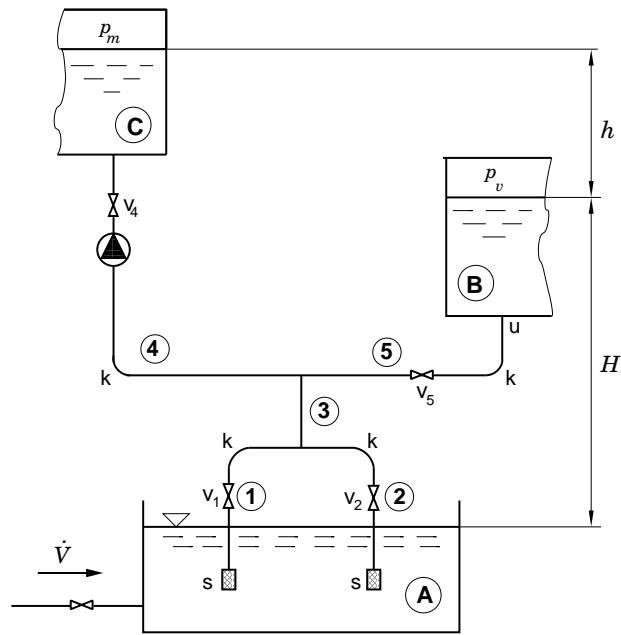
При струјању флуида кроз рачву долази до извесног губитка струјне енергије флуида, и тај губитак се узима у обзир преко коефицијента локалног губитка енергије (локалног отпора) у рачви  $\zeta_R$ .

Коефицијент  $\zeta_R$  се **увек** везује за брзине које "излазе" из рачве. Тако за два карактеристична примера за слике 4.3:

- (а) Имамо губитке енергије  $Y_{gR2} = \zeta_{R2} \frac{v_2^2}{2}$  и  $Y_{gR3} = \zeta_{R2} \frac{v_3^2}{2}$ . Ако је у задатку задато само  $\zeta_R$ , а имамо овај случај онда  $\zeta_R$  везујемо и за брзину  $v_1$  и  $v_2$ , тј.  $Y_{gR2} = \zeta_R \frac{v_2^2}{2}$  и  $Y_{gR3} = \zeta_R \frac{v_3^2}{2}$ .
- (б) У овом случају имамо губитак енергије  $Y_{gR} = \zeta_{R2} \frac{v_2^2}{2}$

## Задаци

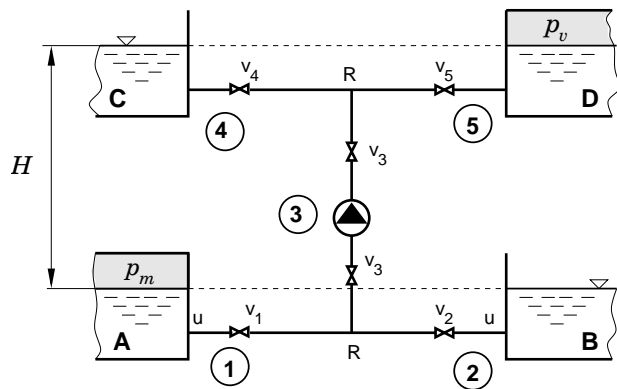
- У постројењу приказаном на слици 1.3 пумпа транспортује воду из резервоара А и В у резервоар С кроз цевоводе 1, 2, 3, 4 и 5. Ниво воде у резервоару А се одржава константним сталним дотицањем константног протока  $\dot{V} = 201/\text{s}$  у њега, док су резервоари В и С велики. Познати су следећи подаци:  $p_m = 10 \text{ kPa}$ ,  $p_v = 50 \text{ kPa}$ ,  $d_1 = d_2 = 100 \text{ mm}$ ,  $d_3 = 120 \text{ mm}$ ,  $d_4 = d_5 = 150 \text{ mm}$ ,  $L_1 = L_2 = 2 \text{ m}$ ,  $L_3 = 1 \text{ m}$ ,  $L_4 = 24 \text{ m}$ ,  $l_5 = 15 \text{ m}$ ,  $\lambda = 0.025$  (за све цеви),  $H = 5 \text{ m}$ ,  $h = 2 \text{ m}$ ,  $\zeta_s = 4$ ,  $\zeta_{v1} = 5$ ,  $\zeta_{v2} = 8$ ,  $\zeta_{v4} = 4$ ,  $\zeta_{v5} = 10$  и  $\zeta_k = 0.8$ . Одредити брзине струјања у свим деоницама и снагу пумпе.



**Решења:**  $v_1 = 1.354 \text{ m/s}$ ,  $v_2 = 1.192 \text{ m/s}$ ,  $v_3 = 1.768 \text{ m/s}$ ,  $v_4 = 2.262 \text{ m/s}$ ,  $v_5 = 1.13 \text{ m/s}$ ,  $Y_P = 143.4 \text{ J/kg}$  и  $P = 7.263 \text{ kW}$

2. У постројењу приказаном на слици 1.4 пумпа потискује воду из резервоара А и В у резервоаре С и D. Познати су следећи подаци:  $H = 5 \text{ m}$ ,  $p_m = 10 \text{ kPa}$ ,  $p_v = 5 \text{ kPa}$ ,  $\eta_P = 0.8$ ,  $\zeta_u = 0.5$ ,  $\zeta_R = 0.5$ ,  $\lambda = 0.03$  (за све цеви) и подаци дати у табели. Ако је у деоници 5 измерена брзина струјања  $v_5 = 1.8 \text{ m/s}$ , одредити протоке кроз све цевне деонице, као и снагу која је потребна за погон пумпе.

$i$	$L_i$ [m]	$d_i$ [mm]	$\zeta_{vi}$
1	3	180	10
2	3.6	180	2
3	5	200	3
4	4	120	4
5	5	150	5



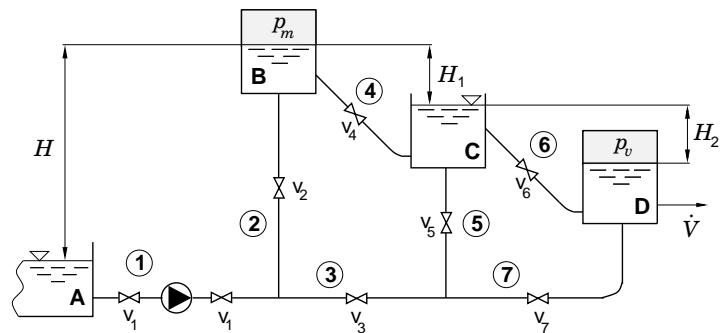
Слика 4.5

**Решења:**

- Брзине струјања:  $v_1 = 1.377 \text{ m/s}$ ,  $v_2 = 0.532 \text{ m/s}$ ,  $v_3 = 1.546 \text{ m/s}$ ,  $v_4 = 1.483 \text{ m/s}$ ,  $v_5 = 1.8 \text{ m/s}$
- Запремински протоци:  $\dot{V}_1 = 35.041 \text{ l/s}$ ,  $\dot{V}_2 = 13.541 \text{ l/s}$ ,  $\dot{V}_3 = 45.581 \text{ l/s}$ ,  $\dot{V}_4 = 16.771 \text{ l/s}$ ,  $\dot{V}_5 = 31.811 \text{ l/s}$
- Јединични рад и снага пумпе:  $Y_P = 65.3 \text{ J/kg}$  и  $P = 3.965 \text{ kW}$ .

3. На слици је приказан сложен цевовод у коме пумпа, кроз цевне деонице 1, 2, 3, 5 и 7 транспортује воду из великог отвореног резервоара А у резервоаре В, С и D. Истовремено, цевоводом 4 вода се слива из резервоара В у резервоар С, односно из цевоводом 6 из резервоара С у резервоар D. Познати су следећи подаци:  $H = 5\text{ m}$ ,  $H_1 = 1\text{ m}$ ,  $H_2 = 2\text{ m}$ ,  $p_m = 0.2\text{ bar}$ ,  $p_v = 0.5\text{ bar}$ ,  $\lambda = 0.03$  (за све цеви),  $\eta_P = 0.8$ , као и подаци дати у табели. Одредити снагу потребну за погон пумпе, укупан запремински проток који дотиче у резервоар D и коефицијент локалног отпора вентила  $\zeta_{v7}$  у деоници 7. Напомена: Нивои воде у резервоарима В, С и D се одржавају констатним сталним протицањем кроз њих. Све локалне отпоре, осим вентила занемарити.

	$L_i$ [m]	$D_i$ [mm]	$\zeta_{vi}$
1	100	300	5
2	80	200	5
3	80	200	10
4	60	200	10
5	60	200	5
6	60	200	8
7	200	200	?



Слика 4.6

**Решења:**  $v_1 = 1.717\text{ m/s}$ ,  $v_2 = v_4 = 1.771\text{ m/s}$ ,  $v_3 = 2.092\text{ m/s}$ ,  $v_5 = 1.091\text{ m/s}$ ,  $v_6 = 2.862\text{ m/s}$ ,  $v_7 = 1.001\text{ m/s}$ ,  $\dot{V} = 0.121\text{ m}^3/\text{s}$ ,  $Y_P = 132.56\text{ J/kg}$ ,  $P = 20\text{ kW}$  и  $\zeta_{v7} = 125.6$ .